Energiebetrachtungen für die Bewegung zweier Satelliten im Gravitationsfeld der Erde

Karl Heinz Ilk

Einleitung

Physikalische Grundlage der Ausmessung des Gravitationsfeldes der Erde sind die Feld- und Bilanzgleichungen der am Meßprozeß beteiligten physikalischen Systeme. Die Bilanzgleichungen beschreiben die Gesetzmäßigkeiten bei der Wechselwirkung der physikalischen Systeme. Unter Wechselwirkung wird dabei der Austausch dynamischer Größen, wie Energie, Impuls, Drehimpuls, usw. verstanden. Jeder Meßapparat stellt ein physikalisches System dar, in dem der Austausch dynamischer Größen in kontrollierter, d.h. bekannter und geeichter Form abläuft. Sind die Träger des Transports von Energie und Impuls durch materielle Körper modellierbar, dann sind sie i.a. einer kinematischen Beobachtung zugänglich. Die Wechselwirkung kann in diesem Fall durch kinematische Variable beschrieben werden und es können Bestimmungsgleichungen für die Parameter des Gravitationsfeldes formuliert werden. Künstliche Satelliten im Gravitationsfeld der Erde repräsentieren einen solchen "Meßapparat". Die klassische Methode der Satellitengeodäsie beruht auf der Analyse kinematischer Effekte akkumulierter Bahnstörungen zahlreicher Satelliten unterschiedlicher Bahnneigung und Flughöhe. Das hat zur Folge, daß sich der Meßprozeß über ein gewisses Zeitintervall erstreckt. Sowohl Feldparameter als auch zuzuordnende Zeitpunkte lassen sich nicht in lokalisierter Form angeben. Zukünftige satellitengestützte Meßmethoden beruhen dagegen auf einer lokalen Ausmessung des Gravitationsfeldes und zwar hinsichtlich des Orts- als auch des Zeitbereiches. Zur lokalen Ausmessung bieten sich insbesondere Energieaustauschbeziehungen des Sensors mit dem Gravitationsfeld an. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die Bilanzgleichungen für den Energieaustausch zwischen den am Meßprozeß beteiligten Körpern und dem Gravitationsfeld sowie Energie- und Bewegungsintegrale zu formulieren. Die abgeleiteten Beziehungen lassen sich sowohl zur Bestimmung von Parametern des Gravitationsfeldes verwenden, als auch zur Analyse und Validierung der Lösungen (z.B. Jekeli, 1998).
Für die vorliegende Problemstellung wird eine Beschreibung der Mechanik zugrunde gelegt, die auf einen Vorschlag von Falk (1966), bzw. Falk und Ruppel (1973, 1976) zurückgeht. Sie ist in das Gebäude der Thermodynamik integriert und unterscheidet sich in gewissen Details von der gewohnten Betrachtungsweise. Natürlich handelt es sich hierbei um keine neue Formulierung der klassischen Mechanik, Falk zeigt vielmehr, daß beispielsweise die gewohnte Hamilton-Theorie als thermodynamische Beschreibung der Mechanik angesehen werden kann (Falk, 1990). Diese Beschreibungsweise kann im Falle der Betrachtung von Energie- und Energieaustauschbeziehungen zwischen den Teilen eines mechanischen Systems vorteilhaft angewendet werden.

1 Die dynamische Formulierung des Problems

Ein ***physikalisches System***, bestehend aus Körpern und Feldern, kann durch den Austausch von dynamischen Größen wie Energie, linearer Impuls, Drehimpuls, etc. mit anderen physikalischen Systemen beschrieben werden. Sind alle austauschbaren Größen bekannt, dann ist das dynamische Gesamtsystem vollständig beschrieben, ebenso wie die Prozesse, an denen das physikalische System teilnimmt. Eine wichtige Austauschgröße ist die Energie, die in verschiedenen Formen ausgetauscht wird. Jede Energieform definiert ein Paar zueinander konjugierter Variabler, die „intensiven“ und die „extensiven“ Größen. Der Energieaustausch geschieht dabei durch die Änderung der extensiven Variab-

len. Das Produkt aus einer intensiven Größe und dem Differential einer extensiven Größe ergibt die E-nergieform.
Physikalische Prozesse können durch Angabe aller unabhängiger Energieformen $dE_j = \xi_j \, dX_j$ beschrieben werden, in denen das System Energie austauschen kann. Die Änderung dE der Energie E des Gesamtsystems wird durch die folgende Pfaffsche Form, die sog. ***Gibbssche Fundamentalform*** des Systems, dargestellt:

$$dE = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, dX_j \tag{1.1}$$

Die physikalischen Systeme selbst sind durch die funktionale Abhängigkeit der Energie E von allen extensiven Größen X_j beschrieben. Die Funktion $E(X_1, X_2, \ldots.., X_n)$, die die Abhängigkeiten von den extensiven Größen beschreibt, wird als eine ***Gibbssche Funktion*** des Systems bezeichnet. Die intensiven Variablen sind durch die partiellen Ableitungen der Gibbsschen Funktion nach den konjugierten extensiven Variablen bestimmt:

$$\xi_j = \frac{\partial E(X_1, X_2, \ldots.., X_n)}{\partial X_j} \tag{1.2}$$

Kinematische Bewegung ist Ortsveränderung geometrischer Punktkonfigurationen. Sie kann durch die zeitlichen Veränderungen der Ortsvektoren $\mathbf{r}(t)$ der geometrischen Punkte beschrieben werden. Die Ableitungen der Ortsvektoren nach der Zeit definieren die kinematischen Geschwindigkeiten $d\mathbf{r}/dt$. Im Falle einer starren Punktkonfiguration kann die kinematische Bewegung auch durch den Ortsvektor des Massenzentrums und den Orientierungsvektor $\varphi(t)$ der Punktkonfiguration beschrieben werden. Damit kann die kinematische Bewegung der einzelnen Punkte des starren Körpers beschrieben werden. Kinematische Bewegung ist also mit dem Begriff der Bahn eines geometrischen Punktes eng verknüpft.
Von der kinematischen Bewegung muß die ***dynamische Bewegung*** unterschieden werden. Unter dynamischer Bewegung versteht man den Transport von Energie und Impuls. Während die kinematische Geschwindigkeit die Bahngeschwindigkeit eines materiellen Punktes angibt, gibt die dynamische Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit des Energie- und Impulstransportes an. Besteht der Energie-Impuls-Transport in der Bewegung eines geometrisch lokalisierbaren Körpers, beispielsweise eines Massenpunktes, so sind dynamische und kinematische Geschwindigkeiten gleich: $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. Man beachte aber, daß es kinematische Bewegungen gibt, die keine dynamischen sind und umgekehrt.
Zur kinematischen Beschreibung der Bewegung des vorliegenden physikalischen Systems sind geeignete Modelle einzuführen. Während zur mathematischen Beschreibung des Systems „Gravitationsfeld“ eine Feldfunktion verwendet wird, eignet sich zur Beschreibung des starren Körpers „Erde“ das mathematische Bild einer starren Punktkonfiguration und für die Satelliten die Bilder von geometrischen Punkten. Kinematische Bewegung wird damit als kontinuierliche Aufeinanderfolge von räumlich geometrischen Punktkonfigurationen beschrieben. Beschrieben wird diese Aufeinanderfolge durch die Ortsvektoren zum Massenzentrum bzw. zu den die übrigen Körper repräsentierenden Punkten durch die kinematischen Geschwindigkeiten $d\mathbf{r}_j/dt$ bzw. durch die auf das Massenzentrum bezogene kinematische Winkelgeschwindigkeit $d\varphi_j/dt$.
In der vorliegenden Darstellung wird der Auffassung von Falk und Ruppel (1973, 1976) gefolgt und angenommen, daß das ***Gravitationsfeld*** ein eigenes physikalisches Gebilde ist, das nicht von den gravitierenden Körpern erzeugt wird, sondern von ihnen lediglich in seinem Zustand geändert werden kann. Diese Zustandsänderungen werden durch translatorische und rotatorische Verschiebungen der Körper im Feld herbeigeführt. Die Zustandsänderungen des Feldes beschränken sich dabei nur auf den Energieinhalt des Gravitationsfeldes (in der hier angenommenen statischen Näherung). Das Gravitationsfeld vermittelt zwar den Impuls- und Drehimpulsaustausch sowie den Energieaustausch zwischen den Körpern, behält aber von den dabei aufgenommenen und transportierten Impulsen und Drehimpulsen nichts zurück, wogegen es von der Energie einen Teil zurückbehalten kann (Falk und Ruppel, 1973, S.194). Sind Gesamtimpuls, Gesamtdrehimpuls und Gesamtenergie eines beliebigen (abgeschlossenen) Systems von wechselwirkenden Körpern und Gravitationsfeld konstant, so ist das zugrunde liegende Bezugssystem ein Inertialsystem. Ist das nicht der Fall, so ist ein weiteres Gebilde

beteiligt, mit dem das System wechselwirkt, d.h. mit dem es Impuls, Drehimpuls und Energie austauscht. Dieses weitere System ist das ***Trägheitsfeld***. Das Trägheitsfeld wechselwirkt mit jedem Gebilde, das Energie und Impuls besitzt.

