

Die Suche nach groben Fehlern
in photogrammetrischen Lageblöcken

Von der Universität Stuttgart (TH)
zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

vorgelegt von
Dipl.-Ing. Wolfgang Förstner
geboren zu Bad Essen

München 1978

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

ISBN 376969295 0

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:

DEUTSCHE GEODÄTISCHE KOMMISSION

Marshallplatz 8, D-8000 München 22

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. F. Ackermann

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. K. Linkwitz

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Februar 1976

© 1978 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet, die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

Druck: Gebr. Brunner, 8151 Wangau

ISBN 3 7696 9295 0

I N H A L T

	Seite
Zusammenfassung	5
1. Einleitung	5
2. Aufgabenstellung	7
 TEIL I: GRUNDLAGEN FÜR DIE FEHLERSUCHE	 8
1. Die Auswertung von Messungen	8
1.1 Die Schätzung der Unbekannten	8
1.2 Die Prüfung der Schätzung	10
1.2.1 Die Prüfung der Varianz	13
1.2.2 Die Prüfung der Verbesserungen	14
1.2.3 Die Prüfung der Koordinaten	17
2. Voraussetzungen für die Suche grober Fehler	18
2.1 Die Redundanz eines Meßsystems	18
2.2 Die charakteristischen Zahlen der Redundanz	19
2.2.1 Klasseneinteilung der Beobachtungen	19
2.2.2 Zum Begriff "Grober Fehler"	23
2.3 Mindestanforderungen an Meßsysteme	24
3. Methoden zur Suche grober Fehler	25
3.1 Stufenausgleichungen zur Suche grober Fehler	25
3.1.1 Fehlersuche nach einer Gesamtausgleichung	25
3.1.2 On-line-Verfahren	26
3.1.3 Fehlersuche in Subblöcken	27
3.2 Die Behandlung mehrerer grober Fehler	28
3.2.1 Die Auswahl der Tests	28
3.2.2 Die Lokalisierungswirksamkeit des einfachen Tests T_1^0 bei einem groben Fehler	29
3.2.3 Die Güte eines statistischen Tests $T_1^+(v_1)$ bei mehreren groben Fehlern	30
3.3 Zur Korrektur grober Fehler	32
 TEIL II: VORAUSSETZUNGEN FÜR DIE SUCHE GROBER FEHLER IN PHOTOGRAMMETRISCHEN LAGEBLÖCKEN	 33
1. Ziel der Untersuchung	33
2. Die Suche grober Fehler bei der Modellbildung	33
2.1 Die Modellbildung mit zwei Bildern	33
2.2 Die Modellbildung mit drei und mehr Bildern	35
3. Die Suche grober Fehler bei der ebenen Helmerttransformation	37
3.1 Die Abhängigkeit der Grenzwerte von der Punktzahl	37
3.2 Die Abhängigkeit der Grenzwerte von der Geometrie	38
4. Die Suche grober Fehler bei Lageblöcken	42
4.1 Die Auswahl der Blöcke	42
4.2 Freie Lageblöcke	44
4.2.1 Eine Abschätzung der Grenzwerte	44
4.2.2 Eine Abschätzung der charakteristischen Zahlen k und l	46
4.2.3 Der Einfluß der Lage der groben Fehler auf die Gewichtskoeffizienten	47
4.2.4 Der Einfluß der Punktanordnung im Modell auf die Gewichtskoeffizienten	49
4.2.5 Doppelbefliegungen	50
4.2.6 Möglichkeiten zur Erhöhung der Kontrollierbarkeit	52
4.2.6.1 Doppelbefliegungen	52
4.2.6.2 Messung von Doppelpunkten	53
4.2.6.3 Zusätzliche Modelle am Rand	54
4.3 Lageblöcke mit Paßpunkttrahmen	54
4.3.1 Die Gewichtskoeffizienten der Verknüpfungspunkte	56
4.3.2 Die Gewichtskoeffizienten der Paßpunkte	57
4.4 Gemischte Gewichtskoeffizienten	59
4.4.1 200-Modelle-Block mit schwacher Paßpunktbesetzung	59
4.4.2 Beispiel für die Suche eines groben Fehlers in einem freien Lageblock	61
4.5 Die Mindestgröße von Subblöcken für die Suche grober Fehler	65

TEIL III: TESTVERFAHREN BEI DER HELMERTTRANSFORMATION	67
1. Ziel der Untersuchung	67
2. Das Untersuchungskonzept	68
2.1 Wahl der Untersuchungsmethode	68
2.2 Programmbeschreibung	68
2.2.1 Datengenerierung	68
2.2.2 Helmerttransformation und Fehlersuche	69
2.2.3 Analyse	69
3. Vorbereitungen für die Helmerttransformation und die Fehlersuche	71
3.1 Das mathematische und das stochastische Modell	71
3.2 Bereitstellung der Rechenformeln	72
3.3 Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Testgröße w	73
4. Die Ergebnisse	74
4.1 Voruntersuchung	74
4.1.1 Die Wirksamkeit des statistischen Tests bei kleinen Punktgruppen	74
4.1.2 Die Wirksamkeit des statistischen Tests bei großen Punktgruppen	76
4.2 Detailuntersuchung kleiner Punktgruppen	76
4.2.1 Die Wirksamkeit von T_1^+	76
4.2.1.1 Die Auswahl grober Fehler	76
4.2.1.2 Der Einfluß der Punktzahl	77
4.2.1.3 Der Einfluß des Winkels zwischen den groben Fehlern	79
4.2.1.4 Der Einfluß des Größenverhältnisses der groben Fehler	79
4.2.2 Erweiterung und Modifizierung der Tests	81
4.2.2.1 Formulierung der erweiterten Tests	81
4.2.2.2 Auswahl der groben Fehler	82
4.2.2.3 Der Einfluß der Punktzahl	85
4.2.2.4 Der Einfluß der Größe und des Größenverhältnisses auf die Wirksamkeit der Tests	85
4.2.2.5 Punktverwechslungen	85
4.3 Drei und mehr Fehler	86
5. Bestes Testverfahren bei der Helmerttransformation	87
Schlußfolgerungen	88
Literatur	90
Anhang: Die Gewichtskoeffizientenmatrix Q_{vv} bei der Modellbildung	92
Protokoll des Programms zur Suche grober Fehler bei der Helmerttransformation	96

Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit werden die Voraussetzungen und Möglichkeiten der automatisierten Suche grober Fehler in photogrammetrischen Lageblöcken untersucht. Mit Hilfe statistischer Methoden wird nachgewiesen, daß sich eine hohe Zuverlässigkeit photogrammetrisch bestimmter Koordinaten mit nur geringem zusätzlichem Meßaufwand erreichen läßt. Gegenüber herkömmlichen Tests ermöglicht die Verwendung statistisch fundierter Testverfahren dabei nicht nur die Lokalisierung wesentlich kleinerer grober Fehler, sondern auch die sichere Erfassung großer grober Fehler.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und die wertvollen Hinweise möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Ackermann vielmals danken.

Auch bin ich Herrn Prof. Dr.-Ing. G. Kupfer dafür dankbar, daß er mir die Rechenzeit am Rechenzentrum der Universität Bonn zur Verfügung stellte.

Einleitung

Die Bedeutung der analytischen Verfahren in der Photogrammetrie hat in den letzten Jahren durch die Verfeinerung der Auswertemethoden stark zugenommen. Die theoretischen und praktischen Untersuchungen über die Genauigkeit photogrammetrischer Koordinaten haben dazu ebenso beigetragen wie die Ausnutzung der modernen Rechenhilfsmittel [3], [16], [40].

Zahlreiche Programme für die Aerotriangulation lassen die Auswertung von photogrammetrischen Blöcken mit Hunderten von Modellen zu [4], [48].

