

Zur geodätischen Beschreibung von Deformationsprozessen im 3D-Bereich

Rüdiger Wittenburg

1. Einleitung

Strainanalyse, eine Spezifikation der Zerlegung von Vektorfeldern im kinematischen Anwendungsbereich, ist in der modernen Geodäsie zu einem festen Begriff geworden. Bereits im Jahre 1967 wurde sie von E. GRAFAREND zur Beschreibung gebirgskinematischer Deformationen angewandt (GRAFAREND 1967). In der Folgezeit sind im geodätischen Anwendungsbereich eine Vielzahl von Anwendungen bekannt geworden, die sich jedoch auf die 2D-Strainanalyse beschränkten. Vergleichbare Entwicklungen einer 3D-Strainanalyse waren nicht zu beobachten, obgleich auch in dieser Richtung durch E. GRAFAREND eine vorzügliche Vordenker-Arbeit geleistet wurde (GRAFAREND 1985; GRAFAREND 1986). Offensichtlich ist der Grund hierfür in der Spezifik der geodätischen Methode zu suchen:

Die Standardmethode der geodätischen Deformationsanalyse basiert in überwiegender Mehrheit der Anwendungsfälle auf wiederholter Positionsbestimmung bzw. Koordinatenvergleich von Punkten, welche das deformierte Objekt allein auf seiner Randfläche (z.B. Erdoberfläche) repräsentieren. Methodisch gesehen, gestattet also der somit auf die Beschreibung von Objektflächen eingeschränkte Anwendungsbereich nur *externe* Deformationsbeschreibungen (bzw. externes Monitoring).

Die Zielstellung einer 3D-Beschreibung von Deformationsprozessen ist darum zunächst mit der Frage konfrontiert:

Ist mit geodätischen Standardmessungen (Messung von Richtungen, Winkeln, Strecken und Höhenunterschieden) allein, überhaupt eine 3D-Beschreibung von Objektdeformationen möglich ?

2. Informationslücken der geodätischen Deformationsmessung im 3D-Bereich

Werden die Koordinatenunterschiede einer geodätischen Wiederholungsmessung

$$\mathbf{d} = \mathbf{X}' - \mathbf{X} \quad (1)$$

mit $\mathbf{d} = |\Delta X, \Delta Y, \Delta Z|^T$ = Vektor der Koordinatenunterschiede

$\mathbf{X} = |X, Y, Z|^T$ = Koordinatenvektor der Referenz-Messung

$\mathbf{X}' = |X', Y', Z'|^T$ = Koordinatenvektor einer Folge-Messung

als Repräsentanten eines Vektorfeldes (Geschwindigkeitsfeld) interpretiert, so kann dieses im Sinne von HELMHOLTZ (1858) zerlegt werden:

- in die Parameter der Starrkörperbewegung (Translation und Rotation), welche die Bewegung gegenüber einem Koordinatensystem beschreiben und
- in die Parameter der Deformation (Dilatation und Scherung), welche die „innere“ Kinematik unabhängig vom Koordinatensystem beschreiben:

Starrkörper- bewegung:

Translation und Rotation

Deformation:

Dilatation + Verformung

(Größen – und Formänderung)

Die entsprechende Analyse, bzw. die Zerlegung des Vektorfeldes $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{X}, \mathbf{X}')$ in seine Komponenten basiert auf einer Modellanpassung $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{X})$, für welche in geodätischen Anwendungsfällen vielfach die Taylorentwicklung

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0(\mathbf{X}_0) + \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{X}} \right)_0 (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial \mathbf{X}^2} \right)_0 (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^2 + \dots \quad (2)$$

den Modellhintergrund liefert. Als Entwicklungspunkt \mathbf{X}_0 wird sinnvoll der Schwerpunkt der Objekt-Koordinaten angenommen, so daß im Ergebnis mit zentrierten Netzvergleichen bzw mit zentrierten Koordinaten (Schwerpunktkoordinaten)

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \quad (3)$$

$$\text{wobei } \mathbf{x} = |x, y, z|^T$$

und zentrierten Verschiebungen

$$\mathbf{u} = \mathbf{d} - \mathbf{d}_0 \quad (4)$$

$$\text{wobei } \mathbf{u} = |u, v, w|^T$$

$$\text{und } \mathbf{d}_0 = |t_x, t_y, t_z|^T = \text{Translationsvektor}$$

gearbeitet werden kann.

Unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung kann in hinreichend kleinen Homogenbereichen (insbesondere bei der Beschreibungen finiter Elemente) das Modell (2) durch das einfache Modell einer homogenen Deformation

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)_0 \mathbf{x}$$

$$\text{bzw. } \mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + (\text{grad } \mathbf{u})_0 \mathbf{x} \quad (5)$$

angenähert werden. In diesem Modell entspricht dem Gradienten $\text{grad } \mathbf{u}$ eine Matrix zentrierter Differenzenquotienten

$$d\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{u}{x} & \frac{u}{y} & \frac{u}{z} \\ \frac{v}{x} & \frac{v}{y} & \frac{v}{z} \\ \frac{w}{x} & \frac{w}{y} & \frac{w}{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \quad (6)$$

Mit

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + d\mathbf{F} \quad (7)$$

worin \mathbf{I} = Einheitsmatrix

ergibt sich das Modell der Affin-Transformation (WOLFRUM, O.1978; WELSCH, W. 1982):

$$\mathbf{X}' = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{d}_0 \quad (8)$$

Methodisch ist die Bestimmung der Matrix \mathbf{F} dem Geodäten wohl vertraut, doch liefern die geodätischen Standard-Meßprogramme im 3D-Anwendungsfall nur sechs der in $d\mathbf{F}$ benötigten neun Differenzenquotienten (WITTENBURG 1998). Aus Lagemessungen folgen vier-, aus Höhenmessungen folgen zwei Parameter:

*Verschiebungsgradient
aus Lagemessungen:*

$$d\mathbf{F}_{H1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \quad (9)$$

*Verschiebungsgradient
aus Höhenmessungen:*

$$d\mathbf{F}_{H2} = \begin{vmatrix} w_x \\ w_y \end{vmatrix} \quad (10)$$

Unbestimmter Vertikal-Gradient:

$$d\mathbf{F}_V = \begin{vmatrix} u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}^T \quad (11)$$

Information über die Parameter des Vertikalgradienten $d\mathbf{F}_V$ werden durch geodätische Standard-Meßprogramme nicht geliefert, so daß eine vollständige 3D-Beschreibung von Deformationsprozessen auf dieser Grundlage nicht möglich ist.

Angesichts dieser Situation steht zunächst die Frage:

Lassen sich mit einer weitergehenden Modellanpassung (als (5)) auch weitergehende Informationen gewinnen?

2. Grenzen der Modellerweiterung

2.1 Grenzen der Modellerweiterung bei der Bestimmung der 3D-Rotation

Der methodische Werdegang einer Deformationsanalyse beginnt mit der Trennung von äußerer Starrkörperbewegung und innerer Deformation. Nach Abspaltung der Translation ist also noch vom Verschiebungsgradienten (6) die Rotation zu trennen.

In den üblichen Anwendungsfällen (mit Strainraten zwischen 10^{-6} und 10^{-3}) kann der entsprechende strenge Zusammenhang

$$d\mathbf{F} = \mathbf{E} \bullet \mathbf{R} \quad (12)$$

mit \mathbf{E} = Straintensor
und \mathbf{R} = Rotationstensor

durch die Approximation

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{2}(d\mathbf{F} + d\mathbf{F}^T) + \frac{1}{2}(d\mathbf{F} - d\mathbf{F}^T) \quad (13)$$

bzw.

$$d\mathbf{F} = \mathbf{E}_0 + d\mathbf{R} \quad (14)$$

angenähert werden. Dem entspricht die Vernachlässigung des Gliedes 2. Ordnung $d\mathbf{F}^T d\mathbf{F}$ in der Lagrangeschen Strainmatrix (DERMANIS / GRAFAREND 1992):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (d\mathbf{F} + d\mathbf{F}^T + d\mathbf{F}^T d\mathbf{F}) \quad (15)$$