2 Das System „Erde+Satellit-1+Satellit-2+Gravitationsfeld“

Die Gibbssche Funktion für das abgeschlossene physikalische System „Erde+Satellit-1+Satellit-2+ Gravitationsfeld“ kann in Abhängigkeit von den extensiven Variablen folgendermaßen angeschrieben werden (Ilk, 1983a,b; Abb. 3.1):

$$E(\mathbf{p}_\otimes,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{L}_\otimes,\mathbf{r}_\otimes,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\varphi_\otimes)=T(\mathbf{p}_\otimes,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{L}_\otimes)+\hat{V}(\mathbf{r}_j,j=\otimes,1,2;\varphi_\otimes)+E_0\ . \tag{2.1}$$

E_0 ist die innere Energie des Gesamtsystems und $T(\mathbf{p}_\otimes,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{L}_\otimes)$ die kinetische Energie der beteiligten Körper

$$T(\mathbf{p}_\otimes,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{L}_\otimes)=\frac{1}{2}\frac{\mathbf{p}_\otimes^2}{M_\otimes}+\frac{1}{2}\frac{\mathbf{p}_1^2}{M_1}+\frac{1}{2}\frac{\mathbf{p}_2^2}{M_2}+\frac{1}{2}\mathbf{L}_\otimes\cdot\mathbf{T}_\otimes^{-1}\cdot\mathbf{L}_\otimes\ , \tag{2.2}$$

mit den Massen M_j der Körper und dem Trägheitstensor $\mathbf{T}_\otimes$ der Erde. Die kinetische Energie setzt sich aus translatorischen und rotatorischen Anteilen zusammen. Das System „Gravitationsfeld“ kann als räumlich ausgedehntes Gebilde betrachtet werden, das sich dadurch äußert, daß in jedem Raumpunkt Kräfte auf Massenpunkte wirken. Als geeignetes mathematisches Darstellungsmittel wird eine Funktion $\hat{V}(\mathbf{r}_j,j=\otimes,1,2;\varphi_\otimes)$ gewählt, die die potentielle Energie der Gravitationswechselwirkung aller beteiligten Körper beschreibt. Sie lautet für den vorliegenden Fall (Abb. 3.1):

$$\hat{V}(\mathbf{r}_j,j=\otimes,1,2;\varphi_\otimes)=\hat{V}_{\otimes 1}(\mathbf{r}_\otimes,\mathbf{r}_1,\varphi_\otimes)+\hat{V}_{\otimes 2}(\mathbf{r}_\otimes,\mathbf{r}_2,\varphi_\otimes)+\hat{V}_{12}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\ . \tag{2.3}$$

Dem betrachteten physikalischen System „Erde+Satellit-1+Satellit-2+ Gravitationsfeld“ kann Energie durch Änderung der Bewegungsenergie über die Änderung der linearen Impulse $\mathbf{v}_j\cdot d\mathbf{p}$, durch Änderung der Rotationsenergie über die Änderung der Drehimpulse $\mathbf{d}_j\cdot d\mathbf{L}_j$, sowie durch Änderung der Verschiebungsenergie über eine Translation $-\mathbf{K}_j\cdot d\mathbf{r}_j$ bzw. Orientierungsänderung $-\mathbf{M}_j\cdot d\varphi_j$ der beteiligten Körper zugeführt oder entzogen werden. Die in den Energieformen auftretenden Größen sind die Geschwindigkeiten der Massenzentren $\mathbf{v}_j$, die Änderungen der linearen Impulse $d\mathbf{p}_j$, die Winkelgeschwindigkeit der Erde $\mathbf{d}_\otimes$, die Änderung des Drehimpulses der Erde $d\mathbf{L}_\otimes$, die Gravitationswechselwirkungskräfte $\mathbf{K}_j$, die Lageänderungen $d\mathbf{r}_j$, das Gravitationswechselwirkungsdrehmoment $\mathbf{M}_\otimes$ und die Orientierungsänderung $d\varphi_\otimes$.
Die intensiven Variablen ergeben sich durch partielle Ableitungen der Gibbsschen Funktion nach den konjugierten extensiven Variablen. Für die dynamischen Geschwindigkeiten erhält man:

$$\mathbf{v}_j=\frac{\partial E(\mathbf{p}_\otimes,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{L}_\otimes,\varphi_\otimes,\mathbf{r}_\otimes,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{p}_j}=\frac{\mathbf{p}_j}{M_j},\quad j=\otimes,1,2\ , \tag{2.4}$$

entsprechend für die dynamische Winkelgeschwindigkeit der Erde

$$\mathbf{d}_\otimes=\frac{\partial E(\mathbf{p}_\otimes,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{L}_\otimes,\varphi_\otimes,\mathbf{r}_\otimes,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{L}_\otimes}=\mathbf{T}_\otimes^{-1}\cdot\mathbf{L}_\otimes\ , \tag{2.5}$$

für die Kräfte zufolge Gravitationswechselwirkung:

$$-\mathbf{K}_j=\frac{\partial E(\mathbf{p}_\otimes,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{L}_\otimes,\varphi_\otimes,\mathbf{r}_\otimes,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_j}=\nabla_{\mathbf{r}_j}\hat{V}=\sum_{\substack{k\\k\neq j}}\nabla_{\mathbf{r}_j}\hat{V}_{jk}=-\sum_{\substack{k\\k\neq j}}\mathbf{K}_{jk},\quad j,k=\otimes,1,2, \tag{2.6}$$

sowie für das (in diesem Fall zu vernachlässigende) Drehmoment zufolge Gravitationswechselwirkung mit den Satelliten:

$$-\mathbf{M}_\otimes = \frac{\partial E(\mathbf{p}_\otimes, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{L}_\otimes, \varphi_\otimes, \mathbf{r}_\otimes, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial \varphi_\otimes} = \mathbf{x} \times \nabla_\mathbf{x} \hat{V} = \mathbf{x} \times \nabla_\mathbf{x} \sum_{k=1}^{2} \hat{V}_{\otimes k} = -\sum_{k=1}^{2} \mathbf{M}_{\otimes k} \ . \tag{2.7}$$

Der Verschiebungsoperator $\nabla_{\mathbf{r}_j}$ und der auf das Geozentrum bezogene Drehoperator $\mathbf{x} \times \nabla_\mathbf{x}$, angewendet auf die potentielle Energie der Gravitationswechselwirkung, ergeben die Änderungsraten der Verschiebungsenergie bei infinitesimaler Translation des Körpers *j* als Ganzes bzw. bei infinitesimaler Drehung um sein Massenzentrum in folgendem Sinne:

$$\nabla_{\mathbf{r}_j} \hat{V}_{jk} = \lim_{|d\varphi| \to 0} \frac{\hat{V}_{jk}(\mathbf{r}_j + d\mathbf{r}_j) - \hat{V}_{jk}(\mathbf{r}_j)}{|d\mathbf{r}_j|}, \quad \mathbf{x} \times \nabla_\mathbf{x} \hat{V}_{jk} = \lim_{|d\varphi| \to 0} \frac{\hat{V}_{jk}(\varphi + d\varphi) - \hat{V}_{jk}(\varphi)}{|d\varphi|} \ . \tag{2.8}$$

Die Gibbssche Fundamentalform beschreibt nun die Änderung der Energie *E* des Gesamtsystems, dargestellt durch die verschiedenen Energieformen, in denen Energie ausgetauscht werden kann,

$$dE = \mathbf{d}_\otimes \cdot d\mathbf{L}_\otimes + \mathbf{v}_\otimes \cdot d\mathbf{p}_\otimes + \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{p}_1 + \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{p}_2 - \mathbf{K}_\otimes \cdot d\mathbf{r}_\otimes - \mathbf{M}_\otimes \cdot d\varphi_\otimes - \mathbf{K}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 - \mathbf{K}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 \ . \tag{2.9}$$

Da es sich im betrachteten Fall um ein abgeschlossenes System handelt gilt: $dE = 0$. Die Zerlegung der Gesamtenergie *E* in Summanden hat zur Folge, daß in der zugehörigen Gibbsschen Fundamentalform (2.9) die Größen dT_j und $d\hat{V}_j$ (in hoher Näherung) totale Differentiale der kinetischen Energie der Körper $\otimes$,1,2 und der potentiellen Energie des Feldes sind:

$$dT_\otimes = \mathbf{d}_\otimes \cdot d\mathbf{L}_\otimes, \quad dT_j = \mathbf{v}_j \cdot d\mathbf{p}_j \ , \quad d\hat{V}_\otimes = -\sum_{k=1}^{2} \mathbf{M}_{\otimes k} \cdot \mathbf{d}_\otimes, \quad d\hat{V}_j = -\sum_{\substack{k \\ k \neq j}} \mathbf{K}_{jk} \cdot d\mathbf{r}_j, \quad j = \otimes, 1, 2 \ . \tag{2.10}$$

Ziel ist, Bilanzgleichungen für den Energieaustausch zwischen den am Meßprozeß beteiligten Körpern und dem Gravitationsfeld zu formulieren. Im Falle eines ausgedehnten starren Körpers mit beliebiger Massenverteilung wird Bewegungsenergie und (translatorische) Verschiebungsenergie bzw. Rotationsenergie und (rotatorische) Verschiebungsenergie des Feldes ausgetauscht (Falk, 1973, Ilk, 1983b). Die Erhaltungssätze für den Energieaustausch gelten für jeden Zeitpunkt während des Bewegungsablaufes; sie beziehen sich in dieser Form zunächst auf ein raumfestes Bezugssystem. Dasselbe gilt für die Gibbssche Fundamentalform des Systems, die ja nichts anderes als die Summe der einzelnen Erhaltungssätze ist. Die Gesamtenergie des Systems bzw. die Gibbsschen Funktion bleibt während des Bewegungsablaufes ebenfalls konstant.
Führt man kinematische Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten ein, die sich für das vorliegende System von materiellen Körpern gleich den entsprechenden dynamischen Größen erweisen (Falk und Ruppel, 1973),

$$\mathbf{v}_j = \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} =: \dot{\mathbf{r}}_j, \quad \mathbf{d}_\otimes = \frac{d\varphi_\otimes}{dt} =: \dot{\varphi}_\otimes \ , \tag{2.11}$$

so erhält man die Bilanzen für den Energieaustausch. Es ergeben sich

- für den Energieaustausch bei translatorischer Bewegung der einzelnen Körper (translatorische Einzelbewegung) mit dem Gravitationsfeld:

$$\mathbf{v}_j \cdot d\mathbf{p}_j - \mathbf{K}_j \cdot d\mathbf{r}_j = 0 \ . \tag{2.12}$$

  bzw. durch entsprechende Umformung:

$$M_j \ \dot{\mathbf{r}}_j \cdot d\dot{\mathbf{r}}_j - \mathbf{K}_j \cdot d\mathbf{r}_j = 0 \ , \quad \text{mit} \quad \mathbf{K}_j = \sum_{\substack{k \\ k \neq j}} \mathbf{K}_{jk} = \sum_{\substack{k \\ k \neq j}} \nabla_{\mathbf{r}_j} \hat{V}_{jk}, \quad j,k = \otimes, 1, 2 \ , \tag{2.13}$$