Gleichzeitig ist es auch schwieriger geworden, die großen Datenmengen von groben Fehlern zu befreien. Die meisten Programme sehen eine manuelle Fehlersuche vor. So sind zwei bis drei, oft sogar mehr Wiederholungen der Berechnung erforderlich. Neben dieser unnötigen Verzögerung weisen die Koordinaten wegen unerkannter grober Fehler bei aller Präzision der Messung nicht die erreichbare Genauigkeit auf. Die Leistungsfähigkeit der Methode ist dadurch gemindert, wenn nicht gar in Frage gestellt.

Die vorhandenen automatischen Fehlersuchsysteme ([Davis, 1967], [Osakihuiwu, 1972], [Alimoradi, 1973], [Fanta, 1973], [Kraus/Krack, 1972]) haben daran nichts grundsätzlich geändert. Große grobe Fehler, d.h. Fehler über dem 50-fachen mittleren Meßfehler, lassen sich in manchen Fällen nur mit erheblicher Mühe lokalisieren. Denn sie verursachen nicht immer an der Stelle die größte Verzerrung des Ergebnisses, an der sie auftreten. Hoher Rechen- bzw. Programmieraufwand ([Davis], bzw. [Kraus/Krack]) scheint daher unumgänglich. Die Systeme sind außerdem entweder nur für große grobe Fehler konzipiert [Kraus/Krack] oder beruhen nicht auf objektiven d.h. statistischen Grundlagen. Kleine grobe Fehler im Grenzbereich zu den zufälligen Meßfehlern können daher mit diesen Methoden nicht erkannt werden. Soweit die Systeme den Anspruch stellen, auch diese Fehler zu finden, sind die Angaben, wie sicher im statistischen Sinn grobe Fehler gefunden werden bzw. wie groß die Fehler mindestens sein müssen, um entdeckt zu werden, zu optimistisch, oder diese Angaben fehlen ganz. Wohl das einzige photogrammetrische Editingsystem, das einen statistisch fundierten Test verwendet, hat Rosenfield [1967] veröffentlicht. Es basiert auf einem Programm, das die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen löst.

Für die Behandlung kleiner grober Fehler stehen an sich eine große Zahl statistischer Tests zur Verfügung. Bei den ersten Kriterien von Chauvenet, Pierce und Stone (vgl. |Czuber, 1891|, |Pearson-Sekhar, 1938|, |Rider, 1933|, |Böhm, 1958|), die seit dem Aufkommen der Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung im letzten Jahrhundert entwickelt wurden, hängt der kritische Bereich vom Signifikanzniveau des Tests ab. Ein festes Signifikanzniveau bietet klarere Vergleichsmöglichkeiten. Irwin (vgl. |Rider, 1933|) und Müller/Neumann/Storm |1973| geben Kriterien für Meßreihen mit zwei groben Fehlern an. Jordan (vgl. |Czuber, 1891|), später auch Gabriel |1948|, versuchten die Festlegung des Signifikanzniveaus durch die Annahme einer "durch einen Höchstfehler M begrenzten Verteilung" zu ersetzen, die sich mit wachsendem M einer Normalverteilung nähert.*)

Bei der Beurteilung von Lagedifferenzen, bei denen die Richtung unberücksichtigt bleibt, kann man dagegen keine Normalverteilung annehmen |G. Förstner, 1942| und so die üblichen Tests nicht ohne weiteres verwenden.

Die Fälle, in denen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Beobachtungen nur wenig oder nichts bekannt ist, erlauben parameterfreie Tests, wie z.B. Vorzeichen- oder Rangtests. Im Bereich geodätischer Messungen spielen sie eine untergeordnete Rolle.

Die genannten Kriterien sind für unabhängige Beobachtungen und fast ausnahmslos für Meßreihen mit nur einem groben Fehler konzipiert. Sind mehrere Fehler vorhanden, ist ihre Wirksamkeit nur sehr schwach |Pearson-Sekhar, 1938|. Das von Baarda |1967|, |1968| für Ausgleichungsergebnisse entwickelte Testverfahren, das "data-snooping", ist nach Kenntnis des Verfassers das einzige, das sich auch für die Prüfung von zwei oder mehr kleinen groben Fehlern eignet und außerdem Aussagen über die Testgüte zuläßt. Damit sind Angaben über die Zuverlässigkeit von Ausgleichungsergebnissen, d.h. über die Größe gerade noch erkennbarer grober Fehler und ihrer Einwirkung auf die Koordinaten möglich. Messungen können dann, wie in den Niederlanden für trigonometrische Arbeiten üblich, so geplant werden, daß eine gute Kontrolle gewährleistet ist.

*) Ein vergleichbares Ziel verfolgt die Methode von Reinhardt |1975|. Auf der Basis von Toleranzen für die Beobachtungswerte werden hierbei Maximalfehler für die Koordinaten bestimmt. Wenn grobe Fehler vorhanden sind, führt diese Art der Ausgleichung, die die Methoden der linearen Optimierung heranzieht, im Gegensatz zu herkömmlichen Verfahren zu keiner Lösung und ist somit für die Kontrolle der Beobachtungen gut geeignet.

Aufgabenstellung

In der vorliegenden Arbeit sollen die Voraussetzungen und die Möglichkeiten der automatisierten Fehlersuche in photogrammetrischen Lageblöcken untersucht werden. Trotz der Beschränkung auf die Lage sind die grundsätzlichen Aussagen auch auf räumliche Blöcke übertragbar.

Die Zuverlässigkeit *) der Koordinaten in Lageblöcken ist wichtigster Gegenstand der Untersuchung. Daneben muß die Lokalisierungswirksamkeit statistischer und nichtstatistischer Testverfahren beim Vorhandensein mehrerer grober Fehler bestimmt werden. Daraus ergeben sich schließlich Aussagen über zuverlässigere Meßanordnungen sowie Grundsätze für automatische Editingsysteme.

Teil I der Untersuchung behandelt zunächst die theoretischen Grundlagen, die im wesentlichen auf Baarda zurückgehen. Darauf aufbauend soll die Redundanz, die über die Möglichkeit, Fehler zu finden, nur global Aufschluß gibt, genauer gefaßt werden. Für die Automatisierung der Datenbereinigung sind dabei die Beobachtungen besonders wichtig, in denen Fehler lokalisiert werden können. Unter diesem Blickwinkel müssen auch die Strategien der Fehlersuche verglichen werden. Die Ausführungen sind allgemein gehalten und können auf jedes geodätische Meßsystem übertragen werden.

Teil II befaßt sich mit den Voraussetzungen für die Fehlersuche bei den wesentlichen Stufen innerhalb einer Lageblockausgleichung. Die Bestimmung der dafür notwendigen Gewichtskoeffizienten der Verbesserungen erfolgt teils theoretisch, wie bei der Modellbildung und der Helmerttransformation, teils auf dem Wege der Computersimulation, wie bei den Subblöcken. Besonderes Gewicht wird hier auf die Abhängigkeit der Größe erkennbarer Fehler von der Lage im Block, von der Zahl der Verknüpfungspunkte im Modell, von der Dichte der Paßpunktbesetzung und von der Fluganordnung gelegt. Die gemischten Gewichtskoeffizienten geben dabei Auskunft darüber, ob sich die groben Fehler verschieben und so mit einfachen, d.h. nichtstatistischen Testverfahren nicht entdeckt werden können.

Die Simulation von über 300 000 Fällen in Teil III ermöglicht den Vergleich der Wirksamkeit verschiedener Testverfahren bei der Helmerttransformation, wenn mehr als ein grober Fehler vorhanden ist und damit die den Tests zugrunde liegenden Alternativhypothesen nicht mehr zutreffen. Eine Modifizierung und eine theoretisch vorgezeichnete Erweiterung des statistischen Tests sind notwendig, um die Wirksamkeit zu erhöhen, so daß es möglich ist, auch die großen groben Fehler mit diesem Verfahren sicher zu erfassen.