Mit zentrierten Differenzenquotienten gilt somit für die antisymmetrische 3D- Rotationsmatrix

$$d\mathbf{R} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(u_y - v_x) & -\frac{1}{2}(u_z - w_x) \\ -\frac{1}{2}(u_y - v_x) & 0 & \frac{1}{2}(v_z - w_y) \\ \frac{1}{2}(u_z - w_x) & -\frac{1}{2}(v_z - w_y) & 0 \end{vmatrix} \quad (16)$$

Da jedoch die Koeffizienten u_z und v_z nicht gegeben sind, ist die Bestimmung der vertikalen Rotationen $\mathbf{R}_Y(\omega_y)$ und $\mathbf{R}_X(\omega_x)$ mit einem Informationsdefizit konfrontiert.

Unter diesen Bedingungen erscheint es opportun, die aus geodätischen Höhenmessungen ableitbaren Neigungen w_x und w_y , die auch unter der Bezeichnung "Schieflagen" bekannt sind, als vertikale Rotationen zu interpretieren:

$$\omega_X = w_Y \quad (17)$$

$$\omega_Y = w_X \quad (18)$$

Diese zunächst plausible Arbeitshypothese impliziert jedoch die Symmetrieanahmen

$$w_Y = -v_Z \quad \text{und} \quad w_X = -u_Z \quad (19)$$

Die Konsequenz dieser Annahmen wird durch die symmetrische Strainmatrix

$$\mathbf{E}_0 = \begin{vmatrix} u_X & \frac{1}{2}(u_Y + v_X) & \frac{1}{2}(u_Z + w_X) \\ \frac{1}{2}(v_X + u_Y) & v_Y & \frac{1}{2}(v_Z + w_Y) \\ \frac{1}{2}(w_X + u_Z) & \frac{1}{2}(w_Y + v_Z) & w_Z \end{vmatrix} \quad (20)$$

verdeutlicht, worin mit (19) die Parameter der Scherung γ^E (engineering shear) den Betrag Null annehmen:

$$\gamma^E_{XZ} = 2e_{XZ} = u_Z + w_X = 0 \quad (21)$$

$$\gamma^E_{YZ} = 2e_{YZ} = v_Z + w_Y = 0$$

Damit wird die Unzulänglichkeit des homogenen Modells (5) verdeutlicht.

2.2 Grenzen der Modellerweiterung bei der Bestimmung des 3D-Scherstrains

Ähnlich der Beziehung zwischen "Schieflage" und vertikaler Rotation, ist ein geometrischer Zusammenhang zwischen *Scherung und Krümmung* anzunehmen.

Doch bedarf eine differentialgeometrische Beschreibung der Krümmung der 2. Ableitung des Positionsvektors bzw. der 1. Ableitung des Tangentenvektors. Hierfür ist das Modell (5) nicht hinreichend adäquat. Es sollte also im Sinne von (2) um das nächst höhere Glied erweitert werden

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)_0 \mathbf{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} \right)_0 \mathbf{x}^2 + \dots \quad (22)$$

Für die Funktion $w = w(x, y, z)$ gilt nunmehr (in Skalarform)

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} x + \frac{\partial w}{\partial y} y + \frac{\partial w}{\partial z} z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} y^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} z^2 \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} xz + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} yz \quad (23)$$

Wegen des o.g. Informationsdefizites der geodätischen Standardmessungen kann in (23) jedoch nur die Funktion $w = w(x, y)$ bestimmt werden

$$w(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x} x + \frac{\partial w}{\partial y} y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} y^2 \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} xy \quad (24)$$

Diese Funktion liefert über die Parameter

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w_x}{\partial x} = K_x \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial w_y}{\partial y} = K_y \quad (25)$$

Information über die Neigungsänderungen bzw. Krümmungen $\{K_x; K_y\}$.