- und für den Energieaustausch bei rotatorischer Bewegung der Erde mit dem Gravitationsfeld:

$$\mathbf{d}_\otimes \cdot d\mathbf{L}_\otimes - \mathbf{M}_\otimes \cdot d\mathbf{r}_\otimes = 0 \ . \tag{2.14}$$

  bzw. durch entsprechende Umformung:

$$\dot{\varphi}_\otimes \cdot \mathbf{T}_\otimes \cdot d\dot{\varphi}_\otimes + \dot{\varphi}_\otimes \cdot \left(d\varphi_\otimes \times \mathbf{T}_\otimes \cdot \dot{\varphi}_\otimes\right) - \mathbf{M}_\otimes \cdot d\varphi_\otimes = 0,$$
$$\text{mit} \quad \mathbf{M}_\otimes = \sum_k \mathbf{M}_{\otimes k} = \sum_k \mathbf{x} \times \nabla_\mathbf{x} \hat{V}_{\otimes k}, \;\; k = 1{,}2\,. \tag{2.15}$$

Selbstverständlich sind die Kraft- bzw. Drehmomentanteile, die aus dem Energieaustausch der Satellitenbewegung bzgl. der Erde resultieren, für die Erde zu vernachlässigen. Für die Erde folgt damit sowohl für die Translation als auch für die Rotation Trägheitsbewegung. Der Energieaustausch durch diese Bewegungen soll im weiteren unberücksichtigt bleiben.

3 Energieaustauschbeziehungen im Quasi-Inertialsystem

Zur Ableitung der Energieaustauschbilanzen führt man in der Gibbsschen Funktion des Gesamtsystems anstelle der linearen Impulse $\mathbf{p}_\otimes, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ die relativen Impulse $\mathbf{p}, \mathbf{P}, \mathbf{P}_{12}$ ein und anstelle der Koordinaten $\mathbf{r}_\otimes, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ die Relativkoordinaten (Jacobi-Koordinaten) $\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{R}_{12}$ (Abb. 3.1). Sie ergeben sich aus den Transformationen (Ilk, 1983a):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{P}_{12} \end{pmatrix} = \mathsf{A}^{-T} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_\otimes \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{R}_{12} \end{pmatrix} = \mathsf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_\otimes \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

mit den Transformationsmatrizen

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{M_1}{m} & \dfrac{M_2}{m} & \dfrac{M_\otimes}{m} \\ \dfrac{M_1}{M_1 + M_2} & \dfrac{M_2}{M_1 + M_2} & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{M_\otimes}{m} & \dfrac{M_\otimes}{m} & -\dfrac{M_1}{M_1 + M_2} \\ -\dfrac{M_2}{M_1 + M_2} & \dfrac{M_1 + M_2}{m} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

wobei für die Gesamtmasse gilt $m := M_1 + M_2 + M_\otimes$. Die Gibbssche Funktion des Gesamtsystems lautet in den neuen Variablen mit der inneren Energie E_0,

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{P}, \mathbf{P}_{12}, \mathbf{L}_\otimes, \mathbf{R}, \mathbf{R}_{12}, \varphi_\otimes) = T(\mathbf{p}, \mathbf{P}, \mathbf{P}_{12}, \mathbf{L}_\otimes) + \hat{V}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{12}, \varphi_\otimes) + E_0 \quad , \tag{3.3}$$

und der kinetischen Energie,

$$T(\mathbf{p}, \mathbf{P}, \mathbf{P}_{12}, \mathbf{L}_\otimes) = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{p}^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{P}^2}{M} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{P}_{12}^2}{\mu_{12}} + \frac{1}{2}\mathbf{L}_\otimes \cdot \mathbf{T}_\otimes^{-1} \cdot \mathbf{L}_\otimes \quad , \tag{3.4}$$

mit dem Trägheitstensor $\mathbf{T}_\otimes$ der Erde sowie den Abkürzungen M und μ_{12} für die reduzierten Massen

$$M = \frac{M_\otimes\left(M_1 + M_2\right)}{M_1 + M_2 + M_\otimes}, \quad \mu_{12} = \frac{M_1\, M_2}{M_1 + M_2}. \tag{3.5}$$

Die potentielle Energie der Gravitationswechselwirkung ist nun in den neuen Variablen zu formulieren:

$$\hat{V}(\mathbf{r}_j, j = \otimes, 1{,}2; \varphi_\otimes) = \hat{V}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{12}, \varphi_\otimes)\ . \tag{3.6}$$

Eine Möglichkeit der mathematischen Formulierung der potentiellen Energie ist im Abschnitt 6 in Form von Reihenentwicklungen nach Kugelfunktionen gegeben.
Der Energieaustausch des betrachteten Systems ist mit den gewählten Variablen in den folgenden Energieformen möglich:

- Änderung der Bewegungsenergie durch Änderung der linearen Impulse:

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{p}, \quad \mathbf{V} \cdot d\mathbf{P} \quad , \mathbf{V}_{12} \cdot d\mathbf{P}_{12} \tag{3.7}$$

- Änderung der Verschiebungsenergie durch Translation und Orientierungsänderung der beteiligten Körper:

$$-\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}, \quad -\mathbf{K}_{(\otimes,1,2)}\cdot d\mathbf{R}, \quad -\mathbf{K}_{(12)}\cdot d\mathbf{R}_{12}, \tag{3.8}$$

Die intensiven Variablen erhält man durch partielle Ableitung der Gibbsschen Funktion nach den konjugierten extensiven Variablen. Für die dynamischen Geschwindigkeiten $\mathbf{v},\mathbf{V},\mathbf{V}_{12}$ erhält man

$$\mathbf{v}=\frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}}=\frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \mathbf{V}=\frac{\partial E}{\partial \mathbf{P}}=\frac{\mathbf{P}}{M}, \quad \mathbf{V}_{12}=\frac{\partial E}{\partial \mathbf{P}_{12}}=\frac{\mathbf{P}_{12}}{\mu_{12}}, \tag{3.9}$$

und entsprechend für die Kräfte zufolge Gravitationswechselwirkung:

$$\begin{aligned}
-\mathbf{K} &= \frac{\partial E}{\partial \mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{r}}\hat{V}(\mathbf{R},\mathbf{R}_{12},\varphi_{\otimes}) = \mathbf{0}\,,\\
-\mathbf{K}_{(\otimes,1,2)} &= \frac{\partial E}{\partial \mathbf{R}} = \nabla_{\mathbf{R}}\hat{V}(\mathbf{R},\mathbf{R}_{12},\varphi_{\otimes}) = -\mathbf{K}_{1\otimes}-\mathbf{K}_{2\otimes}\,,\\
-\mathbf{K}_{(12)} &= \frac{\partial E}{\partial \mathbf{R}_{12}} = \nabla_{\mathbf{R}_{12}}\hat{V}(\mathbf{R},\mathbf{R}_{12},\varphi_{\otimes}) = -\mathbf{K}_{21}-\mathbf{G}_{(21)\otimes}\,,\\
&\text{mit } \mathbf{G}_{(21)\otimes} = \frac{M_1}{M_1+M_2}\mathbf{K}_{2\otimes} - \frac{M_2}{M_1+M_2}\mathbf{K}_{1\otimes}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

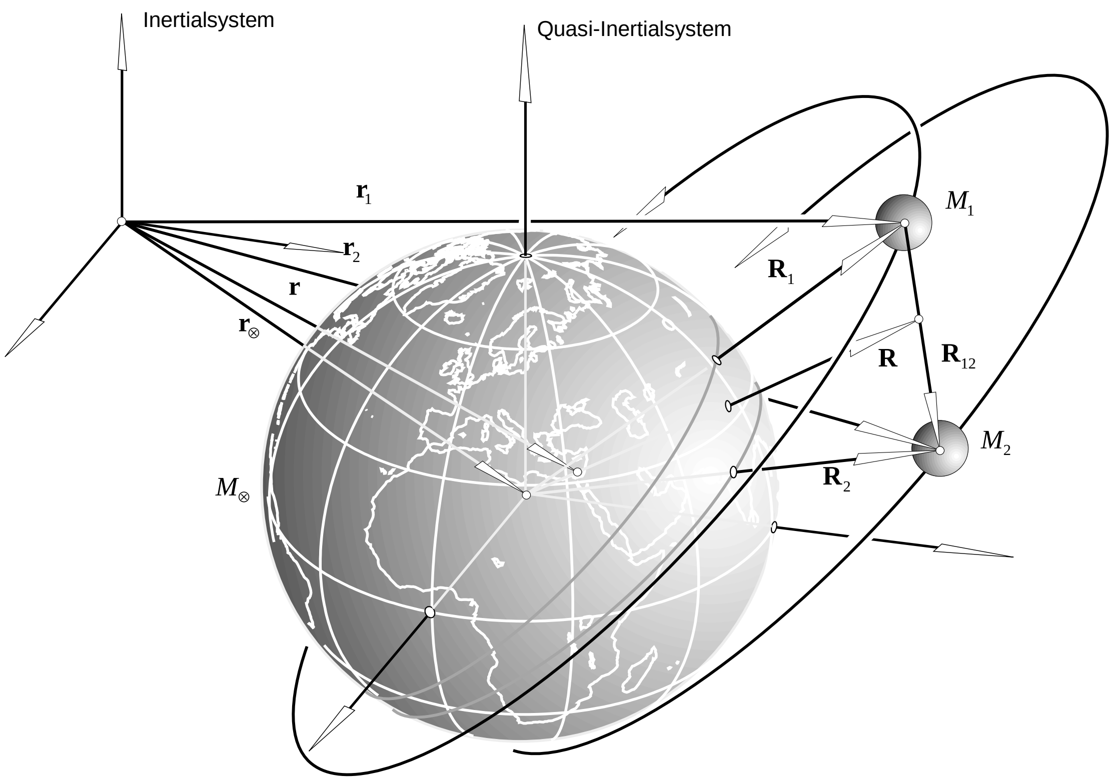

Abb. 3.1: Jacobi-Koordinaten

Die Bilanzgleichungen für den Energieaustausch des Systems $(\otimes,1,2)$ mit dem Gravitationsfeld ergeben sich,

