

Über die Analyse von Beobachtungen in der Ausgleichungsrechnung – Äußere und innere Restriktionen

Ronald Jurisch, Georg Kampmann und Janette Linke

Zusammenfassung: In der Ausgleichungsrechnung spielt die sogenannte Geometrie der Beobachtungen eine entscheidende Rolle zur Begutachtung der erhaltenen Ergebnisse. Nachstehend wird eine weitreichende Analyse der äußeren und inneren Strukturen dieser Geometrie dargelegt.

Summary: Our contribution deals with the analysis of observations within the adjustment of observations. Introducing the normal form of the coefficient matrix and Plücker-Graßmann-Coordinates so called latent conditions (hidden condition equations within observation equations) can be detected.

1 Vermittelnde Ausgleichungsrechnung und äußere Restriktionen

Beginnen wollen wir unsere Betrachtungen mit der vermittelnden Ausgleichungsrechnung. Dies begründet sich in dem Umstand, daß man Zielfunktionsinvariant die anderen Modelle der Ausgleichungsrechnung in dieses Modell überführen kann und wir die hier vorgestellten Begriffe an das Modell der vermittelnden Ausgleichungsrechnung gebunden sehen wollen. Es gilt für die vermittelnde Ausgleichung

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{l} + \mathbf{v}, \quad D(\mathbf{l}) = \mathbf{P}^{-1}\sigma^2, \quad (\text{A})$$

worin $\mathbf{l}$ einen $(n,1)$ Vektor von (reduzierten) Beobachtungen, $\mathbf{A}$ eine (n,u) Matrix fester Koeffizienten mit $\text{rg } \mathbf{A} = q \leq u$, $\mathbf{x}$ einen $(u,1)$ Vektor fester, unbekannter Parameter und $\mathbf{v}$ einen $(n,1)$ Vektor zufälliger Fehler bezeichnet, wobei die v_i als normalverteilt angenommen werden sollen mit $\mathbf{v} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{E})$. Die Matrix $\mathbf{E}$ bezeichnet die Einheitsmatrix der betreffenden Dimension, n die Anzahl der Beobachtungen und u die Anzahl der unbekannten, zu schätzenden Parameter $\mathbf{x}$; $D(\mathbf{l})$ bezeichnet die Varianz-Kovarianz-Matrix der Beobachtungen a priori, wobei die (n,n) Matrix $\mathbf{P}$ die diagonale Gewichtsmatrix und der Faktor σ^2 die Varianz der Gewichtseinheit (Referenz-Varianz) bezeichnet, (inkonsistentes Gleichungssystem vermittelnder Beobachtungen) vgl. (GRAFAREND, SCHAFFRIN, 1993).

Werden an dieses Modell Bedingungsgleichungen für die Unbekannten der Gestalt

$$\mathbf{Hx} = \mathbf{w} \quad (\text{B})$$

angefügt, so sollen diese als „**äußere Restriktionen**“ bezeichnet werden. Hierin bedeutet die (r,u) Matrix $\mathbf{H}$ die Restriktionsmatrix mit $\text{rg } \mathbf{H} = r$ und $\mathbf{w}$ ist der $(r,1)$ Widerspruchsvektor.

Die Restriktionsgleichungen (B) entstehen dabei aus a priori Kenntnissen über die Geometrie des zugrunde liegenden Ausgleichungsproblems (z. B. geodätische Netzausgleichung).

Wegen der hinlänglich bekannten „Datumsinvarianz der Beobachtungen“ wollen wir zunächst die Problematik des möglichen Rangdefektes in $\mathbf{A}$ durch Hinzunahme der Matrix $\mathbf{E}$ mit $\mathbf{EA}^T = \mathbf{0}$ im Sinne der Analyse der Geometrie der Beobachtungen interpretiert sehen. Dabei gilt für die $(u-q,u)$ Matrix $\mathbf{E}$ die Verfügung $\text{rg } \mathbf{E} = u-q$ und weiterhin die „äußeren Restriktionen“

$$\mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{o}. \quad (\text{C})$$

Für alle Betrachtungen der Geometrie der Beobachtungen ist es nun notwendig, diese „äußeren Restriktionen“ zu eliminieren, um dann die „innere Geometrie der Beobachtungen“ untersuchen zu können. Ein solcher Eliminationsvorgang soll beispielhaft dargelegt werden. Es gilt:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{l} + \mathbf{v} \quad \text{mit} \quad \mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{w}.$$

Dimensionen: $\mathbf{A}$ (n,u), $\mathbf{x}$ (u,1), $\mathbf{l}$ (n,1), $\mathbf{v}$ (n,1), $\mathbf{H}$ (r,u), $\mathbf{w}$ (r,1). Dieses Gleichungssystem kann wie nachfolgend umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \\ \mathbf{H}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{H}_2\mathbf{x}_2 &= \mathbf{w} \end{aligned}$$

Unter der Bedingung, daß diese Aufteilung so durchgeführt worden ist, daß sich die (r,r) Matrix $\mathbf{H}_1$ invertieren läßt (regulär), gilt dann die folgende Darstellung:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{H}_1^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{H}_2\mathbf{x}_2).$$

Mit der Festlegung für die Matrix $\mathbf{H}_1$ gilt dann für die übrigen Dimensionen $\mathbf{A}_1$ (n,r), $\mathbf{x}_1$ (r,1), $\mathbf{A}_2$ (n,u-r), $\mathbf{x}_2$ (u-r,1), $\mathbf{H}_1$ (r,r), $\mathbf{H}_2$ (r,u-r).

Die Gleichung $\mathbf{x}_1 = \mathbf{H}_1^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{H}_2\mathbf{x}_2)$ eingesetzt in die Gleichung $\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{l} + \mathbf{v}$ ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\mathbf{H}_1^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{H}_2\mathbf{x}_2)) + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \\ = \mathbf{A}_1\mathbf{H}_1^{-1}\mathbf{w} - \mathbf{A}_1\mathbf{H}_1^{-1}\mathbf{H}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \\ = (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1\mathbf{H}_1^{-1}\mathbf{H}_2)\mathbf{x}_2 &= (\mathbf{l} - \mathbf{A}_1\mathbf{H}_1^{-1}\mathbf{w}) + \mathbf{v}, \end{aligned}$$

mit: $\mathbf{A}_R = (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1\mathbf{H}_1^{-1}\mathbf{H}_2)$ und $\mathbf{l}_R = (\mathbf{l} - \mathbf{A}_1\mathbf{H}_1^{-1}\mathbf{w})$

gilt: $\mathbf{A}_R\mathbf{x}_2 = \mathbf{l}_R + \mathbf{v}.$

Dieses Modell entspricht der **Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen ohne äußere Restriktionen**. Die Matrix $\mathbf{A}_R$ hat hierin vollen Spaltenrang (keinen surjektiven Rangdefekt).

Nachdem nun sichergestellt ist, daß keine äußeren Restriktionen im zu analysierenden Modell vorhanden sind, kann mit der Analyse der Geometrie der Beobachtungen begonnen werden. Wie sich zeigen wird, sind auch hierbei noch Restriktionen „zu fürchten“, die sich allerdings aus der Wahl des Ausgleichungsmodells bzw. der Beobachtungsanordnung ergeben. Wir bezeichnen diese Sachverhalte als „innere Restriktionen“. Diese sind Gegenstand nachstehender Darlegungen.

2 Analyse der inneren Geometrie von Beobachtungen in der vermittelnden Ausgleichungsrechnung

Ausgangspunkt der Betrachtungen sei das bekannte Modell der vermittelnden Ausgleichungsrechnung

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T\mathbf{v} &\rightarrow \min \end{aligned} \quad (1)$$

Hierin sei $\mathbf{A}$ eine (n,u) Matrix mit vollem Spaltenrang (die sogenannte Designmatrix), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^u$ ein Vektor unbekannter Parameter, $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$ der gegebene Beobachtungsvektor und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor unbekannter Verbesserungen. Mit dieser Voraussetzung für $\mathbf{A}$ enthält das Modell (1) der vermittelnden Ausgleichung keine „äußeren Restriktionen“ wie $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{w}$ bzw. $\text{rg } \mathbf{A} = q < u$, womit ein Rangdefekt zu beseitigen ist.

Zielfunktion ist die Quadratsumme der Verbesserungen, die minimiert werden soll (Methode der kleinsten Quadrate). Bereits durch die Formulierung in (1) wird deutlich, daß bei den Untersuchungen stochastische Aspekte zunächst nicht einbezogen werden sollen. Vielmehr geht es in den nachfolgenden Ausführungen im Besonderen um eine geometrische Analyse des Modells, insbesondere um geometrische Besonderheiten, wobei die Wechselbeziehungen zwischen der vermittelnden und der bedingten Ausgleichung eine große Rolle spielen.

2.1 Die Geometrie eines Modells

Aus streng mathematischer Sicht stellt sich die Behandlung des Modells (1) folgendermaßen dar. Die Spalten der Designmatrix $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig und spannen einen u -dimensionalen Unterraum U des Beobachtungsraumes $\mathbb{R}^n$ auf (sie bilden eine Basis in U). Durch die Zielfunktion wird auf $\mathbb{R}^n$ (und damit auch auf $U \subset \mathbb{R}^n$) die euklidische Metrik induziert.

Die Lösung des Problems liegt nun in der Konstruktion von orthogonalen Projektoren von $\mathbb{R}^n$ auf U . Die geometrischen Eigenschaften dieser Projektion hängen bekanntlich wesentlich von der „Lage“ von U bezüglich des Beobachtungsraumes $\mathbb{R}^n$ ab (U ist in $\mathbb{R}^n$ eingebettet). Ziel der Untersuchungen ist es daher, die Geometrie von U in $\mathbb{R}^n$ zu charakterisieren und daraus entsprechende Folgerungen für das Modell (1) abzuleiten.