Diesem entspricht im differentialgeometrischen Verständnis eine Veränderung des Richtungswinkels der Tangente $(t_2 - t_1)$, die meßtechnisch als Winkeländerung zweier Schieflagen bzw. als Winkelverzerrung

$$\alpha_{xz} - \alpha_{xz} = e_{xz} (\cos 2t_2 - \cos 2t_1) + \frac{1}{2} (e_{zz} - e_{xx}) (\sin 2t_2 - \sin 2t_1) \quad (26)$$

bestimmt wird.

Die Modellerweiterung (22) ermöglicht also die zusätzliche Bestimmung der Parameter

$$e_{xz}, e_{yz}, e_{zz} - e_{xx}, e_{zz} - e_{yy} \quad (27)$$

Bis auf die Größe e_{zz} wären nunmehr im symmetrischen Straintensor \mathbf{E}

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ & e_{yy} & e_{yz} \\ & & e_{zz} \end{vmatrix} \quad (28)$$

alle Parameter gegeben. Eine vollständige Darstellung der 3D-Deformation ist also weiterhin *nicht* möglich, doch kann mit den Parametern (27) der 3D-Scherstrain

$$\gamma_T^{3D} = \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_1 - e_3)^2 + (e_2 - e_3)^2} \quad (29)$$

über die Beziehungen

$$(e_1 - e_2)^2 = (e_{xx} - e_{yy})^2 + 4e_{xy}^2 \quad (30)$$

$$(e_1 - e_3)^2 = (e_{xx} - e_{zz})^2 + 4e_{xz}^2 \quad (31)$$

$$(e_2 - e_3)^2 = (e_{yy} - e_{zz})^2 + 4e_{yz}^2 \quad (32)$$

bestimmt werden.

Grundsätzlich kann also festgestellt werden:

Als ein methodisches Extern - Verfahren informiert die geodätische 3D-Deformationsmessung vollständig über die tangentialen Scherparameter einer Objektdeformation, jedoch nicht über den radialen Parameter e_{zz} , da hierfür eine interne Deformationsmessung notwendig ist.

Also kann über die 3D-Dilatation

$$\Delta^{3D} = e_1 + e_2 + e_3 = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \quad (33)$$

keine abschließende Aussage gemacht werden. Damit ist eine Darstellung der 3D-Deformation in Form eines Deformationsellipsoides (als geometrischer Ort des Straintensors, vgl. Bild 1) nicht möglich.

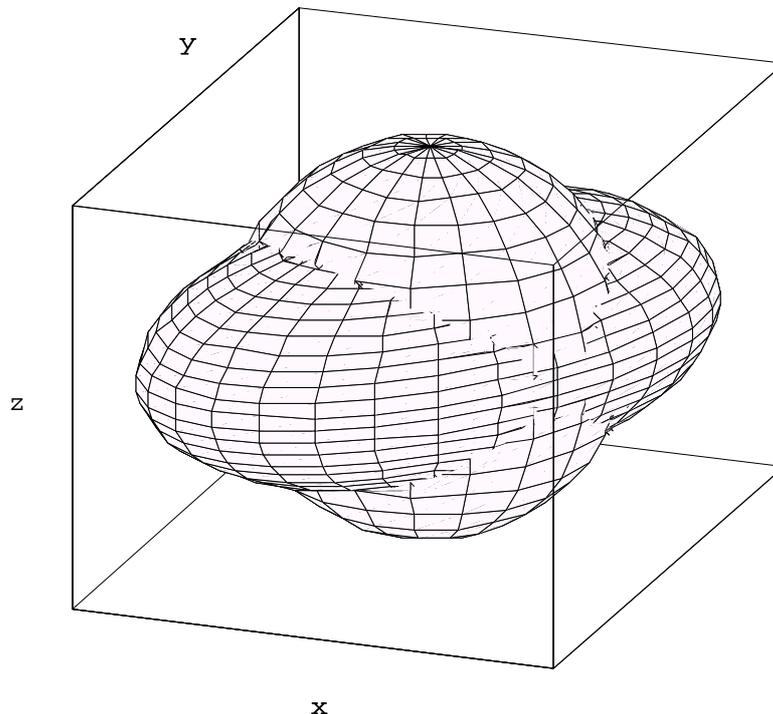


Bild 1: Deformationsellipsoid

Andererseits ist für den 3D-Scherstrain eine vollständige 3D-Darstellung möglich, die über eine 3D-Richtungsfläche (3D-Richtungsrose bzw. Fußpunktkurve der max. Winkelverzerrung) realisiert werden kann (Bild 2):