Die Ergebnisse beider Teiluntersuchungen können als Grundlage für Fehlersuchsysteme dienen, die die Aufteilung eines Blocks in Subblöcke vorsehen, um einerseits die Rechenzeiten gering zu halten und andererseits auch die kleinen groben Fehler sicher finden zu können.

*) im Sinne von Baarda, s. I.2 (S. 22)

TEIL I: GRUNDLAGEN FÜR DIE SUCHE GROBER FEHLER

1. DIE AUSWERTUNG VON MESSUNGEN

Die Gesamtheit der Beobachtungen einer Messung läßt sich als stochastischer Prozeß deuten, wonach jede einzelne Beobachtung als zufällige Variable von Zeit, Ort, Instrument, Beobachter, Wetter u.a. abhängt. Für die Messung und ihre Auswertung ersetzt man die physikalische Wirklichkeit durch ein Modell. Jede Messung dient zur Bestimmung der unbekannt, direkt oder indirekt "beobachtbaren" Parameter des zugrunde gelegten Modells, in diesem Fall der Koordinaten.

Die Abhängigkeiten der Beobachtungen sind ebenso wie ihr Zusammenhang mit den Koordinaten nur näherungsweise oder unter bestimmten Bedingungen bekannt. Die notwendigen Vernachlässigungen im geometrischen Modell, das sich im mathematischen widerspiegelt, nennt man systematische Fehler. Grobe Fehler sind Irrtümer im mathematischen oder im stochastischen Modell, das die Fehlereigenschaften der Modellparameter beschreibt. Oft ist es nicht möglich, systematische und grobe Fehler zu trennen. Daraus folgt einerseits, daß Aussagen über grobe Fehler auch - evtl. modifiziert - für systematische Fehler gelten. Andererseits können deshalb in den folgenden Untersuchungen Ungenauigkeiten im mathematischen Modell nicht berücksichtigt werden.

Auf diesem Hintergrund verfolgt die Auswertung von Messungen zwei Ziele:

1. Die Schätzung der unbekannt Modellparameter,
2. Die Prüfung dieser Schätzung und somit die Prüfung des zugrunde gelegten Modells.

1.1 Die Schätzung der Unbekannten

Das der Auswertung zugrunde gelegte Modell, die Nullhypothese H_0 , sei folgendermaßen charakterisiert:

H_0 : Stochastisches Modell	
$D(L) = \tilde{\sigma}^2 P_{11}^{-1}$	$\tilde{\sigma}^2$ unbekannte Varianz einer Beobachtung mit dem Gewicht $p = 1$ (1)
	L normal verteilter Vektor der Beobachtungen; einzelne Beobachtungen werden mit l_i bezeichnet (Anzahl n)
	P bekannte Gewichtsmatrix von L
	D Dispersion
Mathematisches Modell	
$\tilde{L} = L + \tilde{V} = A\tilde{X} + K$	\tilde{V} unbekannte Verbesserungen (2)
$\hat{L} = L + \hat{V} = A\hat{X} + K$	\hat{V} deren Schätzung (3)
	\tilde{X} unbekannte Koordinaten (Anzahl u)
	\hat{X} deren Schätzung
	A bekannte Koeffizientenmatrix (Rang $(A) = u$)
	\tilde{L} unbekannte Beobachtungen
	\hat{L} deren Schätzung
	K Konstantenvektor
$E(\hat{V}) = \tilde{V} = 0; E(\hat{X}) = \tilde{X}; E(\hat{\sigma}^2) = \tilde{\sigma}^2$	E Erwartungswert (4)(5)(6)

H_0 beinhaltet mit Gl. (2) und (3) die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen. Diese Form ist für die automatische Bearbeitung besonders günstig und hat sich daher weitgehend durchgesetzt. Die Festlegung von H_0 durch Bedingungen zwischen den Beobachtungen klammern wir hier aus. Denn eine Übertragung vom Ansatz Gl. (2) auf diese Form der Ausgleichung ist eindeutig möglich.

Die konsistente und unverzerrte Schätzung für die unbekanntes Koordinaten, die zusätzlich deren Varianzen minimiert, lautet (K im folgenden vernachlässigt):

$$\begin{aligned}\hat{X} &= (A'P_{11}A)^{-1} A'P_{11}L \\ &= Q_{xx} A'P_{11}L\end{aligned}\quad (7)$$

Die Inverse Q_{xx} der Normalgleichungsmatrix $A'P_{11}A$ ist die Gewichtungskoeffizientenmatrix der unbekanntes X .

Aus Gl. (3) und (7) erhält man die Schätzung \hat{V} für die Verbesserungen:

$$\hat{V} = A\hat{X} - L = (AQ_{xx}A'P_{11} - E) L \quad (8)$$

Mit der Redundanz

$$r = n - u \quad (9)$$

ergibt sich die Schätzung $\hat{\sigma}^2$ für die Varianz $\tilde{\sigma}^2$ zu

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{V}'P_{11}\hat{V} / r \quad (10)$$

Die Matrix

$$A_0 = AQ_{xx}A'P_{11} \quad (11)$$

aus Gl. (8) ist die sogenannte "extraordinary unit matrix" [vgl. Linkwitz, 1960]. Sie ist ebenso wie $E - A_0$ idempotent, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}A_0A_0 &= A_0 \\ (E - A_0)(E - A_0) &= E - A_0\end{aligned}\quad (12)$$

Für die Prüfung der \hat{V} benötigen wir deren Gewichtungskoeffizienten

$$Q_{vv} = P_{11}^{-1} - AQ_{xx}A' = (E - A_0) Q_{11} \quad (13)$$

Mit Gl. (8) und (13) ergibt sich schließlich die für die weiteren Untersuchungen wichtige Beziehung:

$$\hat{V} = -Q_{vv}P_{11}L = -(E - A_0) L \quad (14)$$

Gl. (14) ermöglicht die Bestimmung der Elemente von $E - A_0$ durch Computersimulation (vgl. Teil II).

Wir haben vorausgesetzt, daß die Inverse der Normalgleichungsmatrix existiert. Hat $A'P_{11}A$ nicht den vollen Rang, z.B. falls es sich um eine "freie" Ausgleichung handelt, so verwendet man in Gl. (7) eine verallgemeinerte Inverse [Bjerhammar, 1958; Pelzer, 1974 u.a.]. Infolgedessen sind die Koordinaten keine schätzbaren Größen mehr [Grafarend und Schaffrin, 1974]:

$$E(\hat{x}) \neq \tilde{x}$$

Die Verbesserungen v , um die es in dieser Arbeit geht, sind jedoch immer unverzerrt, biasfrei schätzbar [Pelzer, 1974, S. 187]. Bei der Ausgleichung mit Bedingungen treten diese Schwierigkeiten nicht auf, da keine Koordinaten "bestimmt", sondern die Beobachtungen "abgestimmt" werden. So ist auch in jeder "freien" Ausgleichung Fehlersuche möglich,

1.2 Die Prüfung der Schätzung

Aus den Beobachtungen leitet man drei Größen ab, die Koordinaten \hat{X} , die Verbesserungen \hat{V} und die Varianz $\hat{\sigma}^2$. Mit Hilfe statistischer Tests kann man nun prüfen, ob die Schätzwerte der Nullhypothese widersprechen. Gegenüber der Berechnung geht man beim Testen in umgekehrter Reihenfolge vor:

1. Zuerst prüft man die Varianz, um die Genauigkeit der Messung abschätzen zu können oder um erste Hinweise auf die Brauchbarkeit des zugrundegelegten Modells zu erhalten.
2. Die Prüfung der Verbesserungen soll grobe oder systematische Fehler aufdecken.
3. Die Prüfung der Koordinaten, etwa bei Deformationsmessungen, nimmt man erst während der Analyse in einem der Messung übergeordneten System vor.