Bei Wahl einer Basis in U kann der (orthogonale) Projektor auf U durch eine symmetrische und idempotente Matrix $\mathbf{C}$ realisiert werden. Nimmt man die Spalten von $\mathbf{A}$ als Basis für U , so erhält man als Projektionsmatrix $\mathbf{C}$ die sogenannte Hat-Matrix

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T. \quad (2)$$

Es sei jedoch schon an dieser Stelle vermerkt, daß die Matrix $\mathbf{C}$ nicht von der Wahl der Basis in U abhängt, was später noch von Wichtigkeit sein wird. Im Rahmen der Sensitivitätsanalyse (siehe z. B. CHATTERJEE, HADI 1988) spielen die Hauptdiagonalelemente c_{ii} ($i = 1, \dots, n$) eine zentrale Rolle für Analyse Zwecke. Für sie gilt

$$0 \leq c_{ii} \leq 1. \quad (3)$$

Im Sinne der Ausgleichungsrechnung überführt die Matrix $\mathbf{C}$ die ursprünglichen Beobachtungen $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^n$ in die nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichenen Beobachtungen $\hat{\mathbf{I}} \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{C} \mathbf{I} = \hat{\mathbf{I}} \quad (4)$$

bzw. das inkonsistente System in (1) in das konsistente System

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \hat{\mathbf{I}}. \quad (5)$$

Die zu bestimmenden Parameter $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^u$ erweisen sich somit als Koordinaten der ausgeglichenen Beobachtungen bezüglich der Basis von U , die durch die Spalten von $\mathbf{A}$ gebildet wird. Für die zu bestimmenden Verbesserungen $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ erhält man mit der n -dimensionalen Einheitsmatrix $\mathbf{E}$

$$-\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{E} - \mathbf{C}) \mathbf{I}. \quad (6)$$

Auch die Verbesserungen spielen bei der Sensitivitätsanalyse eine wichtige Rolle. Die Hauptdiagonalelemente der Matrix $\mathbf{E} - \mathbf{C}$ (in der Ausgleichungsrechnung Teilredundanzen r_i genannt) widerspiegeln den Anteil der i -ten Beobachtung an der Gesamtredundanz $n - u$ (Freiheitsgrad der Ausgleichung).

Aus mathematischer Sicht stellt sich dieser Kontext folgendermaßen dar. Zu jedem u -dimensionalen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt es ein eindeutig bestimmtes orthogonales Komplement $U^\perp$, das wiederum einen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ mit der Kodimension $n - u$ darstellt.

Die Vektoren aus $U^\perp$ stehen senkrecht auf allen Vektoren von U und umgekehrt.

Statt der Projektion auf U kann selbstverständlich auch die Projektion auf $U^\perp$ betrachtet werden. Man wählt dazu eine Basis in $U^\perp$ und bildet damit eine Matrix $\mathbf{B}$ vom Format $(n, n-u)$ (das orthogonale Komplement zu $\mathbf{A}$). Die Orthogonalität der Unterräume U und $U^\perp$ drückt sich nun in folgender Matrizenrelation aus

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A} = \mathbf{0} \text{ bzw. } \mathbf{A}^T \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (7)$$

Damit geht das Modell (1) in das äquivalente Modell

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T(\mathbf{I} + \mathbf{v}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{v} &\rightarrow \min \end{aligned} \quad (8)$$

über, welches als Modell der bedingten Ausgleichung bekannt ist (WOLF, 1997).

Die Lösung des Modells (8) besteht nun in der Konstruktion von orthogonalen Projektionen von $\mathbb{R}^n$ auf $U^\perp$. Ganz analog zu (2) erhält man diese Projektionen in Matrizenform

$$\mathbf{E} - \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \quad (9)$$

und die Lösung $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ aus (6). Aus der Orthogonalität der Unterräume ergeben sich unmittelbar die bekannten Relationen

$$\mathbf{A}^T \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{B}^T(\mathbf{I} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (10)$$

die in der Ausgleichungsrechnung zur Verprobung von numerischen Ergebnissen benutzt werden. Andererseits stellen diese Relationen aber auch a-priori-Informationen dar, die über geometrische Besonderheiten bei den Beobachtungen schon vor der eigentlichen Ausgleichung wichtige Hinweise aufzeigen, wie aufgezeigt werden wird.

Im weiteren wird es nun darum gehen, geometrische Besonderheiten in den Unterräumen U bzw. $U^\perp$ aufzudecken bzw. zu erkennen. Dies wird zunächst durch transparente Beispiele dargelegt, die danach mathematisch verallgemeinert werden sollen.

Beispiel 1: Wir betrachten den Fall einer Geradenausgleichung mit $n = 5$ und $u = 2$ für das in (CHATTERJEE, HADI, 1988) angeführte Beispiel, wo diesbezüglich auch auf ältere Quellen (BEHNKEN, DRAPER, 1972, DRAPER, SMITH, 1981) hingewiesen wird.

Die Designmatrix $\mathbf{A}$ des Problems (1) sei dabei gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die fünfte Beobachtung (fünfte Zeile in $\mathbf{A}$) hat hierin einen erheblichen Einfluß auf das Ausgleichungsergebnis, denn nach Streichung dieser Zeile wird das Restdesign singulär (Spaltensingularität). Deutlich wird dies auch durch Betrachtung des orthogonalen Komplements $U^\perp$, dargestellt durch die Matrix $\mathbf{B}$ vom Format $(n, n-u)$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

die $\mathbf{B}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{A}^T \mathbf{B} = \mathbf{0}$ erfüllt. Die Matrix $\mathbf{B}$ enthält als fünfte Zeile eine Nullzeile, wobei dieser Sachverhalt unabhängig von einer speziell gewählten Basis in $U^\perp$ ist. Aus Gleichung (9) ergibt sich unmittelbar

$$r_{5j} = (\mathbf{E} - \mathbf{C})_{5j} = 0.0 \quad \text{für } j = 1, \dots, 5$$

d. h. die Teilredundanz r_{55} der fünften Beobachtung verschwindet. Somit wird diese Beobachtung von keiner der restlichen Beobachtungen kontrolliert. Aus Gleichung (6) ergibt sich weiterhin

$$\hat{v}_5 = 0.0$$

Das Verschwinden der fünften Verbesserung stellt sich unabhängig vom konkreten Beobachtungsvektor $\mathbf{l}$ ein, ist also rein geometrisch bedingt aus der Struktur des Unterraums U bzw. $U^\perp$. Ein Datenfehler in der fünften Beobachtung wird somit durch die anderen Beobachtungen nicht „aufgefangen“ und verfälscht das Ergebnis in erheblicher Weise, die fünfte Beobachtung wird zur „Restriktion“ = Bedingungsgleichung für die Unbekannten.

Die Ursache für diese geometrische Besonderheit liegt hierbei offensichtlich in der Tatsache, daß die ersten vier Beobachtungen (Zeilen in $\mathbf{A}$) den Charakter von Mehrfachbeobachtungen aufweisen.

Bezeichnet man im Modell $\mathbf{Ax} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$ mit $\mathbf{Hx} = \mathbf{w}$ die Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten $\mathbf{Hx} = \mathbf{w}$ als „äußere Restriktionen“, so können „innere Restriktionen“ im Modell der vermittelnden Beobachtungen folgendermaßen definiert werden.

Definition 1: Eine Beobachtung (i-te Zeile in $\mathbf{A}$) heiße **innere Restriktion**, falls ihre Verbesserung v_i unabhängig vom Beobachtungsvektor $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$ stets Null ist.

Folgerung 1: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1) Die i-te Zeile in $\mathbf{A}$ ist eine innere Restriktion.
- 2) In der Projektionsmatrix $\mathbf{C}$ gilt: $c_{ii} = 1$ und $c_{ij} = 0$ für $j \neq i$.
- 3) Der i-te Einheitsvektor $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ gehört zum Unterraum U , d. h. eine Beobachtungsrichtung ist im Projektionsraum enthalten: $\mathbf{e}_i \in U$.

Beweis: Es ist $-v_i = ((\mathbf{E} - \mathbf{C})\mathbf{l})_i = 0 \quad \forall \mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $(\mathbf{E} - \mathbf{C})_{ij} = 0$ für $j = 1, \dots, n$ und damit $c_{ii} = 1$ sowie $c_{ij} = 0$ für $j \neq i$. Dies ist äquivalent zu $(\mathbf{E} - \mathbf{C})\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$, also $\mathbf{C}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i$, was genau dann gilt, wenn $\mathbf{e}_i \in U$.

Folgerung 2: Eine Beobachtung im orthogonalen Komplement (j-te Zeile in $\mathbf{B}$) ist eine innere Restriktion, falls gilt:

$$r_{ji} = 0 \text{ und } r_{jj} = 1 \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ mit } i \neq j.$$

Dies ist äquivalent zu:

- 1) $v_i + l_i = 0$,
- 2) $c_{ji} = 0$ für $i = 1, \dots, n$,
- 3) $a_{ji} = 0$ für $i = 1, \dots, n$ und
- 4) $\mathbf{e}_j \in U^\perp$.

Anmerkung: Eine innere Restriktion im orthogonalen Komplement $\mathbf{B}$ entspricht in der Ausgleichsrechnung einer vollredundanten Beobachtung in der Designmatrix $\mathbf{A}$ (Nullzeile in $\mathbf{A}$).

Aus den bislang dargelegten Sachverhalten der inneren Restriktionen entstehen folgende weiterführende Überlegungen. Teilredundanzen von Beobachtungen, die sehr klein im Vergleich zu den Übrigen sind (nahe bei Null), weisen darauf hin, daß die zugehörige Beobachtung nur wenig durch die anderen Beobachtungen kontrolliert wird (z. B. High-Leverage-Points). Damit ergibt sich Frage nach einer möglichen Umkehrung dieses Umstandes.

Werden Beobachtungen mit großen Teilredundanzen im allgemeinen gut kontrolliert?

Es wird nachstehend aufgezeigt, daß dies nicht generell der Fall sein muß. Insbesondere bei der geodätischen Netzausgleichung spielen solche Aspekte eine zentrale Rolle.

Einen weiteren Zugang erhält man durch folgende Überlegungen: In Beispiel 1 wurde deutlich, daß durch Streichung einer inneren Restriktion die verbleibende Design-Matrix singulär wird. Damit erhebt sich folgerichtig die Frage, ob dieser Effekt sich auch durch die gemeinsame Streichung von mehr als nur einer Beobachtung erreichen läßt, obwohl keine dieser betreffenden Beobachtungen eine innere Restriktion an sich bildet. Dieser Umstand würde dann auch dazu führen, daß beim Verbleib einer einzigen der zu streichenden Beobachtungen diese dann zu einer inneren Restriktion werden würde.

Als Schlußfolgerung erhält man dann die Aussage, daß diese Beobachtung nur durch die schon gestrichenen (herausgelassenen) Beobachtungen kontrolliert wurde, jedoch nicht von den Übrigen. Bekannt ist auch, daß durch die Weglassung von gerade $n-u$ Beobachtungen die Verbleibenden zu inneren Restriktionen werden (vorausgesetzt, daß das verbleibende Design regulär ist), da der Freiheitsgrad verschwindet und daher keine Überbestimmung mehr vorliegt.