- für die Bewegung des Gesamtsystems $(\otimes,1,2)$ bzgl. des Inertialsystems. Dabei findet kein Energieaustausch mit dem Gravitationsfeld statt. Zunächst gilt:

$$\mathbf{v}\cdot d\mathbf{p}-\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}=0 \ , \tag{3.11}$$

bzw. nach Einführung der kinematischen Geschwindigkeit,

$$M\,\dot{\mathbf{r}}\cdot d\dot{\mathbf{r}}-\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}=0, \quad \text{wobei} \quad \mathbf{K}=\nabla_{\mathbf{r}}\hat{V}(\mathbf{R},\mathbf{R}_{12},\varphi_{\otimes})=\mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad M\,\dot{\mathbf{r}}\cdot d\dot{\mathbf{r}}=0 \ , \tag{3.12}$$

- für die Relativbewegung des Teilsystem (,2) bzgl. der Erde $\otimes$:

$$\mathbf{V}\cdot d\mathbf{P}-\mathbf{K}_{(\otimes,1,2)}\cdot d\mathbf{R}=0 \ , \tag{3.13}$$

bzw. nach entsprechender Umformung,

$$\left(M_1+M_2\right)\dot{\mathbf{R}}\cdot d\dot{\mathbf{R}}-\mathbf{K}_{(\otimes,1,2)}\cdot d\mathbf{R}=0 \quad \text{wobei} \quad \mathbf{K}_{(\otimes,1,2)}=\nabla_{\mathbf{R}}\hat{V}(\mathbf{R},\mathbf{R}_{12},\varphi_{\otimes})=\mathbf{K}_{1\otimes}+\mathbf{K}_{2\otimes} \ , \tag{3.14}$$

- für die Relativbewegung des Satellien 2 bzgl. des Satelliten 1:

$$\mathbf{V}_{12}\cdot d\mathbf{P}_{12}-\mathbf{K}_{(12)}\cdot d\mathbf{R}_{12}=0 \ , \tag{3.15}$$

und nach Umformung,

$$\mu_{12}\,\dot{\mathbf{R}}_{12}\cdot d\dot{\mathbf{R}}_{12}-\mathbf{K}_{(12)}\cdot d\mathbf{R}_{12}=0\,, \quad \text{wobei} \quad \mathbf{K}_{(12)}=\nabla_{\mathbf{R}_{12}}\hat{V}(\mathbf{R},\mathbf{R}_{12},\varphi_{\otimes})=\mathbf{K}_{21}+\mathbf{G}_{(21)\otimes} \ . \tag{3.16}$$

Die Relativbewegung des Satelliten 2 bzgl. des Satelliten 1 läßt sich auch als Abstandsänderung der beiden Satelliten und als Rotation der Verbindungslinie auffassen. Als Bezugssystem liege ein Quasi-Inertialsystem mit dem Ursprung im Satelliten 1 zugrunde. Zur Beschreibung der Relativbewegung von Satellit 2 bzgl. Satellit 1 werden als extensive Variable der Bahndrehimpuls $\mathbf{L}_{(12)}:=\mathbf{R}_{12}\times\mathbf{P}_{12}$, der Radialimpuls $\overline{P}_{12}:=\mathbf{e}\cdot\mathbf{P}_{12}$, der Orientierungsvektor $\varphi_{(12)}$ und der Radialabstand R_{12} eingeführt. Beachtet man, daß gilt

$$\mathbf{P}_{12}^2=\frac{\mathbf{L}_{(12)}^2}{R_{12}^2}+\overline{P}_{12}^2 \ , \tag{3.17}$$

so läßt sich der Anteil "kinetische Energie" der Gibbsschen Funktion des Gesamtsystems (3.3) entsprechend (3.4) folgendermaßen angeben:

$$\begin{aligned} &T(\mathbf{p},\mathbf{P},\mathbf{P}_{12},\mathbf{L}_{\otimes})= \\ &=T(\mathbf{p},\mathbf{P},\mathbf{L}_{(12)},\overline{P}_{12},\mathbf{L}_{\otimes})=\frac{1}{2}\frac{\mathbf{p}^2}{m}+\frac{1}{2}\frac{\mathbf{P}^2}{M}+\frac{1}{2}\frac{\mathbf{L}_{(12)}^2}{\mu_{12}R_{12}^2}+\frac{1}{2}\frac{\overline{P}_{12}^2}{\mu_{12}}+\frac{1}{2}\mathbf{L}_{\otimes}\cdot\mathbf{T}_{\otimes}^{-1}\cdot\mathbf{L}_{\otimes} \ , \end{aligned} \tag{3.18}$$

Die anderen Terme der Gibbsschen Funktion in (3.3) bleiben gleich. Der Austausch von Bewegungsenergie bei der translatorischen Relativbewegung von 2 bzgl. 1 kann somit auch als Austausch von Rotationsenergie und Bewegungsenergie in Radialrichtung interpretiert werden,

$$\mathbf{V}_{12}\cdot d\mathbf{P}_{12}=\mathbf{d}_{(12)}\cdot d\mathbf{L}_{(12)}+\overline{V}_{12}d\overline{P}_{12} \ . \tag{3.19}$$

mit der dynamischen Winkelgeschwindigkeit der Verbindungslinie $\mathbf{d}_{(12)}$ und der dynamischen Geschwindigkeit in Radialrichtung $\overline{V}_{12}$. Entsprechend wird die Verschiebungsenergie des Teilsystems "Gravitationsfeld" durch die Bewegung der beiden Satelliten 1 und 2 in einen rotatorischen und einen translatorischen Anteil zerlegt:

$$\mathbf{K}_{(12)}\cdot d\mathbf{R}_{12}=\mathbf{M}_{(12)}\cdot d\varphi_{(12)}+\overline{K}_{(12)}d\overline{R}_{12} \ . \tag{3.20}$$

Man beachte, daß der Energieaustausch sowohl mit dem Gravitationsfeld als auch zwischen den beiden Komponenten der Relativbewegung stattfindet. Diese Kopplung läßt sich nicht beseitigen. Die intensiven Variablen erhält man durch partielle Ableitung der Gibbsschen Funktion mit der kinetischen Energie (3.18) nach den konjugierten extensiven Variablen $\mathbf{L}_{12}$,

$$\mathbf{d}_{(12)} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{L}_{(12)}} = \frac{\partial T(\mathbf{p},\mathbf{P},\mathbf{L}_{(12)},\overline{P}_{12},\mathbf{L}_{\otimes})}{\partial \mathbf{L}_{(12)}} = \frac{1}{\mu_{12} R_{12}^2}\mathbf{L}_{(12)} \ , \tag{3.21}$$

und dem Radialimpuls $\overline{P}_{12}$,

$$\overline{V}_{12} = \frac{\partial E}{\partial \overline{P}_{12}} = \frac{\partial T(\mathbf{p},\mathbf{P},\mathbf{L}_{(12)},\overline{P}_{12},\mathbf{L}_{\otimes})}{\partial \overline{P}_{12}} = \frac{\overline{P}_{12}}{\mu_{12}} \ . \tag{3.22}$$

Das Drehmoment $\mathbf{M}_{(12)}$ erhält man mit Hilfe des Drehoperators $\mathbf{x}\times\nabla_{\mathbf{x}}$, (siehe Formel (2.8)), angewendet auf die potentielle Energie der Gravitationswechselwirkung nach Formel (3.6),

$$-\mathbf{M}_{(12)} = \frac{\partial E}{\partial \varphi_{(12)}} = \mathbf{x}\times\nabla_{\mathbf{x}}\hat{V}(\mathbf{R},\mathbf{R}_{12}\left(\varphi_{(12)},R_{12}\right),\varphi_{\otimes}) = -\mathbf{R}_{12}\times\mathbf{G}_{(21)\otimes} \ , \tag{3.23}$$

und entsprechend die in radialer Richtung wirkende Kraft $\overline{K}_{(12)}$ mit Hilfe des Verschiebungsoperators $\nabla_{R_{12}}$ (siehe Formel (2.8)),

$$-\overline{K}_{(12)} = \frac{\partial E}{\partial R_{12}} = \nabla_{R_{12}}\hat{V}(\mathbf{R},\mathbf{R}_{12}\left(\varphi_{(12)},R_{12}\right),\varphi_{\otimes})\cdot\mathbf{e} = -\mathbf{K}_{21}\cdot\mathbf{e} - \mathbf{G}_{(21)\otimes}\cdot\mathbf{e} \ . \tag{3.24}$$

Die Bilanzgleichungen für den Energieaustausch bei Relativbewegung des Satelliten 2 bzgl. des Satelliten 1 lauten nun anstelle von (3.15) und (3.16),