Bei Ablehnung der Nullhypothese kann man eine oder mehrere Alternativhypothesen H_a aufstellen. Sie hängen von der jeweiligen Fragestellung ab und können alle Annahmen in H_0 betreffen.

Wir beschränken uns hier auf die Annahme von groben Fehlern ∇L^* in den Beobachtungen L . Die Alternativhypothesen H_{a_p} (Index p), die nicht gleichzeitig aufgestellt zu sein brauchen, seien folgendermaßen definiert [Baarda, 1967, S. 22]:

$$H_{a_p}: \frac{\widetilde{\nabla_p L}}{\sigma} = C_p \nabla_p \quad \begin{array}{l} C_p \text{ Vektor} \\ \nabla_p \text{ Parameter} \\ \sigma = + \sqrt{\sigma^2} \end{array} \quad p = 1, 2, \dots \quad (15)$$

In Gl. (15) legt der Vektor $C_p \neq 0$ das Größenverhältnis der Erwartungswerte für die groben Fehler fest.

Der Vektor $\widetilde{\nabla_p}$ enthält alle vermuteten groben Fehler der p -ten Alternativhypothese. Das Verhältnis seiner Komponenten wird durch C_p beschrieben und mit der Standardabweichung σ normiert. Der Parameter ∇_p , über den in der Alternativhypothese nicht verfügt wird, bestimmt die absolute Größe der groben Fehler.

Beispiel:

1. Alternativhypothese H_{a_1} :

ein grober Fehler in der i -ten Beobachtung.

$$H_{a_1}: \frac{\widetilde{\nabla_1 l}}{\sigma} = c_1 \nabla_1$$

$$\text{mit } c_1 = (0, \dots, 0, \underset{-i}{1}, 0, \dots, 0) \quad (15a)$$

$$\text{oder } \widetilde{\nabla_1 l}_i = \sigma \nabla_1; \quad \widetilde{\nabla_1 l}_j = 0 \text{ für } j \neq i$$

*) ∇ (sprich; Nabla) ist nicht identisch mit dem Operator aus der Physik. Die Bezeichnung geht auf Baarda zurück und dient zur Unterscheidung von groben Fehlern ∇ und Differenzen Δ . ∇ wird als selbständiges Zahlzeichen (wie bei ∇_p) und auch als Bestandteil eines Zahlzeichens (wie bei $\nabla l \neq \nabla \cdot l$) verwendet.

2. Alternativhypothese H_{a_2} :

zwei grobe Fehler in der i-ten und k-ten Beobachtung, Fehler $\widetilde{\nabla}_2^1 \mathbf{1}_i$ verhält sich zu Fehler $\widetilde{\nabla}_2^1 \mathbf{1}_k$ wie 1 zu c.

$$H_{a_2}: \frac{\widetilde{\nabla}_2^1}{\sigma} = c_2 \nabla_2$$

mit $c_2 = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, c, 0, \dots, 0)$ (15b)
- i - - k -

oder $\widetilde{\nabla}_2^1 \mathbf{1}_i = \sigma \nabla_2$, $\widetilde{\nabla}_2^1 \mathbf{1}_k = \sigma \cdot c \cdot \nabla_2$
 $\widetilde{\nabla}_2^1 \mathbf{1}_j = 0$ für $j \neq i$ und $j \neq k$

Weil man nun bei der Schätzung der Koordinaten die Nullhypothese voraussetzt, jedoch H_a zutrifft, ist die Schätzung nach Gl. (7) nicht mehr unverzerrt. Den Bias kann man mathematisch angeben, wenn die groben Fehler die Gewichtsmatrix P_{11} und die Normalgleichungsmatrix $A'P_{11}A$ nicht beeinflussen; dies gilt also nur für kleine grobe Fehler!

Es gilt dann:

$$E(\hat{X} | H_{a_p}) = E(\hat{X} | H_0) + \widetilde{\nabla}_p X; \quad \widetilde{\nabla}_p X = Q_{xx} A' P_{11} \widetilde{\nabla}_p L \neq 0 \quad (16a,b)$$

$$E(\hat{V} | H_{a_p}) = E(\hat{V} | H_0) + \widetilde{\nabla}_p V; \quad \widetilde{\nabla}_p V = -Q_{vv} P_{11} \widetilde{\nabla}_p L \neq 0 \quad (17a,b)$$

$$E(\hat{\sigma}^2 | H_{a_p}) = E(\hat{\sigma}^2 | H_0) + \widetilde{\nabla}_p \sigma^2; \quad \widetilde{\nabla}_p \sigma^2 = \frac{\lambda}{r} \tilde{\sigma}^2, \quad (18a,b)$$

$$\lambda = N_{pp} \nabla_p^2 \neq 0, \quad N_{pp} = c_p' P_{11} Q_{vv} P_{11} c. \quad (18c,d)$$

$\widetilde{\nabla}_p X$ in Gl. (16) beschreibt die zu erwartende Einwirkung grober Fehler $\widetilde{\nabla}_p \mathbf{1}$ auf die unbekanntes Koordinaten. Die Matrix $Q_{xx} A' P_{11}$ enthält die sogenannten Einflußgrößen. Wir werden die Auswirkung grober Fehler auf die Koordinaten einer späteren Untersuchung überlassen.

$\widetilde{\nabla}_p V$ in Gl. (17) beschreibt die zu erwartende Einwirkung grober Fehler $\widetilde{\nabla}_p \mathbf{1}$ auf die Verbesserungen. Die Matrix $Q_{vv} P_{11}$ hängt ebenso wie die Einflußgrößen nicht von der Messung ab. So kann man schon im voraus sagen, ob grobe Fehler sich in den Verbesserungen zeigen oder nicht.

$\widetilde{\nabla}_p \sigma^2$ in Gl. (18) beschreibt die zu erwartende Einwirkung grober Fehler auf die Varianz. Der Wert λ/r ist der Betrag, um welchen die Testgröße $\theta_{\sigma^2} = \hat{\sigma}^2 / \sigma^2$ (vgl. 1.2.1) des Globaltests durch grobe Fehler verfälscht wird. λ wird auch als Nichtzentralitätsparameter einer Fisher-Verteilung bezeichnet, deren Erwartungswert $\neq 0$ ist (vgl. z.B. [Pelzer, 1971]). λ hängt von der Meßanordnung und dem Größenverhältnis der erwarteten groben Fehler, d.h. von N_{pp} und von der Größe der groben Fehler, d.h. von ∇_p ab.

Für die Prüfung der Schätzung bildet man möglichst konsistente, erwartungstreue, effiziente und bezüglich der jeweiligen Testgröße suffiziente Schätzfunktionen $\theta(L)$ und prüft diese an Stelle der ursprünglichen Beobachtungen. Außerdem legt man die Risiken α und β_p für Testfehler I. und II. Art fest.

α gibt die Wahrscheinlichkeit (P) an, mit der die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie zutrifft (Fehler I. Art). $1-\alpha$ nennt man das Signifikanzniveau des Tests:

$$1 - \alpha = P(\hat{\theta} < k | H_0), \quad (19a)$$

$$\alpha = P(\hat{\theta} > k | H_0). \quad (19b)$$

k nennt man den kritischen Wert. Der Bereich, der durch $\hat{\theta} > k$ gekennzeichnet wird, ist der kritische Bereich.