Der bisher dargelegte Umstand steht in engem Zusammenhang mit folgender bekannter Tatsache (siehe z. B. CHATTERJEE, HADI 1988): die Teilredundanzen sind in Bezug auf die Anzahl der Beobachtungen nicht abnehmende Funktionen. Durch Hinzufügung entsprechender Beobachtungen können sie also lediglich größere numerische Werte annehmen. Durch Streichung von Beobachtungen tritt demzufolge ein gegenläufiger Effekt ein. Damit ergibt sich wiederum die Frage, ob durch Streichung einer oder mehrerer (wenige) Beobachtungen eine innere Restriktion entstehen kann.

Vergleichbare Überlegungen lassen sich auch für das orthogonale Komplement $U^\perp$ bzw. **B** anstellen. Letztendlich führen sie auf die Fragestellung, ob sich durch Streichung von Beobachtungen im orthogonalen Komplement innere Restriktionen erzeugen lassen, oder gleichbedeutend damit vollredundante Beobachtungen in U bzw. **A** entstehen.

Interessant ist hierbei der Umstand, daß sich Streichungen im orthogonalen Komplement (bedingte Ausgleichung) äquivalent als Streichungen von Unbekannten in der vermittelnden Ausgleichung interpretieren lassen, was im weiteren noch dargelegt wird.

Beispiel 2: Gegeben sei eine Koeffizientenmatrix **A** mit 6 Beobachtungen und 3 Unbekannten und ein dazugehöriges orthogonales Komplement **B**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & -2 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

	1	2	3	4	5	6
c_{ii}	0.85000	0.51667	0.65000	0.31667	0.26667	0.40000
r_{ii}	0.15000	0.48333	0.35000	0.68333	0.73333	0.60000
$r_{ii}(1)$	0	0.33333	0.33333	0.66667	0.66667	
$r_{ii}(2)$		0.33333	0.33333	0.66667	0.66667	0
$r_{ii}(3)$	0.14634	0.36585	0.17073		0.73171	0.58536

Tabelle 1: Teilredundanzen

Tabelle 1 zeigt folgende Sachverhalte auf. Bei Streichung der 1. bzw. 6. Beobachtung (Zeilen in **A**) wird die verbleibende (korrespondierende) Beobachtung zur inneren Restriktion (Teilredundanz Null) und somit von den restlichen Beobachtungen nicht mehr kontrolliert. Der verbleibende Freiheitsgrad $(n-u) = 2$ wird auf die Beobachtungen 2 bis 5 aufgeteilt, und zwar unabhängig davon, welche der Beobachtungen 1 oder 6 gestrichen wird. Streicht man andererseits die 4. Beobachtung, so verringern sich die Teilredundanzen der 1. und 6. Beobachtung nur unwesentlich zu den Restlichen.

Streicht man dagegen beide Beobachtungen Nr. 1 und Nr. 6, so wird das Restdesign (verbleibende 4 Zeilen in $\mathbf{A}$ weisen nur noch den Rang 2 auf) singulär. Die Beobachtungen 1 und 6 bilden also eine Gruppe, die von den restlichen Beobachtungen nur ungenügend kontrolliert wird.

Man beachte jedoch, daß dieser Effekt sich weder in der Design-Matrix $\mathbf{A}$, noch an den Teilredundanzen unmittelbar aufzeigen läßt. Die Teilredundanz der 6. Beobachtung beträgt immerhin 0.60 und scheint somit gut kontrolliert.

Im orthogonalen Komplement $\mathbf{B}$ erkennt man, daß dort die Zeilen 1 und 6 linear abhängig sind.

Beispiel 3: Gegeben seien für 6 Beobachtungen und 3 Unbekannte

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{4} & -1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{4} \\ -1 & -2 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

	1	2	3	4	5	6
c_{ii}	0.73585	0.77358	0.62264	0.22642	0.26415	0.37736
r_{ii}	0.26415	0.22642	0.37736	0.77358	0.73585	0.62264

Tabelle 2: Teilredundanzen und Hauptdiagonale des orthogonalen Projektionsoperators zum Beispiel 3

In der Matrix $\mathbf{A}$ treten folgende Effekte auf: Die Streichung von zwei der Beobachtungen aus den Zeilen 1, 2 und 3 führt dazu, daß die verbleibende Beobachtung zur inneren Restriktion wird. Wie aus der Tabelle 2 ersichtlich ist, sind dies die Beobachtungen mit den größten Hauptdiagonalelementen des orthogonalen Projektionsoperators. Ebenso bilden aber auch die Beobachtungen 1, 4 und 6 eine Gruppe. Werden zwei beliebige Beobachtungen davon gestrichen, so wird die verbleibende Beobachtung zur inneren Restriktion.

Wiederum sind diese Effekte weder in der Design-Matrix $\mathbf{A}$ noch im orthogonalen Komplement $\mathbf{B}$ bzw. anhand der Teilredundanzen verifizierbar.

Beispiel 4: Gegeben sei eine Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ mit 6 Beobachtungen und 4 Unbekannten, ein dazugehöriges orthogonales Komplement $\mathbf{B}$ und die Hauptdiagonalelemente des orthogonalen Projektionsoperators $\mathbf{C}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 9 & 4 & -1 & 3 \\ 13 & 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 8 & 3 \\ 6 & 4 & 11 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -4 & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

	1	2	3	4	5	6
c_{ii}	0.83333	0.33333	0.83333	0.83333	0.33333	0.83333
r_{ii}	0.16667	0.66667	0.16667	0.16667	0.66667	0.16667

Tabelle 3: Teilredundanzen und Hauptdiagonale des orthogonalen Projektionsoperators zum Beispiel 4

Hier läßt sich nun Folgendes feststellen: die Streichung einer beliebigen Beobachtung in $\mathbf{A}$ führt zu einer Restriktion, z. B. bei Streichung der ersten Beobachtung wird die zweite Beobachtung zur inne-

ren Restriktion. Im orthogonalen Komplement **B** treten die Beobachtungen 1, 2 und 3 sowie 4, 5 und 6 jeweils als Mehrfachbeobachtungen auf. Anhand des Projektionsoperators **C** erkennt man eine weitere Besonderheit. **C** weist in diesem Fall eine Blockstruktur auf

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^2 \end{pmatrix}$$

mit $c_{11}^1 = c_{11}^2 = \frac{5}{6}$, $c_{22}^1 = c_{22}^2 = \frac{2}{6}$, und $c_{33}^1 = c_{33}^2 = \frac{5}{6}$.

Eine Verallgemeinerung der bisher aufgezeigten Effekte führt zum Begriff der latenten inneren Restriktion.

Definition 2: Eine Gruppe von k Beobachtungen (Zeilen in **A**) ($i \leq k \leq n-u$) erzeugt eine *latente innere Restriktion* k -ter Ordnung, falls nach Streichung von beliebigen $k-1$ Beobachtungen dieser Gruppe die verbleibende zur inneren Restriktion wird.

Diese Definition gilt analog für das orthogonale Komplement (Zeilen in **B**), wobei hier $1 \leq k \leq u$ ist. Der bisher verwendete Begriff der Restriktion ist in der Definition für $k = 1$ mit enthalten.

Es stellt sich nun die Frage, wie solche latente inneren Restriktionen zu erkennen sind.

Dazu sei zunächst der Spezialfall gerade einer Überbestimmung mit $n = 3$ und $u = 2$ betrachtet. Die Designmatrix kann durch zwei linear unabhängige Spaltenvektoren $\mathbf{a}^i \in \mathbb{R}^3$ dargestellt werden, und zwar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^2).$$

Damit ist der Unterraum U eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, die von den Spaltenvektoren $\mathbf{a}^1$ und $\mathbf{a}^2$ aufgespannt wird, d. h. $U = \text{span}(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{z} = x_1 \mathbf{a}^1 + x_2 \mathbf{a}^2, x_{1,2} \in \mathbb{R}\}$. Wie hinlänglich bekannt ist, kann dieselbe Ebene U auch in der sogenannten Hesse-Form (parameterfreie Form) mit Hilfe eines sogenannten Normalenvektors $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ dargestellt werden und zwar durch $\mathbf{n} \in U^\perp$ mit $U = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{n}^T \mathbf{z} = 0\}$. Es gilt:

$$\mathbf{n} = \mathbf{a}^1 \times \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \\ a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11} \\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

und damit $U^\perp = \text{span}(\mathbf{n})$.

Wie ersichtlich ist, sind die Komponenten von $\mathbf{n}$ Determinanten von 2-reihigen Untermatrizen von **A**. Es gilt der i -te Einheitsvektor $\mathbf{e}_i \in U$ genau dann, wenn $\mathbf{n}^T \mathbf{e}_i = 0 \Leftrightarrow n_i = 0$ (siehe Folgerung 1). Dies ist gleichbedeutend damit, daß die i -te Zeile in **A** eine Restriktion ist.

Von großem Interesse ist nun, wie dies auf den allgemeinen Fall $n > u \geq 1$ mit $n, u \in \mathbb{N}$ übertragen werden kann. Die Lösung findet man in einem Hilfsmittel der algebraischen Geometrie, den sogenannten Plücker-Koordinaten, die in der Literatur auch als Plücker-Graßmann-Koordinaten (VAN DER WAERDEN, 1973) bekannt sind. Diese werden nachfolgend beschrieben.

2.2 Über Plücker-Koordinaten

Im linearen Modell der vermittelnden Ausgleichung (1) wird von den Spalten der Design-Matrix **A** ein u -dimensionaler Unterraum U des $\mathbb{R}^n$ aufgespannt. Man kann deshalb die u Spaltenvektoren der Länge n als Basis in U wählen ($\text{rg } \mathbf{A} = u$)

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^u) \text{ mit } \mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^u \in \mathbb{R}^n, \quad U = \text{span}(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^u).$$

Ebenso lässt sich die Matrix $\mathbf{A}$ durch ihre Zeilenvektoren der Länge u darstellen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{pmatrix}$$

mit $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^u$. Wählt man nun u Zeilen aus $\mathbf{A}$, sei also $\{i_1, \dots, i_u\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ eine Auswahl paarweise verschiedener Indizes, so bildet

$$\mathbf{A}(i_1, \dots, i_u) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{i_1}^T \\ \mathbf{a}_{i_2}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i_u}^T \end{pmatrix}$$

eine quadratische Teilmatrix von $\mathbf{A}$. Die zugehörige u -reihige Unterdeterminante d von $\mathbf{A}$

$$d(i_1, \dots, i_u) = \det \mathbf{A}(i_1, \dots, i_u)$$

entspricht dann einer Plücker-Koordinate von U . Es gilt die folgende Aussage (VAN DER WAERDEN, 1973).

Satz 1: Die $\binom{n}{u}$ Plücker-Koordinaten von U sind homogene Koordinaten, die den Unterraum U eindeutig bestimmen.