- für die Rotation der Verbindungslinie $\overline{\ ,2}$:

$$\mathbf{d}_{(12)}\cdot d\mathbf{L}_{(12)} - \mathbf{M}_{(12)}\cdot d\varphi_{(12)} = 0 \ , \tag{3.25}$$

  und mit

$$d\mathbf{L}_{(12)} = \mu_{12}\ R_{12}^2\ d\mathbf{d}_{(12)} = \mu_{12}\ R_{12}^2\ d\dot{\varphi}_{(12)} \ , \tag{3.26}$$

  zunächst,

$$\mu_{12}\ R_{12}^2\ \dot{\varphi}_{(12)}\cdot d\dot{\varphi}_{(12)} - \mathbf{R}_{12}\times\mathbf{G}_{(21)\otimes}\cdot d\varphi_{(12)} = 0 \ , \tag{3.27}$$

  bzw., nach Umformung, wobei die Größen $\dot{\overline{R}}_{12}$ und $d\dot{\overline{R}}_{12}$ die Projektionen der vektoriellen Größen auf die Richtung $\mathbf{e}$ bezeichnen, alternativ zu:

$$\mu_{12}\left(\dot{\mathbf{R}}_{12}\cdot d\dot{\mathbf{R}}_{12} - \dot{\overline{R}}_{12}\ d\dot{\overline{R}}_{12} - \dot{\overline{R}}_{12}\left(\dot{\mathbf{R}}_{12}\cdot d\mathbf{e}\right)\right) - \mathbf{R}_{12}\times\mathbf{G}_{(21)\otimes}\cdot d\varphi_{(12)} = 0 \ , \tag{3.28}$$

- für die Abstandsänderung $\overline{\ ,2}$:

$$\overline{V}_{12}\ d\overline{P}_{12} - \overline{K}_{(12)}\ d\overline{R}_{12} = 0 \ , \tag{3.29}$$

  und mit

$$\overline{V}_{12} = \mathbf{e}\cdot\mathbf{V}_{12} = \mathbf{e}\cdot\dot{\mathbf{R}}_{12} = \dot{\overline{R}}_{12}, \quad d\overline{P}_{12} = \mu_{12}\left(d\dot{\overline{R}}_{12} + d\mathbf{e}\cdot\dot{\mathbf{R}}_{12}\right) \ , \tag{3.30}$$

  schließlich

$$\mu_{12}\ \dot{\overline{R}}_{12}\ d\dot{\overline{R}}_{12} + \mu_{12}\ \dot{\overline{R}}_{12}\left(d\mathbf{e}\cdot\dot{\mathbf{R}}_{12}\right) - \overline{K}_{(12)}\ d\overline{R}_{12} = 0 \ , \tag{3.31}$$

  wobei

$$\overline{K}_{(12)}\ d\overline{R}_{12} = \left(\mathbf{e}\cdot\left(\mathbf{K}_{21}+\mathbf{G}_{(21)\otimes}\right)\right)\left(\mathbf{e}\cdot d\mathbf{R}_{12}\right) \ . \tag{3.32}$$

4 Energieaustauschbeziehungen im erdfesten Bezugssystem

Wird ein nichtinertiales Bezugssystem zugrunde gelegt, so sind die Wechselwirkungen des Systems mit dem Trägheitsfeld zu berücksichtigen (Abschnitt 1). Das bedeutet, daß die Gibbssche Funktion zu modifizieren ist. Im folgenden soll die Bewegung des Massenmittelpunktes der Satelliten 1 und 2 auf ein konstant rotierendes geozentrisches Bezugssystem bezogen werden. Die Rotation wird durch den Drehvektor $\Omega = (0,0,\omega)$ beschrieben. Entsprechend bezieht sich die Relativbewegung der beiden Satelliten auf dieses rotierende System. Die Trägheitsbewegung des Massenmittelpunktes des betrachteten abgeschlossenen Systems soll im folgenden nicht weiter betrachtet werden. Die gestrichenen Größen beziehen sich im folgenden auf das rotierende Bezugssystem. Die Gibbssche Funktion lautet für diesen Fall:

$$E' = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{P}'^2}{M} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{P}'^2_{12}}{\mu_{12}} - \mathbf{P}' \cdot (\Omega \times \mathbf{R}') - \mathbf{P}'_{12} \cdot (\Omega \times \mathbf{R}'_{12}) + \hat{V}'(\mathbf{R}', \mathbf{R}'_{12}, \varphi_\otimes) + E_0 \ . \tag{4.1}$$

Die dynamischen Geschwindigkeiten $\mathbf{V}', \mathbf{V}'_{12}$ erhält man bzgl. des rotierenden Bezugssystems wiederum durch partielle Ableitung der Gibbsschen Funktion nach den konjugierten extensiven Variablen:

$$\mathbf{V}' = \frac{\partial E'}{\partial \mathbf{P}'} = \frac{\mathbf{P}'}{M} - \Omega \times \mathbf{R}' , \quad \mathbf{V}'_{12} = \frac{\partial E'}{\partial \mathbf{P}'_{12}} = \frac{\mathbf{P}'_{12}}{\mu_{12}} - \Omega \times \mathbf{R}'_{12} , \tag{4.2}$$

Man beachte, daß die linearen Impulse bzgl. des Inertialsystems und bzgl. des konstant rotierenden Bezugssystems identisch sind, während sich die Geschwindigkeiten unterscheiden:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}'_{12} = \mathbf{P}_{12} \tag{4.3}$$

Für die Kräfte zufolge Wechselwirkung mit dem Gravitationsfeld und dem Trägheitsfeld erhält man:

$$\begin{aligned} -\mathbf{K}'_{(\otimes,1,2)} &= \frac{\partial E'}{\partial \mathbf{R}'} = -\mathbf{K}'_{1\otimes} - \mathbf{K}'_{2\otimes} + \Omega \times \mathbf{P}', \\ -\mathbf{K}'_{(12)} &= \frac{\partial E'}{\partial \mathbf{R}'_{12}} = -\mathbf{K}'_{21} - \mathbf{G}'_{(21)\otimes} + \Omega \times \mathbf{P}'_{12} , \end{aligned} \tag{4.4}$$

Die Bilanzgleichungen für den Energieaustausch des Systems $(\otimes,1,2)$ mit Gravitations- und Trägheitsfeldern erhält man:

- für die gemeinsame Bewegung der Satelliten 1 und 2, bezogen auf ein konstant rotierendes Bezugssystem im Geozentrum:

$$\mathbf{V}' \cdot d\mathbf{P}' - \mathbf{K}'_{(\otimes,1,2)} \cdot d\mathbf{R}' = 0 , \tag{4.5}$$

bzw. nach entsprechender Umformung:

$$(M_1 + M_2)\,\dot{\mathbf{R}}' \cdot d\dot{\mathbf{R}}' - \mathbf{K}'_{(\otimes,1,2)} \cdot d\mathbf{R}' = 0 \ , \tag{4.6}$$

wobei

$$\mathbf{K}'_{(\otimes,1,2)} = \mathbf{K}'_{1\otimes} + \mathbf{K}'_{2\otimes} - (M_1 + M_2)\,\Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}') \ , \tag{4.7}$$

- für die Relativbewegung des Satelliten 2 bzgl. des Satelliten 1, bezogen auf ein konstant rotierendes Bezugssystem im Satelliten 1:

$$\mathbf{V}'_{12} \cdot d\mathbf{P}'_{12} - \mathbf{K}'_{(12)} \cdot d\mathbf{R}'_{12} = 0 , \tag{4.8}$$

bzw. nach entsprechender Umformung:

$$\mu_{12}\, \dot{\mathbf{R}}'_{12} \cdot d\dot{\mathbf{R}}'_{12} - \mathbf{K}'_{(12)} \cdot d\mathbf{R}'_{12} = 0 \ , \tag{4.9}$$

wobei

$$\mathbf{K}'_{(12)} = \mathbf{K}'_{21} + \mathbf{G}'_{(21)\otimes} - \mu_{12}\, \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}'_{12}) \ . \tag{4.10}$$

Zerlegt man die Relativbewegung wieder in eine Dreh- und Radialbewegung, so erhält man folgende den Formeln (4.6) und (4.9) entsprechenden Bilanzgleichungen für den Energieaustausch:

- für die Rotation der Verbindungslinie $\overline{\ ,2}$:

$$\mathbf{d}'_{(12)} \cdot d\mathbf{L}'_{(12)} - \mathbf{M}'_{(12)} \cdot d\varphi'_{(12)} = 0 \ , \tag{4.11}$$

bzw. mit

$$d\mathbf{L}'_{(12)} = \mu_{12}\ R_{12}^2\ d\mathbf{d}'_{(12)} = \mu_{12}\ R_{12}^2\ d\dot{\varphi}'_{(12)} \quad , \tag{4.12}$$

schließlich:

$$\mu_{12}\ R_{12}^2\ \dot{\varphi}'_{(12)} \cdot d\dot{\varphi}'_{(12)} - \mathbf{M}'_{(12)} \cdot d\varphi'_{(12)} = 0 \, , \tag{4.13}$$

wobei

$$\mathbf{M}'_{(12)} = \mathbf{R}'_{\mathbf{12}} \times \mathbf{G}'_{(21)\otimes} - \mu_{12}\mathbf{R}'_{12} \times \left(\Omega \times \dot{\mathbf{R}}'_{12}\right) - \mu_{12}\mathbf{R}'_{12} \times \left(\Omega \times \left(\Omega \times \mathbf{R}'_{12}\right)\right) \ . \tag{4.14}$$

Alternativ kann der erste Term in (4.13) auch entsprechend wie in (3.28) angeschrieben werden.