$1 - \beta_p$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Alternativhypothese verworfen wird, obwohl sie zutrifft (Fehler II. Art.). β_p wird Macht des Tests bezüglich der Alternative H_{ap} genannt und ist eine Funktion von H_{ap} , also auch von v_p (Gütefunktion):

$$1 - \beta_p = P(\hat{\theta} < k_p | H_{ap}), \quad (20a)$$

$$\beta_p = P(\hat{\theta} > k_p | H_{ap}). \quad (20b)$$

Bei gegebenem Mindestwert $\beta_{p,o}$ für die Sicherheit, H_0 abzulehnen, d.h. einen groben Fehler (H_{ap}) festzustellen, läßt sich aus Gl. (18c) der Mindestwert für den Parameter v_p , der Grenzwert $v_{p,o}$, bestimmen

$$v_{p,o} = \sqrt{\frac{\lambda_o}{N_{pp}}}, \quad (21a)$$

der gerade noch mit der Wahrscheinlichkeit $\beta_{p,o}$ durch den Test geprüft werden kann. Im einfachsten Fall, nämlich wenn nur ein grober Fehler angenommen wird (vgl. Gl. (15a), bildet

$$\boxed{v_{p,o}^1 = \sigma \cdot v_{p,o} = \sigma \sqrt{\frac{\lambda_o}{N_{pp}}}} \quad (21b)$$

die untere Grenze erkennbarer oder die obere Grenze nicht erkennbarer grober Fehler.

Üblicherweise bestimmt man (vgl. z.B. |Pelzer, 1971|) die Macht des Tests bei gegebener Alternativhypothese, Baarda schlägt jedoch den entgegengesetzten Weg vor, um gerade die Größe der Fehler angeben zu können, die durch den Test noch erkannt werden.

λ_o in Gl. (21) hängt ab vom Signifikanzniveau α_o , von der Mindestgröße $\beta_{p,o}$ für die Macht des Tests und von dessen Freiheitsgraden. Bei vorgegebenen α_o für den Einzeltest (s.u.) und β_o ist λ_o ebenso wie σ konstant. Wir fassen daher beide Werte zusammen. Mit

$$\boxed{\gamma_o = \sigma \sqrt{\lambda_o}} \quad (22)$$

geht Gl. (21b) in

$$v_{p,o}^1 = \gamma_o \sqrt{\frac{1}{N_{pp}}} \quad (23)$$

über. Die Grenzwerte $v_{p,o}^1$ dienen uns als Maß für die Kontrollierbarkeit von Beobachtungen (vgl. Teil II).

Für die folgende Untersuchung wählen wir:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_o = 0.1 \% \\ \beta_o = 80 \% \end{array}} \quad \text{und} \quad (24)$$

Daraus ergibt sich:

$k = 3.3 \sigma$ $\sqrt{\lambda_0} = 4 \text{ *)}$ $\gamma_0 = 4 \sigma.$	und	(25)
---	-----	------

Weitere Werte für λ_0 kann man der folgenden Tabelle entnehmen:

Tab. 1 Nichtzentralitätsparameter λ_0 für eindimensionalen Test (σ^2 bekannt) aus [Baarda, 1968, S. 21-23]

$\beta_0 \backslash \alpha_0$	0.01 %	0.1 %	1.0 %	5.0 %
70 %	19.5	14.6	9.6	6.2
80 %	22.3	<u>17.1</u>	11.7	7.8
90 %	26.8	20.9	14.9	10.5

Ein Beispiel soll die Bedeutung der verschiedenen Größen erläutern:

Zugrunde liegt wieder die Alternativhypothese H_a :
 "Ein grober Fehler v_{1i} ist vorhanden" (vgl. Gl. (15a), der Index p wird vorübergehend unterdrückt). Außerdem sei $P_{11} = E$. Dann folgt aus Gl. (18d)

$$N = Q_{v_i v_i}$$

Nun sei z.B.

$$Q_{v_i v_i} = 0.04 = 1/25,$$

ein Wert, wie er bei schwachbesetzten photogrammetrischen Blöcken oder bei Polygonnetzen vorkommt. Aus Gl. (17b) folgt, daß von einem groben Fehler sich nur 4 % in der zugehörigen Verbesserung niederschlagen. Gl. (23) besagt, daß in dieser Beobachtung ein grober Fehler unter

$$v_{01} = \gamma_0 \frac{1}{\sqrt{0.04}} = \gamma_0 \cdot 5 = 20 \sigma$$

nicht mit wenigstens 80 % Sicherheit gefunden werden kann, wenn der Test mit einem Signifikanzniveau von 99.9 % durchgeführt wird.

Da die $Q_{v_i v_i}$ immer ≤ 1 sind, bildet γ_0 eine untere Schranke für v_{01} . Sie wird nur erreicht, wenn $Q_{v_i v_i} = 1$ ist, d.h., wenn der wahre Wert der Beobachtung bekannt ist; dann kann ein Fehler von der Größe $v_{01} = \gamma_0 = 4 \sigma$ in 80 % aller Fälle vom Test aufgedeckt werden.

1.2.1 Die Prüfung der Varianz

Für die Prüfung der Varianz $\hat{\sigma}^2$ gegen einen vorgegebenen Wert σ^2 verwendet man die Testgröße

$$\theta_{\sigma^2} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} . \tag{26}$$

*) Genauer ist $\sqrt{\lambda_0} = 4.14$, wir rechnen mit dem gerundeten Wert $\sqrt{\lambda_0} = 4$.

Sie hat eine Fisher-Verteilung (F-Verteilung) mit r und ∞ Freiheitsgraden. Mit der Nullhypothese $H_0: E(\hat{\theta}) = 1$ ergibt sich bei einem einseitigen Test gegen $H_a: \hat{\sigma}^2 > \sigma^2$ der kritische Wert:

$$k_{\theta} = F_{1-\alpha, r, \infty} \quad (r=n-u) \quad (27)$$

Bei einer kleinen Zahl von Freiheitsgraden wird der Test unempfindlich: Bei Ablehnung von H_0 bleibt offen, ob mangelnde Genauigkeit oder grobe Fehler die Ursache sind.

1.2.2 Die Prüfung der Verbesserungen

Hat man begründeten Verdacht, daß die Nullhypothese nicht zutrifft, auch wenn möglicherweise $\hat{\sigma}^2$ nicht in den kritischen Bereich fällt, muß man sich zunächst gegen grobe Fehler absichern. Da man die wahren Werte \tilde{L} nicht kennt, stützt man sich auf die Schätzwerte $\hat{L} = L + \hat{V}$.

Bei der Ausgleichung unabhängiger direkter Beobachtungen gibt es zahlreiche Kriterien *) dafür, welche Beobachtungen als grob falsch anzusehen sind. Das hier verwendete "data-snooping" stellt einen Spezialfall eines allgemeinen Tests dar, der auf der in Gl. (15) formulierten Alternativhypothese basiert. Wenn man den Wert

$$\psi_p = -c_p' P_{11} \hat{V} \quad (28)$$

mit seiner Standardabweichung

$$\sigma_{\psi_p} = \sigma \sqrt{N_{pp}} \quad (29)$$

vergleicht, führt dies auf die Testgröße

$$w_p = \frac{-c_p' P_{11} \hat{V}}{\sigma \sqrt{N_{pp}}} \quad (30)$$

Gln. (28) bis (30) kann folgender Gedankengang zugrunde gelegt werden |Baarda, 1968, S. 13, 14|:

Die groben Fehler \widetilde{v}_p = $\sigma v_p c_p$ führen zu den Verbesserungen

$$\widetilde{v}_p^v = -Q_{vv} P_{11} \cdot \widetilde{v}_p^l = -Q_{vv} P_{11} c_p \sigma v_p$$