Homogene Koordinaten sind nur bis auf einen Faktor c bestimmt und können nicht alle gleich Null sein. Die Eigenschaft der Homogenität der Plücker-Koordinaten wird deutlich, wenn man im Unterraum U einen Basiswechsel vornimmt. Dieser kann mittels einer regulären (u, u) Matrix $\mathbf{W}$ durch $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{W}$ realisiert werden. Für die neue Basis $\bar{\mathbf{A}}$ in U ergeben sich die Plücker-Koordinaten zu $\det \bar{\mathbf{A}}(i_1, \dots, i_u) = \det \mathbf{W} \cdot \det \mathbf{A}(i_1, \dots, i_u)$, sie unterscheiden sich damit von den Plücker-Koordinaten der Basis $\mathbf{A}$ nur um den konstanten Faktor $\det \mathbf{W}$.

Durch die Plücker-Koordinaten von U sind gleichzeitig die Plücker-Koordinaten von $U^\perp$ bestimmt und umgekehrt. Sei dazu $\Pi = (j_1, \dots, j_n)$ eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$. Dann gilt folgender Zusammenhang zwischen den Plücker-Koordinaten von U , gebildet aus u Zeilen von $\mathbf{A}$ und den Plücker-Koordinaten von $U^\perp$, gebildet aus $n - u$ Zeilen von $\mathbf{B}$, Beweis siehe (VAN DER WAERDEN, 1973),

$$d(j_1, \dots, j_u) = \text{sgn } \Pi \, d^\perp(j_{u+1}, \dots, j_n). \quad (11)$$

Im Beispiel 1 ist durch die Mehrfachbeobachtungen sofort ersichtlich, daß alle Plücker-Koordinaten von $\mathbf{A}$ verschwinden,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

die die fünfte Beobachtung (die Restriktion im herkömmlichen Sinne) nicht enthalten. Im orthogonalen Komplement $\mathbf{B}$ werden alle Plücker-Koordinaten zu Null, die die fünfte Beobachtung (Nullzeile) enthalten, z. B.

$$\det \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Im Beispiel 2 werden alle Determinanten der (u, u) -Teilmatrizen von $\mathbf{A}$ zu Null, die drei der Beobachtungen 2, 3, 4 und 5 enthalten, d. h. die die beiden Beobachtungen nicht enthalten, die eine latente

innere Restriktion zweiter Ordnung erzeugen. Im orthogonalen Komplement **B** verschwinden alle Plücker-Koordinaten, die die Mehrfachbeobachtungen 1 und 6 enthalten.

Im dritten Beispiel werden die Plücker-Koordinaten der Teilmatrix von **A** zu Null, die aus den Beobachtungen 4, 5 und 6 bzw. aus den Beobachtungen 2, 3 und 5 gebildet wird. Im orthogonalen Komplement **B** verschwinden die beiden Plücker-Koordinaten, die die Beobachtungen 1, 2 und 3 oder 1, 4 und 6 enthalten, also jene, die eine latente Restriktion 3. Ordnung in **A** erzeugen.

Im Beispiel 4 werden alle Determinanten der (u,u)-Teilmatrizen von **A** zu Null, die gleichzeitig die Beobachtungen 1, 2, und 3 oder 4, 5 und 6 enthalten. Im orthogonalen Komplement **B** verschwinden alle Plücker-Koordinaten, die zwei der Mehrfachbeobachtungen von 1, 2 und 3 oder aus 4, 5 und 6 enthalten.

Anhand dieser Beispiele wird deutlich, daß verschwindende Plücker-Koordinaten die Ursache für latente innere Restriktionen sind. Ziel ist deshalb nun die systematische Aufdeckung von verschwindenden Plücker-Koordinaten.

Als Hilfsmittel können dazu **Indexmengen** benutzt werden, wie sie z. B. in (FINZEL, 1994) ausführlich beschrieben worden sind.

Es sei I_1 die Menge aller Indizes derjenigen Beobachtungen, die zum Verschwinden aller Plücker-Koordinaten führt, die eine dieser Beobachtungen enthalten:

$$I_1 = \{(i): i \in \{1, \dots, n\}, d(i, N) = 0 \ \forall N \subset \{1, \dots, n\}, \text{card } N = u-1\}.$$

Es sei I_2 die Menge aller Indizes derjenigen Paare von Beobachtungen, deren Indizes paarweise verschieden sind, jeweils nicht zu I_1 gehören und zum Verschwinden aller Plücker-Koordinaten führt, die ein Paar dieser Beobachtungen enthalten:

$$I_2 = \{(i_1, i_2): i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}, i_1 \neq i_2, (i_1), (i_2) \notin I_1, d(i_1, i_2, N) = 0 \ \forall N \subset \{1, \dots, n\}, \text{card } N = u-2\}.$$

Allgemein sei I_m die Menge aller Gruppen von m ($2 \leq m \leq u$) Beobachtungen, deren Indizes paarweise verschieden sind, jeweils nicht zu I_1 bis I_{m-1} gehören und zum Verschwinden aller Plücker-Koordinaten führt, die eine Gruppe von m dieser Beobachtungen enthalten:

$$I_m = \{(i_1, \dots, i_m): i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}, \text{ paarweise verschieden}, \forall (i'_1, \dots, i'_\mu) \in I_\mu, 1 \leq \mu < m: \{i'_1, \dots, i'_\mu\} \not\subset \{i_1, \dots, i_m\}, d(i_1, \dots, i_m, N) = 0 \ \forall N \subset \{1, \dots, n\}, \text{card } N = u-m\}.$$

Nach (FINZEL, 1994) kann eine äquivalente Charakterisierung vorgenommen werden.

Satz 2: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1) $(i_1, \dots, i_m) \in I_m$
- 2) Die Matrix (Teilmatrix von **A**)

$$A(i_1, \dots, i_m) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{i_1}^T \\ \mathbf{a}_{i_2}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i_m}^T \end{pmatrix}$$

ist vom Rang $m-1$ und $m-1$ beliebige Zeilen sind linear unabhängig.

- 3) Die Dimension des Durchschnitts gebildet aus dem Unterraum $U^\perp$ und dem Raum, der von den m Einheitsvektoren aufgespannt wird, ist $\dim(U^\perp \cap \text{span}\{\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_m}\}) = 1$, und falls der Vektor **w** in diesem Durchschnitt (außer dem trivialen Nullvektor) enthalten ist, also $\mathbf{w} \in U^\perp \cap \text{span}\{\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_m}\} \setminus \{\mathbf{0}\}$, dann gilt: $w_i \neq 0 \ \forall i \in \{i_1, \dots, i_m\}$.

Folgerung 3: Analoge Indexmengen können für $U^\perp$ ($\dim U^\perp = n-u$) aufgestellt werden:

$$J_m \text{ mit } 1 \leq m \leq n-u.$$

Satz 3:

- 1) Zur Indexmenge J_m gehören die Indizes von m Beobachtungen ($1 \leq m \leq n-u$) des orthogonalen Komplements genau dann, wenn die Zeilen $j_1, \dots, j_m$ eine latente Restriktion m -ter Ordnung in $\mathbf{A}$ bilden.
- 2) Ebenso gilt $(i_1, \dots, i_m) \in I_m$ ($1 \leq m \leq u$) genau dann, wenn die Zeilen $i_1, \dots, i_m$ eine latente Restriktion m -ter Ordnung in $\mathbf{B}$ bilden.

Beweis: 1) Aus 3) in Satz 2 folgt, daß es einen Vektor $\mathbf{w} \in U$ gibt mit $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^m \alpha_{j_i} \mathbf{e}_{j_i}$, wobei alle $\alpha_{j_i} \neq 0$ sind. $\mathbf{w}$ kann dann dargestellt werden als

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix},$$

wobei $w_i = 0$ ist, genau dann, wenn $i \notin \{j_1, \dots, j_m\}$ ist. Durch Basistausch kann $\mathbf{w}$ in einer Matrix $\bar{\mathbf{A}}$ realisiert werden. Durch Streichen von beliebigen $m-1$ Zeilen der Gruppe $\{j_1, \dots, j_m\}$ entsteht stets eine Spalte mit genau einem Nichtnullelement, also eine innere Restriktion.

2) Für latente Restriktionen m -ter Ordnung im orthogonalen Komplement vollzieht sich der Beweis analog 1).

Für die oben beschriebenen Indexmengen ergibt sich nun im Einzelnen

- I_1 entspricht einer Nullzeile in $\mathbf{A}$ (= Vollredundanz in $\mathbf{A}$ und Restriktion in $\mathbf{B}$),
- J_1 entspricht einer Nullzeile in $\mathbf{B}$ (= Vollredundanz in $\mathbf{B}$ und Restriktion in $\mathbf{A}$),
- I_2 entspricht einer Mehrfachbeobachtung in $\mathbf{A}$ (= latente Restriktion 2. Ordnung in $\mathbf{B}$),
- J_2 entspricht einer Mehrfachbeobachtung in $\mathbf{B}$ (= latente Restriktion 2. Ordnung in $\mathbf{A}$),
- I_3 entspricht einer latenten Restriktion 3. Ordnung in $\mathbf{B}$,
- J_3 entspricht einer latenten Restriktion 3. Ordnung in $\mathbf{A}$,

usw.

Für das Beispiel 1 mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sollen jetzt die Indexmengen angegeben werden. In $\mathbf{A}$ gibt es keine Beobachtung, die zum Verschwinden aller 2-reihigen Unterdeterminanten führt, die diese eine Beobachtung enthalten. Deshalb ist I_1 gleich der leeren Menge, also $I_1 = \emptyset$. In $\mathbf{B}$ gibt es genau eine Beobachtung, nämlich die fünfte Beobachtung, die zum Verschwinden aller 3-reihigen Unterdeterminanten führt, die diese Beobachtung enthalten. Somit enthält die Indexmenge J_1 als einziges Element die 5, also ist $J_1 = \{5\}$.

In der Matrix $\mathbf{A}$ verschwinden alle Plücker-Koordinaten, wenn man aus den ersten vier Zeilen zwei beliebige Beobachtungen auswählt. Die Indexmenge I_2 enthält die Indizes aller Paare dieser Beobachtungen, damit ist $I_2 = \{(1, 2, 3, 4)\}$. In $\mathbf{B}$ läßt sich kein Paar von Beobachtungen finden, so daß alle 3-reihigen Unterdeterminanten verschwinden, die dieses Paar von Beobachtungen enthalten. Es lassen sich auch keine drei Beobachtungen aus $\mathbf{B}$ auswählen, so daß alle Plücker-Koordinaten (auf Grund der Dimensionen ist dies jeweils nur eine) verschwinden, die diese drei Beobachtungen enthalten. Somit sind die Indexmengen J_2 und J_3 leer, $J_2 = J_3 = \emptyset$.