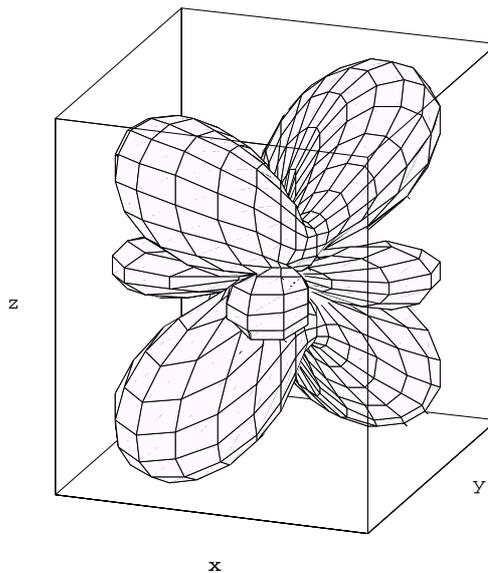


Bild 2: 3D-Richtungsfläche des Scherstrains

3. Schlußfolgerungen

Die unter Pkt.2.1 und Pkt 2.2 abgehandelten Lösungsansätze zur Überwindung der Informationsdefizite der geodätischen Deformationsmessung lösen nicht das bestehende Grundproblem, wonach eine 3D-Deformationsanalyse nur auf der Grundlage von **externer und interner** Meßinformation möglich ist. Auch eine Abschätzung fehlender Parameter durch Rückrechnung (WITTENBURG u.a. 1998) kann nicht als Ersatz für eine interne Deformationsmessung gewertet werden.

Es gilt ein Grundgebot der Naturwissenschaft, welches von GALILLEI formuliert wurde: Meßbar machen, was zu messen ist !

Da das bestehende Informationsdefizit meßtechnisch bedingt ist, sollte primär der Einsatz einer ergänzenden (komplementären) Meßtechnik diskutiert werden (CHEN u.a. 1985):

4. Integration von geodätischen und geotechnischen Messungen bei der Deformationsanalyse

Wie die Fundamental -Beziehung zwischen den Koordinatendifferenzen **d** und den kinematischen Ziel-Parametern **p**

$$\mathbf{d} = \mathbf{H} \bullet \mathbf{p} \quad (37)$$

mit

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y & x & 0 & 0 & y & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & z & 0 & y & 0 & x & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & y & -x & 0 & 0 & 0 & z & 0 & x & y \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{p}^T = \left| t_x t_y t_z \omega_x \omega_y \omega_z e_{xx} e_{yy} e_{zz} e_{xy} e_{xz} e_{yz} \right|$$

nochmals verdeutlicht, wäre das o.g. geodätische Problem allein schon durch die zusätzliche meßtechnische Erfassung des vertikalen Normalstrains e_{zz} zu lösen. Die entsprechende komplementär-geotechnische Informationsbeschaffung wäre also allein schon durch den zusätzlichen Einsatz von Vertikal-Extensometern bzw. von entsprechenden Mehrfach-Extensometern (als adäquate Form einer internen Meßtechnik) zu realisieren.