Diese werden mit den tatsächlichen Verbesserungen \hat{V} verglichen. Als Maß für die Übereinstimmung dient der Winkel δ_p zwischen den beiden Vektoren \widetilde{v}_p^v und \hat{V} . Es gilt für die homogenisierten Verbesserungen $\widetilde{v}_p^v P_{11}^{1/2}$ und $\hat{V} P_{11}^{1/2}$

$$\begin{aligned} \cos \delta_p &= \frac{(\widetilde{v}_p^v P_{11}^{1/2}) \cdot (P_{11}^{1/2} \hat{V})}{|\widetilde{v}_p^v P_{11}^{1/2}| \cdot |P_{11}^{1/2} \hat{V}|} \\ &= \frac{-c_p' P_{11} Q_{vv} P_{11} \hat{V} \sigma v_p}{\sqrt{(c_p' P_{11} Q_{vv}) P_{11} (Q_{vv} P_{11} c_p) \sigma^2 v_p^2} \sqrt{\hat{V}' P_{11} \hat{V}}} \end{aligned}$$

*) siehe Einleitung.

$$= \frac{-c_p' P_{11} \hat{v}}{\sqrt{N_{pp}} \sqrt{\hat{v}' P_{11} \hat{v}}}, \quad (31)$$

so daß

$$w_p = \cos \delta_p \sqrt{\frac{\hat{v}' P_{11} \hat{v}}{\sigma^2}} \quad (32)$$

- die in Gl. (30) genannte Testgröße - bei festem σ^2 und $\hat{v}' P_{11} \hat{v}$ nur von δ_p abhängt. Veranschaulicht bedeutet $\delta_p = 0$, daß das tatsächliche und das in H_{ap} angenommene Vektorfeld bis auf einen Maßstabsfaktor übereinstimmt. w_p^2 ist der Anteil der durch H_{ap} festgelegten Fehler an der normierten Fehlerquadratsumme.

Geht man von n Alternativhypothesen wie in Gl. (15) aus,

$$(C_1, \dots, C_n) = E \quad (33)$$

so führt Gl. (30) zu

$$w_i = \frac{-p_i \hat{v}_i}{\sigma_{p_i} \hat{v}_i} = \frac{-p_i \hat{v}_i}{\sigma \sqrt{(P_{11} Q_{VV} P_{11})_{ii}}} \quad (34)$$

und für $P = \text{diag}(p_i)$ zu

$$\boxed{w_i = \frac{-\hat{v}_i}{\sigma \hat{v}_i} = \frac{-\hat{v}_i}{\sigma \sqrt{Q_{V_i V_i}}} \quad (35)}$$

Der zu allen Testgrößen w gehörige kritische Wert ist

$$k_w = \sqrt{F_{1-\alpha_0, 1, \infty}}. \quad (36)$$

α_0 ist das Signifikanzniveau des Einzeltests (s.u.).

Die Prüfung der Verbesserungen mit Gln. (35) und (36) nennt Baarda "data-snooping".

Weil die Kenntnis des Größenverhältnisses der groben Fehler als bekannt vorausgesetzt wird, geht ein n-dimensionaler Test für alle groben Fehler in einen 1-dimensionalen Test über. Die Testgüte wird dadurch erhöht, grobe Fehler lassen sich leichter finden.

Im allgemeinen kann man jedoch keine Vektoren C_p angeben. Selbst wenn man annimmt, daß wie in Gl. (15b) nur zwei Beobachtungen grob falsch sind, müßte man theoretisch $\infty \binom{n}{2}$ Alternativen $H_a(i,k,c)$ für alle möglichen Größenverhältnisse c testen. Daher ist im allgemeinen nur eine "konventionelle" Gruppe |Baarda, 1968, S. 14| von Alternativen sinnvoll, wie sie in Gl. (15a) zusammen mit Gl. (33) formuliert ist; diese führt auf das "data-snooping" Gln. (34), (35), (36). Es entspricht nicht nur den in der Statistik üblichen Tests. Gln. (32) und (35) zeigen außerdem, daß diese Prüfung einer einzelnen Verbesserung v_i gleichbedeutend mit dem Vergleich des Vektorfeldes $-Q_{VV} P_{11} \hat{v}_i$ mit \hat{v} ist |vgl. Baarda, 1968, S. 17|.

Die für die Tests notwendigen Gewichtskoeffizienten kann man durch den Mittelwert ($P_{11} = E$)

$$\overline{Q_{VV}} = \frac{r}{n} \quad (37)$$

abschätzen |Wolf, 1968, S. 68|. Der mittlere Fehler der Verbesserungen beträgt dann durchschnittlich

$$\overline{\sigma_v} = \sigma \sqrt{\frac{r}{n}}$$

und stimmt mit der Relativgenauigkeit σ_{rel} überein |Ackermann, 1966|.

Fortsetzung des Beispiels:

Nach Gl. (35) und (36) weist eine Verbesserung von

$$v_1 > 3.3 \sigma \sqrt{0.04} = 0.66 \sigma = k_1 \quad (38a)$$

auf einen groben Fehler hin; der kritische Wert ist kleiner als σ ! Einer Verbesserung v_1 von 0.66σ entspricht ein grober Fehler von (Gl. (14))

$$\overline{v_{01}} = 0.66 \sigma / 0.04 = 16.6 \sigma.$$

Da v_1 von zufälligen Fehlern auch der übrigen Beobachtungen überlagert ist, lassen sich mit größerer als 80 %-iger Sicherheit erst Fehler ab $\overline{v_{01}} = 20 \sigma$ finden (s.o.).

Verwendet man statt $Q_{v_1} v_1$ den durchschnittlichen Gewichtskoeffizienten $\overline{Q_{VV}}$, der z.B. bei 25 % Überbestimmungen ($r/n = 0.25$) auf den kritischen Wert

$$k_1 = 3.3 \sigma \sqrt{0.25} = 1.65 \sigma$$

führt, dann sind Fehler ab

$$\overline{v_{01}} = 50 \sigma$$

erst erkennbar.

Oft verwendet man nicht den kritischen Wert k_1 aus Gl. (38a), sondern (Drei- σ -Regel)

$$k_1^* = 3 \sigma \quad (38)$$

und vernachlässigt den Einfluß $Q_{v_1} v_1$ der Ausgleichung auf die Genauigkeit der Verbesserungen. Einer Verbesserung $\overline{v_1} = k_1^*$ entspricht ein grober Fehler von

$$\overline{v_{01}}^* = 3 \sigma / 0.04 = 75 \sigma.$$

In diesem Fall kann man mit dem Test Fehler erst ab der Größenordnung von $\overline{v_{01}}^* = 100 \sigma$ (!) erkennen.

Mit der Testgröße w_1 (Gl. (35)) können also wesentlich kleinere Fehler erkannt werden, als bei dem sonst üblichen Testverfahren Gl. (38). Will man noch kleinere grobe Fehler als z.B. 20σ feststellen können, muß man die Meßanordnung so verändern, daß die Gewichtskoeffizienten $Q_{v_1} v_1$ größer werden (vgl. Teil II).

Das Signifikanzniveau $1-\alpha_0$ des Einzeltests (die Prüfung der Verbesserungen v_1) bringt man mit dem Signifikanzniveau α des Globaltests (der Prüfung der Varianz $\hat{\sigma}^2$) dadurch in Verbindung, daß der Global- und der Einzeltest gleiche Macht aufweisen:

$$\beta(\alpha_0, \beta_0, 1, \infty) = \beta(\alpha, \beta_0, r, \infty) \quad (39)$$

So wird erreicht, daß der Durchschnitt der kritischen Bereiche der Einzeltests und der kritische Bereich des Globaltests aufeinander abgestimmt sind. Die Folgen sind von großer Bedeutung für unsere weitere Argumentation: Entweder

wächst bei gegebenem α_0 mit der Redundanz r auch α , damit wird der Globaltest überempfindlich *); oder α_0 nimmt bei gegebenem α mit wachsendem r ab, damit werden jedoch die Vertrauensbereiche für die Einzeltests sehr groß, und eine Fehlerkontrolle ist nicht mehr möglich. Die Koppelung von Global- und Einzeltest durch (39) zwingt dazu, bei der Fehlersuche die Redundanz zu beschränken, so daß große Systeme aufgeteilt werden müssen, wenn man nicht auf den Globaltest ganz verzichten will.