Die Indexmengen für die anderen Beispiele lauten wie folgt:

- Bsp. 2: **A:** $I_1 = I_2 = \emptyset, \quad I_3 = \{(2, 3, 4, 5)\}$
 B: $J_1 = \emptyset, \quad J_2 = \{(1, 6)\}, \quad J_3 = \emptyset$
- Bsp. 3: **A:** $I_1 = I_2 = \emptyset, \quad I_3 = \{(4, 5, 6), (2, 3, 5)\}$
 B: $J_1 = J_2 = \emptyset, \quad J_3 = \{(1, 2, 3), (1, 4, 6)\}$
- Bsp. 4: **A:** $I_1 = I_2 = \emptyset, \quad I_3 = \{(4, 5, 6), (1, 2, 3)\}, \quad I_4 = \emptyset$
 B: $J_1 = \emptyset, \quad J_2 = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}$

Aus den obigen Beispielen wird weiterhin ersichtlich, daß die Indexmengen von **A** und **B** nicht unabhängig sind, sondern sich sogar unmittelbar bedingen. Die Ursache hierfür liegt in der Beziehung (11) zwischen den Plücker-Koordinaten für U und $U^\perp$. Wir erläutern dies kurz anhand von Beispiel 2: Aus $J_2 = \{(1, 6)\}$ folgt, daß alle Plücker-Koordinaten von **A** verschwinden, die die Beobachtungen 1 und 6 nicht enthalten, also $I_3 = \{(2, 3, 4, 5)\}$ (beachte, I_3 besteht aus all den Dreierkombinationen von $(2, 3, 4, 5)$).

Der Nachteil der Verwendung von Plücker-Koordinaten ist der praktisch nicht vertretbare hohe Aufwand, um diese zu berechnen. Von großem Interesse ist es daher, ob es eine numerisch günstigere Möglichkeit gibt, die Indexmengen und damit die verschwindenden Plücker-Koordinaten zu bestimmen. Die Lösung bietet sich in der im folgenden Abschnitt dargestellten Normalform.

2.3 Erkennung innerer latenter Restriktionen anhand der Normalform

In (JURISCH, KAMPMANN, 1998) wurde der Begriff der Normalform eingeführt und wichtige Eigenschaften dieser Normalform aufgezeigt. Im weiteren wird dargelegt, wie Zusammenhänge zwischen der Normalform und den Plücker-Koordinaten bzw. den Indexmengen, die den inneren latenten Restriktionen entsprechen, hergestellt werden können.

Satz 4: In jedem u -dimensionalen Unterraum U des $\mathbb{R}^n$ gibt es eine Basis der Form:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_u^T \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{a}}_{i_j} = \mathbf{e}_{i_j} \quad j = 1, \dots, u. \quad (12)$$

Die Zeilen von $\bar{\mathbf{A}}$ beinhalten die Zeilen einer u -dimensionalen Einheitsmatrix.

Beweis: Es sei U durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{pmatrix}$$

dargestellt. Da $\text{rg } \mathbf{A} = u$ vorausgesetzt wurde, gibt es in $\mathbf{A}$ u linear unabhängige Zeilen. Diese seien $\mathbf{a}_{i_j}^T, j = 1, \dots, u$. Faßt man diese Zeilen zu einer (u, u) Matrix $\mathbf{W}$ zusammen, d. h.

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{i_1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i_u}^T \end{pmatrix} \quad (13)$$

und führt einen Basiswechsel in U durch Rechtsmultiplikation mit $\mathbf{W}^{-1}$ durch, so ergibt sich: $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{W}^{-1}$, wobei $\bar{\mathbf{A}}$ die durch (12) vorgegebene Eigenschaft besitzt.

Folgerung 4: Durch Zeilenvertauschung in $\mathbf{A}$ kann stets erreicht werden, daß gilt:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{A}} \end{pmatrix} \quad (14)$$

mit der (u, u) Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ und der $(n - u, u)$ Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$. Die notwendigen Zeilenvertauschungen lassen sich dabei durch eine Permutation der Menge $\{1, \dots, n\}$ darstellen:

$$\{i_1, \dots, i_n\} = \Pi \{1, \dots, n\} \quad (15)$$

Die u Beobachtungen, die den ersten u Indizes entsprechen, also zur Erzeugung der Einheitsmatrix in (14) dienen, werden wir nachstehend als **Beobachtungsbasis** bezeichnen, mit anderen Worten: diese Beobachtungen bilden gleichfalls eine Basis im u -dimensionalen Zeilenraum von $\mathbf{A}$. Neben dem Modell (1) kann nun in äquivalenter Weise das Modell

$$\bar{\mathbf{A}} \mathbf{y} = \bar{\mathbf{I}} + \mathbf{w} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{w} \rightarrow \min \quad (16)$$

(wobei $\bar{\mathbf{I}} = \Pi(\mathbf{I})$ den entsprechend der Permutation (15) umsortierten Beobachtungsvektor darstellt) betrachtet werden. Die Äquivalenz der Modelle (1) und (16) drückt sich dabei in folgendem Sachverhalt aus:

Folgerung 5: Für die Lösungen $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}$ aus (1) und $\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{w}}$ aus (16) gilt

$$\Pi(\hat{\mathbf{v}}) = \hat{\mathbf{w}}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{W}^{-1} \hat{\mathbf{y}} \quad (17)$$

Beweis: siehe (JURISCH, KAMPMANN, 1998).

Die Modelle (1) und (16) besitzen also dieselben Verbesserungen, die entsprechenden Parameter hängen über die Basistransformation zusammen. In (JURISCH, KAMPMANN, 1998) wurde auch der wichtige Umstand beschrieben, daß man mit der Normalform $\bar{\mathbf{A}}$ für U unmittelbar eine Basis für das orthogonale Komplement $U^\perp$ besitzt:

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \\ -\mathbf{E} \end{pmatrix} \quad (18)$$

mit der $(n-u, n-u)$ -dimensionalen Einheitsmatrix $\mathbf{E}$. Man beachte die offensichtliche Tatsache, daß

$$\bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$$

gilt. Zusätzlich gilt der Umstand, daß die Indexvertauschungen in $\mathbf{A}$, die durch (15) beschrieben wurden, in gleicher Weise auf das ursprüngliche orthogonale Komplement $\mathbf{B}$ anzuwenden sind. Die Zeilen von $\mathbf{B}$, die der Matrix $\mathbf{E}$ in (18) entsprechen, bilden also eine Beobachtungsbasis im orthogonalen Komplement. Damit ergibt sich der nachstehende Sachverhalt:

Satz 5: Sei $\{i_1, \dots, i_n\} = \Pi \{1, \dots, n\}$ eine Permutation. Dann gilt: $\{i_1, \dots, i_u\}$ bildet eine Beobachtungsbasis in $U \Leftrightarrow \{i_{u+1}, \dots, i_n\}$ bildet eine Beobachtungsbasis in $U^\perp$.

Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß mit u linear unabhängigen Zeilen aus $\mathbf{A}$ die entsprechenden komplementären Zeilen aus $\mathbf{B}$ auch linear unabhängig sind und umgekehrt. Aus (10) und der Tatsache, daß die Modelle (1) und (16) gleiche Verbesserungen aufweisen, ergibt sich unmittelbar folgende Beziehung:

$$\mathbf{w}^1 = -\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{w}^2 \Leftrightarrow \mathbf{w}^2 + \bar{\mathbf{I}}^2 = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{w}^1 + \bar{\mathbf{I}}^1) \quad (19)$$

Hierin sind $\mathbf{w}^1$ und $\bar{\mathbf{I}}^1$ die Komponenten von $\mathbf{v}$, $\mathbf{l}$, die der Beobachtungsbasis von $\mathbf{A}$ entsprechen sowie $\mathbf{w}^2$ und $\bar{\mathbf{I}}^2$ diejenigen in der komplementären Beobachtungsbasis in $\mathbf{B}$. Zunächst gilt der nachstehende Umstand:

Satz 6: Die Zeilen $\{i_1, \dots, i_u\}$ aus $\mathbf{A}$ bilden genau dann eine Beobachtungsbasis, falls ihre Plücker-Koordinate nicht verschwindet,

$$d(i_1, \dots, i_u) \neq 0. \quad (20)$$

Wichtig in diesem Zusammenhang ist auch nachstehende Aussage.

Satz 7: Jedes Element $\tilde{a}_{ij}$ in der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ aus (14) stellt eine Plücker-Koordinate dar.

Beweis: Wir indizieren die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ durch $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij})_{i=u+1, \dots, n}^{j=1, \dots, u}$. Wählt man nun ein Element $\tilde{a}_{ij}$ aus $\tilde{\mathbf{A}}$ aus, dann gilt:

$$d(1, \dots, j-1, j+1, \dots, u, i) = (-1)^{u+j} \tilde{a}_{ij} \quad i = u+1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, u. \quad (21)$$

d. h. die entsprechende Plücker-Koordinate ergibt sich, indem man die i -te Zeile aus $\tilde{\mathbf{A}}$ und alle Zeilen aus der Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ außer der j -ten Zeile auswählt. Dies ist eine direkte Folge aus dem Entwicklungssatz von Laplace.

Folgerung 6: Jede Plücker-Koordinate, die von mehr als einer Zeile von $\tilde{\mathbf{A}}$ erzeugt wird, läßt sich als Funktion der $\tilde{a}_{ij}$ darstellen.

Auch dies ergibt sich durch sukzessive Anwendung des Entwicklungssatzes von Laplace. Die entstehenden Relationen zwischen den Plücker-Koordinaten werden in der Literatur auch als Plückerrelationen bezeichnet (VAN DER WAERDEN, 1973).

Die Spalten der Normalform in $\bar{\mathbf{A}}$ bzw. $\bar{\mathbf{B}}$ bilden eine spezielle Basis in U bzw. $U^\perp$, die in der Literatur auch als Plücker-Graßmann-Basis bezeichnet wird (VAN DER WAERDEN, 1973). Insbesondere erkennt man an Null-Elementen in $\tilde{\mathbf{A}}$ entsprechende verschwindende Plücker-Koordinaten, wodurch eine Verbindung zu den Indexmengen bzw. den latenten Restriktionen hergestellt werden kann. Genauer läßt sich dies folgendermaßen ausdrücken:

Satz 8: Die Zeilen $\{i_1, \dots, i_m\}$ von $\mathbf{A}$ bilden eine latente innere Restriktion der Ordnung m genau dann, wenn in jeder Beobachtungsbasis von $\mathbf{A}$ mindestens eine dieser Beobachtungen enthalten sein muß.