- für die Abstandsänderung $\overline{\ ,2}$:

$$\overline{V}'_{12}\ d\overline{P}'_{12} - \overline{K}'_{(12)}\ d\overline{R}'_{12} = 0 \ , \tag{4.15}$$

und mit

$$\overline{V}'_{12} = \mathbf{e}' \cdot \dot{\mathbf{R}}'_{12} =: \dot{\overline{R}}'_{12} \ , \quad d\overline{V}'_{12} = d\dot{\overline{R}}'_{12} \ , \tag{4.16}$$

schließlich

$$\mu_{12}\ \dot{\overline{R}}'_{12}\ d\dot{\overline{R}}'_{12} + \mu_{12}\ \dot{\overline{R}}'_{12}\left(d\mathbf{e}' \cdot \dot{\mathbf{R}}'_{12}\right) - \overline{K}'_{(12)}\ d\overline{R}'_{12} = 0 \ , \tag{4.17}$$

wobei

$$\overline{K}'_{(12)} = \mathbf{e}' \cdot \left(\mathbf{K}'_{21} + \mathbf{G}'_{(21)\otimes} - \mu_{12}\Omega \times \dot{\mathbf{R}}'_{12} - \mu_{12}\Omega \times \left(\Omega \times \mathbf{R}'_{12}\right)\right), \quad d\overline{R}'_{12} = \mathbf{e}' \cdot d\mathbf{R}'_{12} \ . \tag{4.18}$$

5 Energie- und Bewegungsintegrale

Die Einführung von Jacobi-Koordinaten ermöglichte die Abspaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes des Gesamtsystems von den Einzelbewegungen. Damit ist der Gesamtimpuls **p** in Strenge konstant und der Massenmittelpunkt führt eine Trägheitsbewegung aus. Dasselbe gilt in hinreichender Näherung auch für den Drehimpuls der Erde, da die Gravitationswechselwirkung mit den Satelliten kein Drehmoment ausübt. Eine weitere Aufspaltung der Bilanzgleichungen ist nicht möglich, da die potentielle Energie von beiden Jacobi-Koordinaten abhängt. Allerdings gelingt es, Bilanzbeziehungen anzugeben, die bei gewissen Konfigurationen der beiden Satelliten nützlich sein können. Hierzu werden in der ***Gibbsschen Funktion*** des Gesamtsystems

$$E(\mathbf{p},\mathbf{P},\mathbf{P}_{12},\mathbf{L}_{\otimes},\mathbf{R},\mathbf{R}_{12},\varphi_{\otimes}) = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{p}^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{P}^2}{M} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{P}_{12}^2}{\mu_{12}} + \frac{1}{2}\mathbf{L}_{\otimes} \cdot \mathbf{T}_{\otimes}^{-1} \cdot \mathbf{L}_{\otimes} + \hat{V}(\mathbf{R},\mathbf{R}_{12},\varphi_{\otimes}) + E_0 \quad , \tag{5.1}$$

die aus den genannten Gründen konstanten Anteile zur inneren Energie addiert und man erhält das Energieintegral, bezogen auf ein ***Quasi-Inertialsystem*** in der folgenden Form, wenn noch die (dynamischen) Geschwindigkeiten statt der Impulse nach Formel (3.9) eingeführt werden:

$$E(\mathbf{V},\mathbf{V}_{12},\mathbf{R},\mathbf{R}_{12},\varphi_{\otimes}) = \frac{M}{2}\mathbf{V}^2 + \frac{\mu_{12}}{2}\mathbf{V}_{12}^2 + \hat{V}(\mathbf{R},\mathbf{R}_{12},\varphi_{\otimes}) = \text{const} \quad . \tag{5.2}$$

Da sich dieses ***Energieintegral*** auf ein Quasi-Inertialsystem bezieht, müssen die Potentialkoeffizienten nach Formel (6.4) vom erdfesten Bezugssystem in das Quasi-Inertialsystem transformiert werden. Durch Einführung der kinematischen Geschwindigkeiten wird das Energieintegral zu einem ***Bewegungsintegral***:

$$E(\dot{\mathbf{R}},\dot{\mathbf{R}}_{12},\mathbf{R},\mathbf{R}_{12},\varphi_\otimes)=\frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2+\frac{\mu_{12}}{2}\dot{\mathbf{R}}_{12}^2+\hat{V}(\mathbf{R},\mathbf{R}_{12},\varphi_\otimes)=\text{const} \quad . \tag{5.3}$$

Bezieht man die Relativbewegungen $\mathbf{R}(t)$ und $\mathbf{R}_{12}(t)$ auf ein (beispielsweise konstant) ***rotierendes Bezugssystem***, so kann mit Hilfe der ***Gibbsschen Funktion*** nach Formel (4.1),

$$E'(\mathbf{P}',\mathbf{P}_{12}'^2,\mathbf{R}',\mathbf{R}_{12}')=\frac{1}{2}\frac{\mathbf{P}'^2}{M}+\frac{1}{2}\frac{\mathbf{P}_{12}'^2}{\mu_{12}}-\mathbf{P}'\cdot(\Omega\times\mathbf{R}')-\mathbf{P}_{12}'\cdot\left(\Omega\times\mathbf{R}_{12}'\right)+\hat{V}'(\mathbf{R}',\mathbf{R}_{12}')+E_0 \ , \tag{5.4}$$

und der Formeln für die dynamischen Geschwindigkeiten $\mathbf{V}',\mathbf{V}_{12}'$ bzgl. des rotierenden Bezugssystems,

$$\mathbf{V}'=\frac{\partial E'}{\partial \mathbf{P}'}=\frac{\mathbf{P}'}{M}-\Omega\times\mathbf{R}' \ , \quad \mathbf{V}_{12}'=\frac{\partial E'}{\partial \mathbf{P}_{12}'}=\frac{\mathbf{P}_{12}'}{\mu_{12}}-\Omega\times\mathbf{R}_{12}' \ , \tag{5.5}$$

das folgende ***Energieintegral*** erhalten werden:

$$E'(\mathbf{V}',\mathbf{V}_{12}',\mathbf{R}',\mathbf{R}_{12}')=\frac{M}{2}\mathbf{V}'^2-\frac{M}{2}(\Omega\times\mathbf{R}')^2+\frac{\mu_{12}}{2}\mathbf{V}_{12}'^2-\frac{\mu_{12}}{2}\left(\Omega\times\mathbf{R}_{12}'\right)^2+\hat{V}'(\mathbf{R}',\mathbf{R}_{12}')=\text{const} \ , \tag{5.6}$$

Man beachte, daß bzgl. des konstant rotierenden Bezugssystems die Potentialkoeffizienten des Gravitationsfeldes der Erde konstant sind. Durch Einführung der kinematischen Geschwindigkeiten wird das Energieintegral zu einem ***Bewegungsintegral***:

$$E'(\dot{\mathbf{R}}',\dot{\mathbf{R}}_{12}',\mathbf{R}',\mathbf{R}_{12}')=\frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}'^2-\frac{M}{2}(\Omega\times\mathbf{R}')^2+\frac{\mu_{12}}{2}\dot{\mathbf{R}}_{12}'^2-\frac{\mu_{12}}{2}\left(\Omega\times\mathbf{R}_{12}'\right)^2+\hat{V}'(\mathbf{R}',\mathbf{R}_{12}')=\text{const} \ . \tag{5.7}$$

Eine weitere Separierung des Bewegungsintegrals in zwei Anteile, die jeweils lediglich von einer der beiden Jacobi-Koordinaten abhängen, ist wegen der Kopplung über die potentielle Energie der Gravitationswechselwirkung $\hat{V}'(\mathbf{R}',\mathbf{R}_{12}')$ nicht möglich. Dies gelingt nur unter der speziellen Annahme, daß beide Bewegungsanteile keinen Einfluß aufeinander ausüben, daß also jeweils eine Jacobi-Koordinate während des Bewegungsablaufes konstant bleibt.
Man erhält bei einem bzgl. des erdfesten Bezugssystems konstanten Vektor $\mathbf{R}_{12}'$ den Erhaltungssatz:

$$E'(\dot{\mathbf{R}}',\mathbf{R}')=\frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}'^2-\frac{M}{2}(\Omega\times\mathbf{R}')^2-\tilde{V}'_{(\otimes,1,2)}(\mathbf{R}') \ =\text{const} \ , \tag{5.8}$$

Beachtet man, daß in diesem Fall der Term

$$W_{(\otimes,1,2)}(\mathbf{R}')=\frac{1}{2}(\Omega\times\mathbf{R}')^2+\frac{1}{M}\tilde{V}'_{(\otimes,1,2)}(\mathbf{R}') \ , \tag{5.9}$$

das Schwerepotential der Erde ist, mit dem Gravitationspotential $\tilde{V}'_{(\otimes,1,2)}(\mathbf{R}') \,/\, M$, ausgewertet nach Formel (6.21) mit $|\mathbf{R}_{12}'|=0$, so ergibt sich ein Erhaltungssatz, der dem ***Jacobi-Integral*** entspricht:

$$E'(\dot{\mathbf{R}}',\mathbf{R}')=\dot{\mathbf{R}}'^2-2W_{(\otimes,1,2)}(\mathbf{R}') \ = \ \text{const} \ , \tag{5.10}$$

Für diesen speziellen Fall kann das Energieintegral (5.4) unter Beachtung von $\mathbf{P}'=\mathbf{P}$ und $\mathbf{P}=M\mathbf{V}$ und einem Rotationsvektor $\Omega=\omega\,\mathbf{e}_z$ umgeformt werden:

$$E'(\mathbf{V},\mathbf{R}')=\frac{M}{2}\mathbf{V}^2-M\omega\,\mathbf{e}_z\cdot(\mathbf{R}'\times\mathbf{V})+\hat{V}'(\mathbf{R}')=\text{const} \ , \tag{5.11}$$

Der Term $\mathbf{e}_z\cdot(\mathbf{R}'\times\mathbf{V})$ ist die Koordinate des Bahndrehimpulses des Massenzentrums in *z*-Richtung. Sie ist für axialsymmetrische Felder eine Erhaltungsgröße (siehe z.B. Schneider, 1992) und kann mit der Konstanten auf der rechten Seite zusammengefaßt werden. Im Falle eines axialsymmetrischen Gravitationsfeldes nimmt das Energieintegral also die folgende Form an:

$$E'(\mathbf{V},\mathbf{R}')=\frac{M}{2}\mathbf{V}^2+\hat{V}(\mathbf{R}')=\text{const} \ , \tag{5.12}$$