Beispiele für den Einsatz dieser Meßtechnik sind im zunehmend geotechnisch geprägten Bauwesen hinreichend zu finden. Damit erweist sich die Ingenieurgeodäsie als ein vielversprechendes Anwendungsfeld für weitere Entwicklungen der 3D-Strainanalyse:

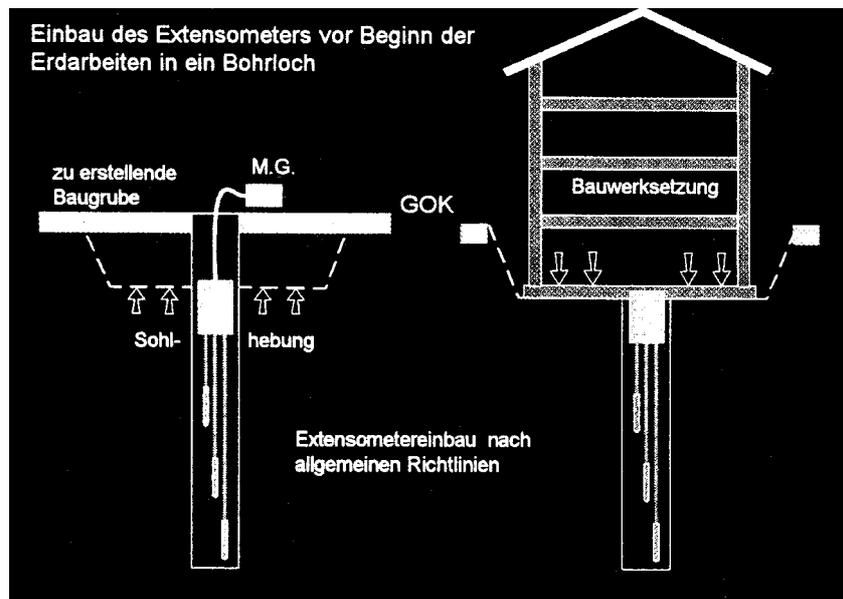


Bild 3: Zur Bestimmung des Parameters e_{zz} mit Mehrfachextensometern bei Sohlhebungs- und Bauwerksetzungsmessung

5. Literatur

- CHEN, Y.Q.; CHRANOWSKY, A.; SECORD, J.M. (1985): Generalised Modelling of Ground Movements by Intergrating Geodetic Surveys with Geotechnical Measurements. In: Proceedings VI. Int. Congress of ISM, Vol. 1, Harrogate - S. 912 - 920
- DERMANIS, A. UND E. GRAFAREND (1992): The finite element approach to the geodetic computation of two- und three-dimensional Deformationparameters: a study of fram invariance and parameter estimability. Proc. Int. Conference "Cartography-Geodesy" 24.11.-3.12. in Maracaibo Venezuela.
- GRAFAREND, E. W. (1967): Bergbaubedingte Deformationen und ihr Deformationstensor. Bergbau-Wiss. 14, Heft 4, S. 125-132.
- GRAFAREND, E. W. (1985): Criterion Matrices for Deforming Network. In: Optimization and Design of Geodetic Networks. Ed. by E.W. Grafarend und F. Sanso, Berlin, Heidelberg, New York, Tokio: Springer Verlag -606 S.
- GRAFAREND, E. W. (1986): Three-dimensional Deformation Analysis: Global Vector Spherical Harmonics ans Local Finite Element Representation. Tectonophysics, 130, 337-359.

- HELMHOLTZ, H. (1858): Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Winkelbewegungen entsprechen. Crelles J. 55 (1858) 25
- WELSCH, W. (1982): Zur Beschreibung homogenen Strains oder Einige Betrachtungen zur affinen Transformation. In: ZfV 107 (1982) 5 S.173-182
- WITTENBURG,R.;BRUMM,A.;LEHMANN, R.;NEUHAUS,W. (1998): Zur 3D-Deformationsanalyse des Senkungstrogenes. IN: Geoforschung, Geotechnik und Geoinformatik aus markscheiderisch-geodätischer Sicht. Vorträge zum 49.Berg-und Hüttenmännischen Tag 1998 in Freiberg. Freiburger Forschungshefte A847 S.138-151 TU Freiberg
- WITTENBURG, R. (1998): Zur Beschreibung bergbauinduzierter Kinematik. In: Das Markscheidewesen 105 (1998) S.135-140
- WOLFRUM, O. (1978): Die Verzerrungseigenschaften der affinen Transformation. In: AVN.-Karlsruhe 85(1978)10,-S.367-374