Beweis: Die Zeilen $\{i_1, \dots, i_m\}$ von $\mathbf{A}$ stellen genau dann eine latente innere Restriktion dar, falls die mit diesen Indizes gebildete Teilmatrix aus dem orthogonalen Komplement $\mathbf{B}$ den Rang $m-1$ besitzt und beliebige $(m-1)$ Zeilen linear unabhängig sind. Demzufolge können in jeder Beobachtungsbasis von $\mathbf{B}$ nur höchstens $(m-1)$ dieser Indizes auftreten. Die Aussage ergibt sich nun unmittelbar aus der Komplementarität der Beobachtungsbasen in $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.

Durch Anwendung von Satz 8 auf die Normalform ergibt sich nun eine effektive Möglichkeit, latente Restriktionen in $\mathbf{A}$ aufzudecken.

Satz 9: Sei $\{i_1, \dots, i_m\}$ eine latente Restriktion in $\mathbf{A}$ und die Zeile i_1 in der Beobachtungsbasis zur Erzeugung von $\bar{\mathbf{A}}$ enthalten, die Zeilen $i_2, \dots, i_m$ nicht (sie erzeugen Zeilen in $\tilde{\mathbf{A}}$). Dann sind alle Elemente der i_1 -ten Spalte in $\tilde{\mathbf{A}}$ Null, die nicht zu den Indizes $i_2, \dots, i_m$ gehören.

Beweis: Wie in Beweis von Satz 8 bilden wir die entsprechende Teilmatrix aus $\mathbf{B}$. Diese enthält $m-1$ Zeilen der Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ und eine Zeile aus $\tilde{\mathbf{A}}^T$. Die Aussage des Satzes ergibt sich jetzt direkt aus den Eigenschaften dieser Teilmatrix nach Satz 2.

Wir vermerken ausdrücklich, daß der Umkehrschluß, nämlich aus Nullelementen in den Spalten von $\tilde{\mathbf{A}}$ auf latente Restriktionen zu schließen nur in soweit richtig ist, daß die hiernach ermittelten latenten Restriktionen noch in latente Restriktionen niedrigerer Ordnung zerfallen können.

Selbstverständlich lassen sich die obigen Darlegungen auch auf Restriktionen im orthogonalen Komplement $\mathbf{B}$ übertragen. Diese zeigen sich dann anhand der Nullelemente der Spalten von $\tilde{\mathbf{A}}^T$, also den Zeilen von $\tilde{\mathbf{A}}$.

Zum Zwecke der transparenten Darlegung der beschriebenen Effekte werden hier die Beispiele untersucht.

Beispiel 1:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man erkennt unmittelbar, daß jede Beobachtungsbasis $\{i_1, i_2\}$ in $\mathbf{A}$ die fünfte Zeile (Beobachtung) enthalten muß. Umgekehrt enthält keine denkbare Beobachtungsbasis in $\mathbf{B}$ die fünfte Zeile. Wählt man etwa $\{1, 5\}$ als Beobachtungsbasis aus, so ergibt sich:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

so daß anhand der Nullelemente in der zweiten Spalte von $\bar{\mathbf{A}}$ sofort die fünfte Beobachtung als Restriktion erkannt wird (die zweite Spalte von $\tilde{\mathbf{A}}$ enthält lediglich Nullelemente).

Beispiel 2:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & -2 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wählt man als Beobachtungsbasis $\{1, 2, 3\}$, so erhält man

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und erkennt die latente Restriktion (1,6) der Ordnung 2 anhand der Nullelemente in der ersten Spalte von $\bar{\mathbf{A}}$. Würde man jedoch als Beobachtungsbasis $\{1,2,6\}$ wählen, so ergibt sich

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d. h. die latente Restriktion (1,6) zeigt sich nicht mehr anhand von Nullelementen in $\tilde{\mathbf{A}}$, sondern durch die paarweise lineare Abhängigkeit der Spalte 1 und Spalte 3 in $\tilde{\mathbf{A}}$ bzw. der linearen Abhängigkeit der Zeilen 1 und 3 im orthogonalen Komplement $\bar{\mathbf{B}}$.

Beispiel 3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{4} & -1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{4} \\ -1 & -2 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Anhand der Indexmengen erkennt man die latenten Restriktionen (1,2,3) und (1,4,6). Wählt man als Beobachtungsbasis z. B. $\{1,2,3\}$ so ergibt sich

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die latente Restriktion (1,4,6) zeigt sich in der ersten Spalte von $\bar{\mathbf{A}}$, weil nur die Beobachtung Nr. 1 in der Beobachtungsbasis vorhanden ist. Die latente Restriktion (1,2,3) zeigt sich allerdings nicht direkt. Sie äußert sich jedoch in Form von linearen Abhängigkeiten in $\tilde{\mathbf{A}}$ (die Summe der drei Spalten in $\tilde{\mathbf{A}}$ erzeugt den Nullvektor). Beide latenten Restriktionen würden sich nur dann direkt zeigen, wenn man als Beobachtungsbasis etwa $\{3,4,5\}$ wählen würde.

Folgerung 7: Enthält die Matrix $\mathbf{A}$ insgesamt u latente Restriktionen, so zeigt sich dies stets in der Normalform anhand von Nullelementen.

Beweis: Da jede Beobachtungsbasis mindestens eine der latenten Restriktionen enthalten muß, jedoch nur u Beobachtungen dazu gehören, muß von jeder latenten Restriktion genau eine in der Beobachtungsbasis enthalten sein. Die Aussage folgt damit aus Satz 9.

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde davon ausgegangen, daß durch Streichung einer gewissen Anzahl von Beobachtungen aus dem Design $\mathbf{A}$ eine verbleibende Beobachtung zur Restriktion wird. Das folgende Beispiel zeigt jedoch, daß dabei auch mehr als eine Restriktion entstehen kann.

Beispiel 5:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Streichung der letzten Beobachtung werden die erste und die zweite Beobachtung zur Restriktion. Anhand der Indexmengen erhält man folgende latente Restriktion in Beispiel 5: (1,5) und (2,5), die über die gemeinsame Beobachtung 5 miteinander verbunden (verkettet) sind. Dies führt nun zur folgenden Verallgemeinerung:

Definition 3: Mehrere latente innere Restriktionen der Ordnung m heißen verkettet, falls sie $(m-1)$ gemeinsame Indizes enthalten.

Folgerung 8: Es möge eine Gruppe von k latenten inneren Restriktionen der Ordnung m existieren. Durch entsprechende Zeilen- und Spaltenvertauschungen in der Designmatrix $\mathbf{A}$ kann dann stets erreicht werden, daß in einer Normalform zu $\mathbf{A}$ gilt:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{A}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{A}}_{11} (m-1, k) \quad (22)$$

Beweis: Wir wählen eine Beobachtungsbasis so, daß die gemeinsamen Indizes, die zur Verkettung führen, nicht darin enthalten sind. Demzufolge gehört zur Beobachtungsbasis von jeder dieser verketteten latenten Restriktionen genau eine zur Beobachtungsbasis. Die Struktur (22) ergibt sich damit aus Satz 9.

Folgerung 8 gestattet nun auch eine Erkennung latenter innerer Restriktionen schon anhand des ursprünglichen Designs von $\mathbf{A}$.

Folgerung 9: Die Design-Matrix $\mathbf{A}$ weise nachstehende Blockstruktur auf (eventuell erst nach entsprechender Zeilen- und Spaltenvertauschung)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}_{11} (n_1, u_1), \quad \text{rg } \mathbf{A}_{22} = u_2 = u - u_1 \quad (23)$$

Dann gibt es u_1 verkettete, latente innere Restriktionen höchstens der Ordnung $(n_1 - u_1 + 1)$.

Beweis: Für die Teilmatrix $\mathbf{A}_{11}$ in (23) gilt: $\text{rg } \mathbf{A}_{11} = u_1$, da stets $\text{rg } \mathbf{A} = u$ vorausgesetzt wird.

Die Erzeugung der Normalform $\bar{\mathbf{A}}$ kann nun in zwei aufeinanderfolgenden Schritten durchgeführt werden. Zunächst werde durch die ersten u_1 Spalten in $\mathbf{A}$ eine (u_1, u_1) Einheitsmatrix $\mathbf{E}_1$ erzeugt und damit folgendes Teilergebnis erzielt:

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{A}}_{11}(n_1 - u_1, u_1) \quad (24)$$

Aufgrund von $\text{rg } \mathbf{A}_{22} = u_2$ kann dieser Prozeß nun für die letzten u_2 Spalten von $\bar{\mathbf{A}}_1$ durchgeführt werden, wobei sich die ersten u_1 Spalten nicht mehr ändern. Durch entsprechende Zeilenvertauschungen erhält man:

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 \\ \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Die Aussage ergibt sich damit aus Folgerung 8.

Die Aussage von Folgerung 9 stellt dabei eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von (TUCHSCHE-RER, 1995) dar, worin der Spezialfall $n_1 = u_1$ dargestellt wurde. Man beachte, daß hierbei die Bedingung $\text{rg } \mathbf{A}_{22} = u_2$ automatisch wegen $\text{rg } \mathbf{A} = u$ erfüllt ist.

In konsequenter Fortführung der bisherigen Überlegungen betrachten wir das schon weiter oben angeführte Beispiel 4:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 9 & 4 & -1 & 3 \\ 13 & 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 8 & 3 \\ 6 & 4 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

Wie schon weiter oben beschrieben wurde, führt hierbei die Streichung einer beliebigen Beobachtung dazu, daß eine andere verbleibende Beobachtung zur Restriktion wird. Die Ursache hierfür erkennt man sofort in der Normalform:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Streichung der zweiten Beobachtung führt dazu, daß die Beobachtungen 1 und 3 zu Restriktionen werden (analog für die 5. Beobachtung, dann werden die 4. und die 6. zu Restriktionen). Im orthogonalen Komplement $\bar{\mathbf{B}}$ erweisen sich die Beobachtungen 1, 2 und 3 sowie 4, 5 und 6 als Mehrfachbeobachtungen. Offensichtlich gibt es zwei Gruppen verketteter, latenter innerer Restriktionen, nämlich

- 1) (2,3), (2,1)
- 2) (5,4), (5,6)

Die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ weist eine Blockstruktur mit zwei komplementären Nullblöcken auf. Offenbar kann diese Blockstruktur durch Basistausch in der Beobachtungsbasis nicht zerstört werden, da ein solcher Tausch nur innerhalb der Beobachtungsgruppen $\{1,2,3\}$ bzw. $\{4,5,6\}$ erfolgen kann. Letztlich verweisen wir nochmals auf die Tatsache, daß der orthogonale Projektor $\mathbf{C}$ ebenfalls eine entsprechende Blockstruktur aufweist. Dies bedeutet jedoch, daß es sich in diesem Fall um zwei völlig unabhängige Ausgleichungsprozesse zwischen den Beobachtungen 1, 2, 3 bzw. 4, 5, 6 handelt.