Dies ist die totale Bahnenergie des Massenzentrums der Satelliten 1 und 2. In einem axialsymmetrischen Gravitationsfeld, wobei die Symmetrieachse mit dem Rotationsvektor des rotierenden Bezugssystems übereinstimmt, findet somit kein Energieaustausch mit dem Gravitationsfeld statt.
Für einen bzgl. dem erdfesten Bezugssystems konstanten Vektor $\mathbf{R}'$, also beispielsweise im Falle einer Kreisbahn folgt der Erhaltungssatz:

$$E'(\dot{\mathbf{R}}'_{12},\mathbf{R}'_{12}) = \frac{\mu_{12}}{2}\dot{\mathbf{R}}'^2_{12} - \frac{\mu_{12}}{2}\left(\Omega \times \mathbf{R}'_{12}\right)^2 + \hat{V}'(\mathbf{R}',\mathbf{R}'_{12}) = \text{const} \ , \tag{5.13}$$

Die potentielle Energie der Gravitationswechselwirkung $\hat{V}'(\mathbf{R}',\mathbf{R}'_{12})$ kann auch durch die Potentialfunktion (6.12) ersetzt werden, so daß man als Energieintegral erhält:

$$E'(\dot{\mathbf{R}}'_{12},\mathbf{R}'_{12}) = \frac{\mu_{12}}{2}\dot{\mathbf{R}}'^2_{12} - \frac{\mu_{12}}{2}\left(\Omega \times \mathbf{R}'_{12}\right)^2 - \tilde{V}'_{(12)}(\mathbf{R}',\mathbf{R}'_{12}) = \text{const} \ , \tag{5.14}$$

Das Jacobi-Integral (5.10) gilt für die Bahnbewegung jedes der beiden Satelliten. Bildet man die Differenz, so ergibt sich ein weiteres Energieintegral:

$$E'(\dot{\mathbf{R}}'_1,\mathbf{R}'_1,\dot{\mathbf{R}}'_2,\mathbf{R}'_2,) = \dot{\mathbf{R}}'_{12}\cdot\left(\dot{\mathbf{R}}'_2 + \dot{\mathbf{R}}'_1\right) - 2\left(W_{(\otimes,1,2)}(\mathbf{R}'_2) \ - W_{(\otimes,1,2)}(\mathbf{R}'_1) \ \right) = \ \text{const} \ . \tag{5.15}$$

6 Modellierung der potentiellen Energie

Gelingt es, die potentielle Energie der Gravitationswechselwirkung durch die Jacobi-Koordinaten auszudrücken, so können die Kräfte (bzw. Drehmomente) als intensive Variable durch partielle Ableitungen der Gibbsschen Funktion nach den konjugierten extensiven Variablen abgeleitet werden. In der Geodäsie verwendet man vorzugsweise Reihenentwicklungen nach Kugelfunktionen. Geht man im vorliegenden Fall von der Formel für die potentielle Energie der Gravitationswechselwirkung aus, so können die einzelnen Summanden auf der rechten Seite

$$\hat{V}(\mathbf{r}_j, j=\otimes,1,2;\varphi_\otimes) = \hat{V}_{\otimes 1}(\mathbf{r}_\otimes,\mathbf{r}_1,\varphi_\otimes) + \hat{V}_{\otimes 2}(\mathbf{r}_\otimes,\mathbf{r}_2,\varphi_\otimes) + \hat{V}_{12}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \ . \tag{6.1}$$

beispielsweise die potentielle Energie der Erde und des Satelliten 1 aus der folgenden Formel (mit $\mathbf{R}_1\left(R_1,\vartheta_1,\lambda_1\right) = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_\otimes$) erhalten werden:

$$\hat{V}_{\otimes 1}(\mathbf{r}_\otimes,\mathbf{r}_1,\varphi_\otimes) = -\frac{GM_1M_\otimes}{R_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_\otimes}{R_1}\right)^n \sum_{m=-n}^{n}\kappa_{nm}\left(\varphi_\otimes\right) Y_{nm}\left(\vartheta_1,\lambda_1\right) \tag{6.2}$$

Die Funktionen $Y_{nm}\left(\vartheta_1,\lambda_1\right)$ sind die komplexen Kugelflächenfunktionen des Grades n und der Ordnung m, für $n \geq 0$ und $-n \leq m \leq n$,

$$Y_{nm}(\vartheta,\lambda) = P_n^m(\cos\vartheta)e^{im\lambda}, \qquad Y_{n,-m}(\vartheta,\lambda) = P_n^{-m}(\cos\vartheta)e^{-im\lambda} = (-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\vartheta)e^{-im\lambda} \quad , \tag{6.3}$$

und $\kappa_{nm}\left(\varphi_\otimes\right), \ \ n \geq 0, -n \leq m \leq n$ die komplexen Potentialkoeffizienten. Wird ein raumfestes Koordinatensystem zugrunde gelegt, so hängen die Potentialkoeffizienten von der jeweiligen Orientierung $\varphi_\otimes$ der Erde bzgl. des Quasi-Inertialsystems ab und sind damit zeitabhängig. Geht man (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) von einer konstanten Drehung der Erde um die z-Achse aus (Winkelgeschwindigkeit ω), so transformieren sich die Potentialkoeffizienten κ'_{nm}, bezogen auf ein erdfestes Koordinatensystem wie folgt:

$$\kappa_{nm} = e^{-im\omega t}\kappa'_{nm} \tag{6.4}$$

Eine entsprechende Formel wie (6.2) gilt für $\hat{V}_{\otimes 2}(\mathbf{r}_\otimes,\mathbf{r}_2,\varphi_\otimes)$. Die potentielle Energie der Gravitationswechselwirkung der beiden Satelliten ergibt sich zu (mit $\mathbf{R}_{12}\left(R_{12},\vartheta_{12},\lambda_{12}\right) = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$)

$$\hat{V}_{12}(\mathbf{R}_{12}) = -\frac{GM_1M_2}{R_{12}} \quad . \tag{6.5}$$

Die Kugelfunktionen können mittels der Transformationsformel (siehe z.B. Giacaglia, 1980)

$$\frac{1}{R_{\otimes 2}^{n+1}} Y_{nm}(\vartheta_{\otimes 2}, \lambda_{\otimes 2}) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^{p} (-1)^{p+q} \frac{(n-m+p+q)!}{(n-m)!(p+q)!} R_{12}^p Y_{pq}(\vartheta_{12}, \lambda_{12}) \frac{1}{R_{\otimes 1}^{n+p+1}} Y_{n+p,m-q}(\vartheta_{\otimes 1}, \lambda_{\otimes 1}) \tag{6.6}$$

zunächst auf den Ort des Satelliten 1 bezogen werden:

$$\begin{aligned} \hat{V}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{12}, \varphi_\otimes) = -GM_\otimes \sum_{n=0}^{\infty} a_\otimes^n \sum_{m=-n}^{n} \kappa_{nm}(\varphi_\otimes) \cdot \\ \cdot \left[M_2 \left(\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=-p}^{p} (-1)^{p+q} \frac{(n-m+p+q)!}{(n-m)!(p+q)!} \frac{1}{R_{\otimes 1}^{n+p+1}} Y_{n+p,m-q}(\vartheta_{\otimes 1}, \lambda_{\otimes 1}) R_{12}^p Y_{pq}(\vartheta_{12}, \lambda_{12}) \right) + \right. \\ \left. + (M_1 + M_2) \frac{1}{R_{\otimes 1}^{n+1}} Y_{nm}(\vartheta_{\otimes 1}, \lambda_{\otimes 1}) \right] - \frac{GM_1M_2}{R_{12}} . \end{aligned} \tag{6.7}$$

und wenn beachtet wird, daß für die Relativkoordinaten die folgende Beziehung gilt,

$$\mathbf{R}_{\otimes 1}(R_{\otimes 1}, \vartheta_{\otimes 1}, \lambda_{\otimes 1}) = \mathbf{R}(R, \vartheta, \lambda) - \frac{M_2}{M_1 + M_2} \mathbf{R}_{12}(R_{12}, \vartheta_{12}, \lambda_{12}) . \tag{6.8}$$

mit Hilfe der Transformationsformel

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{\otimes 1}^{n+p+1}} Y_{n+p,m-q}(\vartheta_{\otimes 1}, \lambda_{\otimes 1}) = \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^{l} (-1)^k \frac{(n+p-m+q+l+k)!}{(n+p-m+q)!(l+k)!} \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^l R_{12}^l Y_{lk}(\vartheta_{12}, \lambda_{12}) \frac{1}{R^{n+p+l+1}} Y_{n+p+l,m-q-k}(\vartheta, \lambda) \end{aligned} \tag{6.9}$$

auf den Massenmittelpunkt der beiden Satelliten 1 und 2. Allerdings ist die so erhaltene Formel verhältnismäßig kompliziert auszuwerten.
Für die praktische Anwendung scheint insbesondere für die Relativbewegung der beiden Satelliten eine alternative Potentialfunktion der Kräftefunktion

$$\mathbf{K}_{(12)} = \nabla_{\mathbf{R}_{12}} \tilde{V}_{(1,2)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{12}, \varphi_\otimes) , \tag{6.10}$$

zweckmäßiger zu sein. Die Potentialfunktion setzt sich aus zwei Anteilen zusammen,

$$\tilde{V}_{(1,2)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{12}, \varphi_\otimes) = \tilde{V}_{(12)\otimes}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{12}, \varphi_\otimes) + \tilde{V}_{12}(\mathbf{R}_{12}) \ , \tag{6.11}$$

der Potentialfunktion der Gezeitenkraft

$$\tilde{V}_{(12)\otimes}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{12}, \varphi_\otimes) = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \hat{V}_{\otimes 1} - \frac{M_1}{M_1 + M_2} \hat{V}_{\otimes 2} \ , \tag{6.12}$$

und dem Term $\tilde{V}_{12}(\mathbf{R}_{12})$, der die potentielle Energie der Gravitationswechselwirkung der beiden Körper und 2 beschreibt. Die Potentialfunktion der Gezeitenkraft kann im Falle der beiden Punktmassen und 2 durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen dargestellt werden (vergleiche z.B. Ilk, 1983c; dort wurde sie mit negativem Vorzeichen als potentielle Energie der Gezeitenkraft eingeführt):