1.2.3 Die Prüfung der Koordinaten

Die Prüfung der Koordinaten setzt die Elimination der groben Beobachtungsfehler voraus und ist insofern von der Prüfung der Verbesserungen unabhängig. Einen vergleichbaren statistischen Ansatz wie bei W. Baarda findet man in H. Pelzers Analyse von Deformationsmessungen |1971|.

Die Punktverschiebungen werden nach dieser Methode aus den Koordinaten X_1 und X_2 mit den zugehörigen Gewichtsmatrizen $Q_{x_1x_1}^{-1}$ und $Q_{x_2x_2}^{-1}$ zweier Meßperioden gewonnen. Der Test der Koordinatendifferenzen $D = X_2 - X_1$ zerfällt auch hier in einen Globaltest und mehrere Einzeltests.

Für den Globaltest wird die mittlere Klaffung

$$\hat{K}^2 = \frac{D' P_{DD} D}{h} \quad P_{DD} \text{ ist eine verallgemeinerte Inverse} \quad (40)$$

von $Q_{x_1x_1} + Q_{x_2x_2}$,

h Zahl der Freiheitsgrade von $D' P_{DD} D$

mit der mittleren Varianz $\hat{\sigma}^2$ aus der Ausgleichung beider Messungen, die zusammen f Freiheitsgrade besitzen, verglichen; die Testgröße

$$\theta_{K^2} = \frac{\hat{K}^2}{\hat{\sigma}^2} \quad (41)$$

hat eine F-Verteilung mit h und f Freiheitsgraden. Der kritische Wert beträgt

$$k_{\theta} = F_{1-\alpha, h, f} \quad (42)$$

Bei Ablehnung von H_0 werden die Deformationen D durch Einzeltests geprüft. Pelzer hat das einfache Verfahren, d. i. die Prüfung der Testgröße

$$w_i = \frac{d_i}{\hat{\sigma}_{d_i}} = \frac{d_i}{\hat{\sigma} \sqrt{Q_{ii}}} \quad (43)$$

- die Analogie zu Gl. (35) ist deutlich - verfeinert, weil wegen der Korrelationen in P_{DD} die Einzeltests eine wesentlich geringere Macht als der Globaltest aufweisen. Er schlägt daher in |1974/2| vor, für jeden Einzeltest die Gesamtklaffung in zwei Anteile aufzuspalten:

Der eine enthält den Einfluß der zu untersuchenden Deformationen \bar{D}_B (Bewegt), ohne den Einfluß der übrigen Differenzen D_F (Fest); der andere Anteil enthält wegen H_a nur zufällige Fehler. Er transformiert dazu den Klaffungsvektor und

*) Die Unsicherheit bei der Festlegung von σ^2 kann u.U. größer als der Vertrauensbereich des Globaltests werden.

die zugehörige Gewichtsmatrix P_{DD} , so daß \bar{D}_B und D_F unabhängig werden, d.h. $P_{D_F \bar{D}_B} = 0$ wird.

Eine Übertragung dieser Verfeinerung auf die Prüfung der Verbesserungen ist nicht möglich, da nach Gl. (32) w_i^2 bereits nur den Anteil der Fehler ∇L an der normierten Fehlerquadratsumme enthält.

Eine Verbindung der Verfahren von W. Baarda und H. Pelzer bei der Analyse von Deformationsmessungen ist wegen der gemeinsamen statistischen Grundlage zu empfehlen.

In [Baumann, 1972] wird Baardas Theorie auf die Analyse von Deformationsmessungen angewandt und die wichtigsten Formeln, die auch der vorliegenden Arbeit zugrunde liegen, hergeleitet.

Das dort beschriebene Verfahren verknüpft die Prüfung der Verbesserungen und die der Koordinaten. Der maximale Einfluß $\nabla_0 x$ eines gerade noch mit der Wahrscheinlichkeit β_0 erkennbaren Beobachtungsfehlers $\nabla_0 l$ auf die Koordinaten wird als kritischer Wert für Verschiebungen angegeben; er wird dort mit Grenzwert bezeichnet, jedoch als kritischer Wert gedeutet (vgl. S. 34 u. und z.B. S. 71 Pkt. Nr. 4). Die zufälligen Fehler der übrigen $n-1$ nicht grob falschen Beobachtungen werden nicht berücksichtigt (vgl. S. 42). Daher läßt der Vergleich der Grenzwerte mit den 3-fachen Fehlerellipsen keine Schlüsse auf eine höhere Sicherheit zu (S. 42 u. 67), Fehler zu erkennen: Beim 100-maligen Messen einer Strecke mit einer Genauigkeit der Einzelmessungen von $\sigma = 10$ cm ist der mittlere Fehler des Mittels $\sigma_{\bar{x}} = 1$ cm und der Grenzwert $\nabla_0 \bar{x} = 0.4$ cm ($\alpha_0 = 0.001$, $\beta_0 = 0.8$), der nicht als kritischer Wert für eine Streckenänderung verwendet werden kann (vgl. [Baumann, 1974], [van Mierlo, 1974]).

Bei kleinen Redundanzen ist allerdings die Überlegung sinnvoll, ob nicht erkennbare grobe Meßfehler die Aussagekraft der Einzeltests mindern können. Dieser Gesichtspunkt wird bei der Beurteilung von Messungen wenig beachtet und daher im folgenden Abschnitt näher behandelt.

2. VORAUSSETZUNGEN FÜR DIE SUCHE GROBER FEHLER

2.1 Die Redundanz eines Meßsystems

Überschüssige Messungen sind u.a. zur Sicherung gegen grobe Fehler notwendig. Ihre Anzahl $r=n-u$, die Redundanz des Systems, gibt jedoch nur wenig Aufschluß über die Möglichkeit, Fehler zu finden: Trotz hoher Redundanz können einzelne Beobachtungen nicht kontrollierbar sein, sogar das Normalgleichungssystem kann entarten. Reicheneder [1947] hat schon 1947 die Frage nach Beobachtungen, "die sich der Kontrolle entziehen" aufgeworfen und als erster die Berechnung von "Sicherheitsgrößen", die Gewichtskoeffizienten der Verbesserungen, vorgeschlagen. Baarda hat dieses Konzept ausgebaut und die Anforderungen an die innere und äußere Zuverlässigkeit (reliability) von Trigonometrischen Netzen präzisiert. Sie basieren auf den in 1.2.1 genannten Grenzwerten und geben ein

Maß an, wie gut Beobachtungen "kontrolliert" *) (checked) sind, bzw. wie stark sich nicht erkannte Fehler auf das Ausgleichungsergebnis auswirken können.

Für die automatische Fehlersuche reichen diese Zielvorstellungen nicht ganz aus, da es nicht allein um die Kontrolle der Beobachtungen, sondern um die Lokalisierung und Elimination, ja um die Korrektur der fehlerhaften Beobachtungen geht.

2.2 Die charakteristischen Zahlen der Redundanz

Die Möglichkeit, in einem Meßsystem Beobachtungen zu kontrollieren und ihre Fehler zu lokalisieren, beschreiben wir durch die "charakteristischen Zahlen der Redundanz". Dies sind neben der Zahl r der überschüssigen Beobachtungen, die Zahl k der kontrollierbaren Beobachtungen und die Zahl l der Beobachtungen, in denen Fehler lokalisierbar sind.