Wir wollen nun diesen Sachverhalt verallgemeinern. Wir betrachten zu diesem Zweck den Spezialfall (22), der dem Zerfall der Design-Matrix $\mathbf{A}$ entspricht.

Folgerung 10: Die Design-Matrix $\mathbf{A}$ besitze (gegebenenfalls nach entsprechender Zeilen- und Spaltenvertauschung) folgende Struktur:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \quad (26)$$

mit spaltenregulären Blöcken $\mathbf{A}_{11}$ (n_1, u_1), $\mathbf{A}_{22}$ (n_2, u_2):

$$n_1 \geq u_1, \quad n_2 \geq u_2, \quad n_1 + n_2 = n, \quad u_1 + u_2 = u.$$

Dann weisen sowohl die Normalgleichungen als auch der orthogonale Projektor eine entsprechende Blockstruktur auf:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^T \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^T \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{11}(n_1, n_1), \quad \mathbf{C}_{22}(n_2, n_2) \quad (27)$$

Die Aussage von Folgerung 10 stellt eine bekannte Tatsache dar und ergibt sich durch direkte Berechnung von $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{C}$.

Das Beispiel 4 zeigt jedoch, daß sich diese Blockstruktur der Form (26) nicht automatisch (als Folge der äußeren Geometrie der Ausgleichung) aufzeigt. Der nachstehende Satz zeigt, daß sich diese Eigenschaft anhand einer beliebig gewählten Normalform aufzeigen läßt.

Satz 10: Der orthogonale Projektor $\mathbf{C}$ weist genau dann eine Blockstruktur der Form (27) auf, wenn in einer Normalform eine analoge Blockstruktur in $\tilde{\mathbf{A}}$ auftritt:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{A}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{A}}_{11}(n_1 - u_1, u_1), \quad \tilde{\mathbf{A}}_{22}(n_2 - u_2, u_2) \quad (28)$$

Beweis: Die erste Behauptung in Satz 10 (Blockstruktur des Projektors $\mathbf{C}$) ergibt sich aus Folgerung 10 und der Tatsache, daß die Blockstruktur in (28) ein Spezialfall von (26) ist. Wir setzen nun die Gestalt (27) für $\mathbf{C}$ voraus. Aus der Symmetrie und der Idempotenz von $\mathbf{C}$ ergibt sich unmittelbar:

$$\mathbf{C}_{11}^T = \mathbf{C}_{11}, \quad \mathbf{C}_{22}^T = \mathbf{C}_{22}, \quad \mathbf{C}_{11}^2 = \mathbf{C}_{11}, \quad \mathbf{C}_{22}^2 = \mathbf{C}_{22}. \quad (29)$$

Aufgrund von (29) läßt sich der Projektor $\mathbf{C}$ in die Summe zweier Projektoren zerlegen:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22} \end{pmatrix}$$

Damit gilt weiterhin: $\text{sp } \mathbf{C}_1 = u_1$, $\text{sp } \mathbf{C}_2 = u_2$ mit $u_1 + u_2 = u$. Die Projektoren $\mathbf{C}_1$ und $\mathbf{C}_2$ projizieren den $\mathbb{R}^n$ auf einen u_1 - bzw. u_2 -dimensionalen Unterraum U_1 bzw. U_2 , die sich als direkte, orthogonale Zerlegung von U interpretieren lassen. Aus der Invarianz der Unterräume bezüglich der Projektoren ergibt sich bei entsprechender Blockung der Matrix $\mathbf{A}$ gemäß:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}_{11}(n_1, u_1), \quad \mathbf{A}_{22}(n_2, u_2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{21} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{21} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_{21} = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{22} \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_{12} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

und somit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

Die entsprechende Blockstruktur (28) in der Normalform ergibt $\bar{\mathbf{A}}$ sich nun durch zweimalige Anwendung von Folgerung 9. Die Tatsache, daß dies unabhängig von der gewählten Beobachtungsbasis zur Erzeugung der Normalform ist, erkennt man sofort daran, daß bei einem möglichen Basistausch in (28) die Blockstruktur erhalten bleibt.

Zum Abschluß noch einige Ausführungen über den Zusammenhang zwischen latenten inneren Restriktionen und dem sogenannten Freiheitsgrad einer Ausgleichung. Dazu werden zunächst folgende bekannte Tatsachen verifiziert. Restriktionen tragen nicht zur Ausgleichung bei, so daß der Freiheitsgrad um die Anzahl der vorhandenen Restriktionen vermindert werden muß. Ebenso verringert sich der Freiheitsgrad beim Streichen einer gewissen Anzahl von Beobachtungen entsprechend. Streicht man nun $(m-1)$ Beobachtungen einer latenten Restriktion m -ter Ordnung, so entsteht bekanntlich eine Restriktion, so daß der verbleibende Freiheitsgrad nicht $(n-u) - (m-1)$, sondern $(n-u) - m$ entsteht. Dieser Umstand eines verkleinerten Freiheitsgrades wird durch das Vorhandensein verketteter latenter Restriktionen noch verstärkt.

Analoge Betrachtungen können nun auch für das orthogonale Komplement aufgestellt werden. Wir betrachten dazu entsprechende Normalformen:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{A}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \\ -\mathbf{E} \end{pmatrix}$$

$\tilde{\mathbf{A}}_R^T$ sei die Matrix, die durch Streichung einer Zeile in $\tilde{\mathbf{A}}^T$ entsteht (will man eine Beobachtung (Zeile) streichen, die der Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ in entspricht, so ist diese zunächst durch Basistausch in $\tilde{\mathbf{A}}^T$ einzutauschen, was stets möglich ist, falls diese Beobachtung keine Restriktion in $\bar{\mathbf{B}}$ darstellt). Damit ergibt sich nun durch Übergang zum orthogonalen Komplement:

$$\bar{\mathbf{B}}_R = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_R^T \\ -\mathbf{E} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{A}}_R = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{A}}_R \end{pmatrix}$$

Die Normalform $\tilde{\mathbf{A}}_R$ entsteht jedoch aus $\bar{\mathbf{A}}$ durch Streichung einer Spalte in $\bar{\mathbf{A}}$ (Unbekannte im Modell (16)) und Streichung der entstehenden vollredundanten Beobachtung. Der Freiheitsgrad bleibt dabei erhalten. Analoges gilt für das Streichen mehrerer Beobachtungen im orthogonalen Komplement. Stehen jedoch die gestrichenen Beobachtungen im Zusammenhang mit latenten Restriktionen im orthogonalen Komplement, so verringert sich der Freiheitsgrad um mindestens 1.

2.4 Zusammenhänge zwischen multilinearer Graßmann-Algebra, Plücker-Koordinaten und Normalform

Wir verdanken Herrn Prof. Dr. mult. Erik W. Grafarend wertvolle Hinweise und Bemerkungen, die auf wichtige Zusammenhänge zwischen der von uns entwickelten Theorie und der multilinearen Graßmann-Algebra verweisen. Wir möchten uns auch an dieser Stelle nochmals für die wertvollen Anregungen bedanken. Im Folgenden sollen diese Zusammenhänge skizzenhaft aufgedeckt werden. Wir beginnen zunächst mit der Einführung der grundlegenden Begriffe dieser algebraischen Theorie.

Definition 4: Unter dem Graßmann-Bündel $G(n,u)$ über dem $\mathbb{R}^n$ verstehe man die Menge aller u -dimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^n$:

$$G(n,u) = \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid \dim U = u\} \quad 0 \leq u \leq n \quad (30)$$

Eine fundamentale Beziehung zwischen den Graßmann-Bündeln $G(n,u)$ und $G(n,n-u)$ ist durch die Dualisierung (auch Hodge-Dualisierung, Sternoperator genannt) gegeben. Sie beruht auf der Tatsache, daß sich jedem u -dimensionalen Unterraum $U \in G(n,u)$ ein sogenannter Dualraum $U^* \in G(n,n-u)$ in eindeutiger Weise zuordnen läßt. Dieser Dualraum U^* ist jedoch nichts anderes als das orthogonale Komplement $U^\perp$ zu U . Wir vermerken, daß auch bei unseren Untersuchungen dieses orthogonale Komplement von entscheidender Bedeutung ist. Aus algebraischer Sicht vermittelt die Dualisierung eine Bijektion zwischen $G(n,u)$ und $G(n,n-u)$.

- $G^*(n,u) = G(n,n-u)$
 - $U \in G(n,u) \Leftrightarrow U^* = U^\perp \in G(n,n-u)$
- (31)

Eine weitere wichtige Begriffsbildung erzeugt einen Zusammenhang zwischen den Vektoren des Raumes $\mathbb{R}^n$ und den Elementen der Graßmann-Bündel. Dabei handelt es sich um das sogenannte Keilprodukt (auch äußeres, schiefes oder Graßmann-Produkt genannt). Aus Platzgründen verzichten wir hier auf eine tiefgreifende algebraische Einführung des Keilprodukts (siehe z. B. NEUTSCH, 1995), sondern beschränken uns auf einige wesentliche Zusammenhänge.

Sei dazu $U \in G(n,u)$ gegeben. Wir wählen nun eine Basis in U , die aus u linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^u \in U$ besteht. Diese spannen den Unterraum U auf, oder anders ausgedrückt, U ist die algebraische direkte Summe der durch $\mathbf{a}^i$, $i = 1, \dots, u$ erzeugten eindimensionalen Unterräume. Diesen Zusammenhang zwischen den Vektoren $\mathbf{a}^i \in \mathbb{R}^n$ und dem Unterraum U drücken wir nun durch das Keilprodukt aus:

$$U \triangleq \mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}^u \quad (32)$$

Umgekehrt wird hierdurch bei Vorgabe von u linear unabhängigen Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ auch ein bestimmter Unterraum $U \in G(n,u)$ erzeugt. In der Literatur wird gezeigt, daß dieses Produkt multilinear und antisymmetrisch ist. Wir verdeutlichen dies anhand der 2-er Keilprodukte:

- $\mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2 = -\mathbf{a}^2 \wedge \mathbf{a}^1$ (Umkehr der Orientierung)
 - $(\alpha \mathbf{a}^1) \wedge \mathbf{a}^2 = \alpha \mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2$
 - $(\mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2) \wedge \mathbf{a}^3 = \mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^3 + \mathbf{a}^2 \wedge \mathbf{a}^3$
- (33)

Im Fall der linearen Abhängigkeit kann man das Keilprodukt als nulldimensionalen Unterraum charakterisieren, so daß der Nullvektor im Keilprodukt genau wie die Zahl 0 bei gewöhnlichen Zahlenprodukten wirkt. Die Dualisierung eines Keilproduktes, bestehend aus u Faktoren, bewirkt ein Keilprodukt aus $(n-u)$ Faktoren:

$$U \triangleq \mathbf{a}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}^u \Leftrightarrow U^* \triangleq \mathbf{b}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{b}^{n-u}, \quad (34)$$

wobei die $\mathbf{b}^i \in \mathbb{R}^n$ eine Basis im $U^* = U^\perp$ bilden.