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{(12)\otimes}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{12}, \varphi_\otimes) = GM_\otimes \mu_{12} \sum_{n=0}^{\infty} a_\otimes^n \sum_{m=-n}^{n} \kappa_{nm}(\varphi_\otimes) \cdot \\ \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=-p}^{p} (-1)^{p+q} \frac{(n-m+p+q)!}{(n-m)!(p+q)!} \frac{1}{R_{\otimes 1}^{n+p+1}} Y_{n+p,m-q}(\vartheta_{\otimes 1}, \lambda_{\otimes 1}) R_{12}^p Y_{pq}(\vartheta_{12}, \lambda_{12}) . \end{aligned} \tag{6.13}$$

Man erhält die Gezeitenkraft durch Bildung des Gradienten der Potentialfunktion:

$$\mathbf{G}_{(21)\otimes} = \nabla_{\mathbf{R}_{12}} \tilde{V}_{(12)\otimes}(\mathbf{R},\mathbf{R}_{12},\varphi_\otimes) = GM_\otimes \mu_{12} \sum_{n=0}^{\infty} a_\otimes^n \sum_{m=-n}^{n} \kappa_{nm}(\varphi_\otimes) \cdot$$
$$\cdot \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=-p}^{p} (-1)^{p+q} \frac{(n-m+p+q)!}{(n-m)!(p+q)!} \frac{1}{R_{\otimes 1}^{n+p+1}} Y_{n+p,m-q}(\vartheta_{\otimes 1},\lambda_{\otimes 1}) \nabla_{\mathbf{R}_{12}} \left(R_{12}^p Y_{pq}(\vartheta_{12},\lambda_{12}) \right). \tag{6.14}$$

mit dem Gradienten

$$\nabla_{\mathbf{R}_{12}} \left(R_{12}^p Y_{pq}(\vartheta_{12},\lambda_{12}) \right) = \frac{R_{12}^{p-1}}{2} \begin{pmatrix} (p+q)(p+q-1) Y_{p-1,q-1}(\vartheta_{12},\lambda_{12}) - Y_{p-1,q+1}(\vartheta_{12},\lambda_{12}) \\ i\left((p+q)(p+q-1) Y_{p-1,q-1}(\vartheta_{12},\lambda_{12}) + Y_{p-1,q+1}(\vartheta_{12},\lambda_{12}) \right) \\ 2(p+q) Y_{p-1,q}(\vartheta_{12},\lambda_{12}) \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

Für das Drehmoment der Gezeitenkraft folgt entsprechend:

$$\mathbf{M}_{(12)} = \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{V}_{(12)\otimes}(\mathbf{R},\mathbf{R}_{12},\varphi_\otimes) = \mathbf{R}_{12} \times \mathbf{G}_{(21)\otimes} = GM_\otimes \mu_{12} \sum_{n=0}^{\infty} a_\otimes^n \sum_{m=-n}^{n} \kappa_{nm}(\varphi_\otimes) \cdot$$
$$\cdot \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=-p}^{p} (-1)^{p+q} \frac{(n-m+p+q)!}{(n-m)!(p+q)!} \frac{1}{R_{\otimes 1}^{n+p+1}} Y_{n+p,m-q}(\vartheta_{\otimes 1},\lambda_{\otimes 1}) (\mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}}) \left(R_{12}^p Y_{pq}(\vartheta_{12},\lambda_{12}) \right). \tag{6.16}$$

mit

$$(\mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}}) \left(R_{12}^p Y_{pq}(\vartheta_{12},\lambda_{12}) \right) = R_{12}^p \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \left(Y_{p,q+1}(\vartheta_{12},\lambda_{12}) + (p+q)(p-q+1)\, Y_{p,q-1}(\vartheta_{12},\lambda_{12}) \right) \\ -\frac{1}{2} \left(Y_{p,q+1}(\vartheta_{12},\lambda_{12}) - (p+q)(p-q+1)\, Y_{p,q-1}(\vartheta_{12},\lambda_{12}) \right) \\ i\, q\, Y_{pq}(\vartheta_{12},\lambda_{12}) \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

Der Term $\tilde{V}_{12}(\mathbf{R}_{12})$ in Formel (6.11) beschreibt die Potentialfunktion der Gravitationswechselwirkung der beiden Satelliten, betrachtet als Punktmassen,

$$\tilde{V}_{12}(\mathbf{R}_{12}) = \frac{GM_1 M_2}{R_{12}} \ . \tag{6.18}$$

Eine entsprechende alternative Potentialfunktionen für die Kräftefunktion, die für die Relativbewegung des Massenzentrums der beiden Satelliten 1 und 2 bzgl des Geozentrums benötigt wird, erhält man auf folgende Weise:

$$\mathbf{K}_{(\otimes,1,2)} = \nabla_{\mathbf{R}} \tilde{V}_{(\otimes,1,2)}(\mathbf{R},\mathbf{R}_{12},\varphi_\otimes), \tag{6.19}$$

mit der Potentialfunktion,

$$\tilde{V}_{(\otimes,1,2)}(\mathbf{R},\mathbf{R}_{12},\varphi_\otimes) = \hat{V}_{\otimes 1} + \hat{V}_{\otimes 2} \ , \tag{6.20}$$

bzw. in einer Entwicklung nach Kugelfunktionen:

$$\tilde{V}_{(\otimes,1,2)}(\mathbf{R},\mathbf{R}_{12},\varphi_\otimes) = GM_2 M_\otimes \sum_{n=0}^{\infty} a_\otimes^n \sum_{m=-n}^{n} \kappa_{nm}(\varphi_\otimes) \cdot$$
$$\cdot \left[\left(\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=-p}^{p} (-1)^{p+q} \frac{(n-m+p+q)!}{(n-m)!(p+q)!} \frac{1}{R_{\otimes 1}^{n+p+1}} Y_{n+p,m-q}(\vartheta_{\otimes 1},\lambda_{\otimes 1}) R_{12}^p Y_{pq}(\vartheta_{12},\lambda_{12}) \right) + \right. \tag{6.21}$$
$$\left. + \frac{(M_1+M_2)}{M_2} \frac{1}{R_{\otimes 1}^{n+1}} Y_{nm}(\vartheta_{\otimes 1},\lambda_{\otimes 1}) \right].$$

7 Zusammenfassung

Die abgeleiteten Bilanzgleichungen für den Energieaustausch gelten für jeden Zeitpunkt während des Bewegungsablaufes. Dasselbe gilt für die Gibbsschen Funktionen bzw. für die Energie- und Bewegungsintegrale. Damit kann die Konsistenz von beobachteten kinematischen Bewegungsgrößen mit den Parametern überprüft werden, die zur Beschreibung des Gravitationsfeldes eingeführt wurden. Die Konsistenzprüfung kann dabei für jeden Zeitpunkt des Bewegungsablaufes vorgenommen werden. Dies ist nicht ohne weiteres möglich, wenn eine Überprüfung durch die Lösung der Bewegungsgleichungen, beispielsweise durch numerische Integration erfolgt, da sich Abweichungen zu einem gewissen Zeitpunkt auf den weiteren Bahnverlauf auswirken. Ein Vergleich verschiedener Feldparameterbestimmungen weist dagegen den Nachteil auf, daß immer auch Regularisierungseffekte des instabilen Fortsetzungsprozesses nach unten zu gewissen Abweichungen beitragen können. Mit den Energie- und Energieaustauschbeziehungen steht ein Instrument zur Verfügung, das zur Verifizierung von Gravitationsfeldparametern dienen kann. Eventuell auftretende Abweichungen weisen darauf hin, daß am Energieaustausch weitere physikalische Systeme beteiligt waren. Dies wird in der Realität auch immer der Fall sein, da die effektiven Kräftefunktionen außer den gravitativen Wechselwirkungen weitere Anteile enthalten. Bei Verwendung der Energie- und Bewegungsintegrale muß allerdings beachtet werden, daß sich die axialsymmetrischen Anteile des Gravitationsfeldes in gewissen Bewegungsgrößen nicht bemerkbar machen. Numerische Erfahrungen einer solchen Verfizierung stehen noch aus.

Literaturverzeichnis

Falk, G.: *Theoretische Physik auf der Grundlage einer allgemeinen Dynamik, Heidelberger Taschenbücher, Band 7: Punktmechanik, Band 8: Aufgaben, Band 27: Thermodynamik, Band 28: Aufgaben*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966, 1968

Falk, G.: *Physik, Zahl und Realität*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1990

Falk, G., Ruppel, W.: *Mechanik, Relativität, Gravitation,*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973

Falk, G., Ruppel, W.: *Energie und Entropie*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976

Giacaglia, G.E.O.: *Transformations of spherical harmonics and applications to geodesy and satellite theory*, Studia Geophys. et Geod., Vol 24, pp. 1-11, 1980

Ilk, K.H.: *Eine Anmerkung zur Anwendung des Energieintegrals im Rahmen des SST-Verfahrens*, Veröff. Bayer. Kommission Int. Erdmess., Astron.-geod. Arb., Nr. 42, S. 123ff., München, 1982

Ilk, K.H.: *Formulierung von Energieaustauschbeziehungen zur Ausmessung des Gravitationsfeldes*, Veröff. Bayer. Kommission Int. Erdmess., Astron.-geod. Arb., Nr. 43, S. 128-166., München, 1983a

Ilk, K.H.: *On the Dynamics of a System of Rigid Bodies*, Manuscripta Geodaetica, Vol. 8, pp. 139-198, Stuttgart, 1983b

Ilk, K.H.: *Ein Beitrag zur Dynamik ausgedehnter Körper - Gravitationswechselwirkung*, DGK, Reihe C, Heft Nr. 288, München, 1983c

Jekeli, Ch.: *The determination of gravitational potential differences from satellite-to-satellite tracking*, submitted to Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1998

Schneider, M.: *Himmelsmechanik I - IV*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 1992 - 1999