Im $\mathbb{R}^3$ geht die Beziehung (34) über in:

$$*(\mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2) = \mathbf{a}^1 \times \mathbf{a}^2,$$

also das Kreuzprodukt zweier Vektoren des $\mathbb{R}^3$.

Wir wenden uns nun der Frage der Parametrisierung der Elemente des Graßmann-Bündels $G(n, u)$ zu. Durch das Keilprodukt ist direkt eine mögliche Parametrisierung in Gestalt einer spaltenregulären Matrix $\mathbf{A}$ vom Format (n, u) induziert:

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, u} = (\mathbf{a}^1 \dots \mathbf{a}^u)$$

Jeder der Spaltenvektoren $\mathbf{a}^i \in \mathbb{R}^n$ kann nun aber auch als Linearkombination bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$ dargestellt werden:

$$\mathbf{a}^i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{e}^j \quad (35)$$

Unter Benutzung der Eigenschaften des Keilprodukts erhält man:

$$\mathbf{a}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}^u = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} \mathbf{e}^j \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j=1}^n a_{uj} \mathbf{e}^j \right) = \sum_{i_1 < \dots < i_u} d_{i_1 \dots i_u} \mathbf{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{i_u} \quad (36)$$

In (36) stellen die Größen $d_{i_1 \dots i_u}$ jedoch nichts anderes als die Plücker-Koordinaten dar. In diesem Zusammenhang stellen sie eine Parametrisierung von U bzgl. der Keilprodukte der kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^n$ dar. Ein Vorteil dieser Parametrisierung von $U \in G(n, u)$ besteht in der sehr einfachen Möglichkeit der Dualisierung, da sich die Plücker-Koordinaten von $U^\perp$ direkt aus den Plücker-Koordinaten von U ergeben (siehe (21)). Die Darstellung von (36) impliziert auch die Aussage, daß die Dimension des Graßmann-Bündels $G(n, u)$ gleich $\binom{n}{u}$ ist. Diese Aussage ist jedoch falsch, wie wir im Weiteren darlegen werden. Wir vermerken dazu zunächst, daß die Plücker-Koordinaten nicht unabhängig voneinander gewählt werden können, da zwischen ihnen die schon erwähnten Plücker-Relationen bestehen. Am deutlichsten wird dies anhand des Konzepts der Normalform:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{A}} \end{pmatrix}$$

Wie dargelegt wurde, sind die Elemente von $\tilde{\mathbf{A}}$ selbst entsprechende Plücker-Koordinaten, alle anderen Plücker-Koordinaten lassen sich durch algebraische Funktionen aus diesen berechnen. Frei wählbar sind nur diejenigen Plücker-Koordinaten, die den Elementen von $\tilde{\mathbf{A}}$ entsprechen. Dies sind aber nur $u \cdot (n-u)$ Plücker-Koordinaten, hinzu kommt nur die Plücker-Koordinate, die der Beobachtungsbasis (Einheitsmatrix in $\overline{\mathbf{A}}$) entspricht. Durch die Normalform ist auch der Übergang von den Plücker-Koordinaten zur Matrixdarstellung bzw. Darstellung als Keilprodukt von U gegeben. Man wähle dazu eine beliebige nicht verschwindende Plücker-Koordinate und dividiere alle Plücker-Koordinaten durch diesen Wert. Die gewählte Plücker-Koordinate entspricht der Beobachtungsbasis (Einheitsmatrix in $\overline{\mathbf{A}}$). Die Elemente von $\tilde{\mathbf{A}}$ erhält man dann aus denjenigen Plücker-Koordinaten, die zur Beobachtungsbasis in dem Sinne assoziiert sind, daß sie genau $u-1$ Indizes aus der Beobachtungsbasis enthalten. Alle anderen Plücker-Koordinaten werden zur Konstruktion von $\overline{\mathbf{A}}$ bzw. U nicht benötigt. Damit erhält man abschließend folgendes Ergebnis.

Satz 11: Es gilt:

$$\dim G(n, u) = \dim G^*(n, u) = u \cdot (n-u) + 1 \quad (37)$$

Interessant ist in diesem Zusammenhang folgende Aussage.

Folgerung 11: Es gilt:

$$\binom{n}{u} = u \cdot (n - u) + 1 \Leftrightarrow$$

- $n \leq 3, 0 \leq u \leq 3$
- $n \in \mathbb{N}, u \in \{0,1\}$ und $u \in \{n-1, n\}$

Somit treten abweichende Effekte gegenüber der bisherigen Theorie erst ab $n = 4$ auf. Eine weitergehende algebraische Diskussion kann durchaus wichtige neue Erkenntnisse über die Struktur der Grassmann-Bündel erbringen.

3 Fazit und Ausblicke

Die innere Geometrie eines Ausgleichungsproblems stellt sich dar als Geometrie desjenigen Unterraumes U aus $\mathbb{R}^n$ (Beobachtungsraum), auf den projiziert werden soll. Diese Geometrie hat wesentlichen Einfluß auf die Ergebnisse der Ausgleichung (Projektion auf U entspricht den ausgeglichenen Beobachtungen, unbekannte Parameter, die Projektion auf $U^\perp$ entspricht den Verbesserungen). Insbesondere sind geometrische Besonderheiten aufzudecken, die durch eine spezielle Lage von U bzw. $U^\perp$ im $\mathbb{R}^n$ entstehen.

Diese Fälle werden durch den hier neu eingeführten Begriff der latenten Restriktionen charakterisiert, der eine Verallgemeinerung des bekannten Begriffes der Restriktion darstellt. Durch latente Restriktionen werden Beobachtungsgruppen (in U bzw. $U^\perp$) charakterisiert, die sich zwar gegenseitig kontrollieren, jedoch nicht durch die restlichen Beobachtungen kontrolliert werden können. Den theoretischen Rahmen für die latenten Restriktionen bilden die sogenannten Plücker-Koordinaten.

Latente Restriktionen entstehen durch verschwindende Plücker-Koordinaten, die wiederum durch entsprechende Indexmengen systematisch aufgedeckt werden können. Der hohe numerische Aufwand zur Berechnung der Plücker-Koordinaten kann durch einen Übergang zur sogenannten Normalform der Designmatrix (Plücker-Grassmann-Basis) vermindert werden.

Der Zusammenhang zwischen latenten Restriktionen und speziellen Beobachtungsbasen zur Erzeugung der Normalform wird charakterisiert. Damit können nun Begriffe wie Restriktionen, Mehrfachbeobachtungen, Kolinearitäten, zerfallende Ausgleichungsprobleme usw. in einen gemeinsamen Kontext gestellt und auch bearbeitet werden. Mit den hier dargestellten theoretischen Grundlagen können nun weiterführende Untersuchungen zur Geometrie von Beobachtungen angestellt werden. Wir erkennen hierfür zwei wesentliche Richtungen

- 1) Die Kenntnis latenter Restriktionen muß sich zwangsläufig auch in der Struktur und der Anwendung statistischer Testverfahren niederschlagen. Die Vorstellung, durch Streichung von Beobachtungen bzw. Unbekannten den Einfluß dieser Größen auf das Gesamtergebnis zu charakterisieren, ist in der Literatur mit dem Begriff „Omission Approach“ belegt (CHATTERJEE, HADI, 1988). Die Schwierigkeit bei der Anwendung liegt vor allem darin, gesichert zu erkennen, welche Größen (bzw. Gruppen von Größen) gestrichen werden sollen. Die praktische Durchrechnung aller möglichen Kombinationen ist von unverträglich hohem numerischen Aufwand. Durch die Aufdeckung latenter Restriktionen werden somit wertvolle, ja unverzichtbare a priori Informationen für die statistischen Verfahren der Ausgleichungsrechnung geliefert.
- 2) Von großem praktischen Interesse sind auch diejenigen Fälle, die geometrisch bzw. numerisch sich „in der Nähe“ von latenten Restriktionen bewegen. Diese Fälle zeichnen sich durch vergleichsweise „kleine“ Plücker-Koordinaten bzw. betragsmäßig kleine Elemente in der Normalform aus, wobei wiederum das Problem der „richtig“ gewählten Beobachtungsbasis zur Erzeugung der Normalform entscheidend ist. Erste Untersuchungen zeigen einen wichtigen Zusammenhang mit den Balancierungsfaktoren (JURISCH, KAMPMANN, 1998). Diese Balancierungsfaktoren resultieren aus einem Vergleich zwischen Ist-Geometrie einer Ausgleichung und einer idealen Soll-Geometrie (Design im Beobachtungsraum) und geben bei entsprechender Normierung durch ihre Größenverhältnisse untereinander Informationen über besondere geometrische Verhältnisse der Ausgleichung.

Literatur

- BEHNKEN, D. W., DRAPER, N. R.: Residuals and their Variance. *Technometrics*, 11, No. 1, p. 101-111, 1972.
- CHATTERJEE, S., HADI, A. S.: *Sensitivity Analysis in Linear Regression*. John Wiley & Sons, New York, 1988.
- DRAPER, N. R., SMITH, H.: *Applied Regression Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1981.
- FINZEL, M.: Linear Approximation in l_n^∞ . *Journal of Approximation Theory*, Vol. 76, p. 326-350, 1994.
- GRAFAREND, E. W., SCHAFFRIN, B.: *Ausgleichungsrechnung in linearen Modellen*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1993.
- JURISCH, R., KAMPMANN, G.: Vermittelnde Ausgleichungsrechnung mit balancierten Beobachtungen – erste Schritte zu einem neuen Ansatz. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 123, S. 87-92, 1998.
- NEUTSCH, W.: *Koordinaten: Theorie und Anwendungen*. Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg, Oxford, Berlin, 1995.
- TUCHSCHERER, P.: Über den Sonderfall zweier Nicht-Null-Elemente in einer Spalte der Designmatrix für die Ausgleichung in linearen Modellen. Diplomarbeit an der Hochschule Anhalt (FH), 1995.
- VAN DER WAERDEN, B. L.: *Einführung in die algebraische Geometrie*. Springer Verlag, Berlin, 1973.
- WOLF, H.: *Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*. Ferdinand Dümmlers Verlag, Bonn, 1968.
- WOLF, H.: *Ausgleichungsrechnung I und II*. 3. Auflage, Ferdinand Dümmlers Verlag, Bonn, 1997.