Diese hängen im wesentlichen ab

- vom zugrundegelegten Testverfahren und den vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten α_0 und $\beta_{p,0}$ für Testfehler I. und II. Art.
- von dem maximal zulässigen Wert ∇_{\max} für nicht erkennbare Fehler, der dem Zweck der Messung angepaßt ist.

Zur Verdeutlichung dieser Abhängigkeiten teilen wir die Beobachtungen in Klassen ein. Die Klasseneinteilung, der zunächst die "konventionelle Gruppe" von Alternativhypothesen zugrunde liegt, läßt sich erweitern, wenn mit Fehlerhäufungen zu rechnen ist. So können schließlich Forderungen an Meßsysteme formuliert werden, die die Voraussetzungen für die Suche grober Fehler berücksichtigen |vgl. Conzett, 1970|.

2.2.1 Klasseneinteilung der Beobachtungen

Die Menge aller Beobachtungen eines Meßsystems sei $B_0 = \{l_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Die im folgenden definierten Mengen B , K_h , K_n , L_h , L_n , U und F sind Teilmengen von B_0 . Alle Definitionen beziehen sich auf die Teilmenge $B \subseteq B_0$. Die Menge B ist z.B. die Menge aller bis zu einem bestimmten Zeitpunkt kontrollierten Beobachtungen.

Definition 1:

K_h sei die Menge aller kontrollierbaren Beobachtungen von $B \subseteq B_0$. Eine Messung l_i ist dann kontrollierbar (hinreichende Bedingung), wenn der zugehörige Grenzwert $\nabla_0 l_i$ kleiner als ein vorgegebener Maximalwert ∇_{\max} ist;

$$K_h(B) = \{l_i \mid \nabla_0 l_i < \nabla_{\max}, \nabla_{\max} < \infty\}$$

*) Die Grenzwerte geben nur Auskunft über die Möglichkeit zu kontrollieren, nicht darüber, ob die Kontrolle durchgeführt, d.h. erkennbare Fehler eliminiert sind. Wir sprechen daher von "kontrollierbaren" Beobachtungen.

Beispiel:

In Figur 1 ist die Netzfigur eines überbestimmten Vorwärtsschnittes dargestellt (Anschlußvisuren sind unterdrückt).

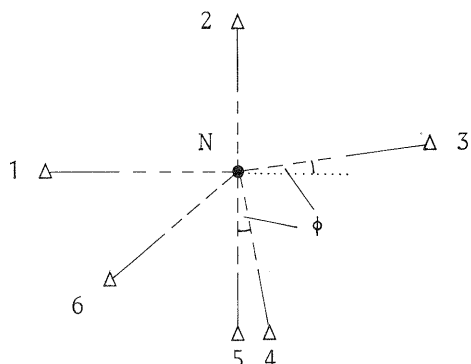


Fig. 1 Zur Kontrolle und Lokalisierung grob falscher Beobachtungen:
Netz bild eines überbestimmten Vorwärtsschnittes

Wird Punkt N von den drei Strahlen 1, 2 und 4 (oder 3, 4 und 5) eingeschnitten, so sind 2 und 4 (oder 4 und 5) kontrollierbar, wenn beide Richtungen gleich genau gemessen sind und der eingeschlossene Winkel klein genug ist. Für $\phi = 5^\circ$ ist z.B. $\forall l_2 = 1.4 \gamma_0$. Wird Punkt N von den drei gleich genauen Strahlen 1, 6 und 5 eingeschnitten, so sind alle drei Richtungen kontrollierbar ($\forall l_1 = \forall l_5 = 2 \gamma_0$, $\forall l_6 = 1.4 \gamma_0$).

Definition 2:

Die Komplementärmenge N_k zu K_h ist die Menge aller nicht kontrollierbaren Beobachtungen,

$$N_k(B) = B \setminus K_h(B)$$

die somit für die Bestimmung der Unbekannten notwendig sind.

Beispiel:

Wird Punkt N von den drei Strahlen 1, 2 und 4 (oder 3, 4 und 5) eingeschnitten, so ist die Richtung 1 (oder 3) nicht kontrollierbar, wenn der Winkel zu den beiden anderen Visuren nahe genug an 90° ist. Für $\phi = 5^\circ$ ist $\forall l_1$ bzw. $\forall l_3 = 18 \gamma_0 = 72 \sigma$! Aber auch die Richtung 2 z.B. kann nicht kontrollierbar sein, wenn die Richtung 4 mit wesentlich geringerer Genauigkeit bestimmt ist.

Definition 3:

L_h sei die Menge aller Beobachtungen von B, in denen Fehler lokalisierbar sind. Der Fehler in einer Beobachtung l_i ist dann lokalisierbar (hinreichende Bedingung), wenn die Zahl der kontrollierbaren Beobachtungen nicht davon abhängt, ob l_i bei der Kontrolle - damit auch bei der Berechnung - beteiligt ist oder nicht.

$$L_h(B) = \{l_i | \text{card}(K_h(B \setminus \{l_i\})) = \text{card}(K_h(B)) - 1\} \quad 1)$$

Beispiel:

Wird N außer durch die Richtungen 1, 2 und 4 auch durch 6 bestimmt, so sind in den Richtungen 2 und 4 Fehler lokalisierbar.

1) $\text{card}(K)$ ist Zahl der Elemente von K

Definition 4:

Die Komplementärmenge N_1 zu L_h ist die Menge aller Beobachtungen, in denen Fehler nicht lokalisierbar sind.

$$N_1(B) = B \setminus L_h(B)$$

Beispiel:

Wird N von den vier Richtungen 1, 2, 3 und 4 eingeschnitten, so ist in keiner ein Fehler lokalisierbar.

Definition 5:

K_n sei die Menge aller für die Kontrolle notwendigen Beobachtungen von B. Eine Beobachtung l_i ist dann für die Kontrolle notwendig, wenn ohne l_i weniger Beobachtungen kontrollierbar sind als mit l_i .

$$K_n(B) = \{l_i \mid \text{card}(K_h(B \setminus \{l_i\})) < \text{card}(K_h(B)) - 1\}$$

Beispiel:

Wird N von den Richtungen 1, 2, 4 und 6 eingeschnitten, so sind die Richtungen 1 und 6 für die (gegenseitige) Kontrolle notwendig.

Definition 6:

L_n sei die Menge aller für die Lokalisierung von Fehlern notwendigen Beobachtungen. Eine Beobachtung l_i ist dann für die Lokalisierung notwendig, wenn ohne l_i weniger Fehler lokalisierbar sind als mit l_i .

$$L_n(B) = \{l_i \mid \text{card}(L_h(B \setminus \{l_i\})) < \text{card}(L_h(B)) - 1\}$$

Beispiel:

Wird N von den Richtungen 1, 2, 5 und 6 eingeschnitten, so sind die Richtungen 2, 5 und 6 für die Lokalisierung von Fehlern notwendig. Wird N zusätzlich zu den Richtungen 1, 2, 5 und 6 auch von 4 bestimmt, so ist keine der Beobachtungen für die Lokalisierung von Fehlern notwendig.

Diese Definitionen lassen sich erweitern, wenn man die zugrunde gelegte Annahme, daß nur eine Beobachtung grob falsch ist, verallgemeinert. Für den Fall, daß bis zu m Beobachtungen falsch sind, muß in Definition 1 die Bedingung $\forall_0 l_i < \forall_{\max}$ für alle Alternativhypothesen, die bis zu m Fehlern annehmen, gelten.

Beispiel:

Wird N durch die (gleichgenauen) Richtungen 1 bis 5 bestimmt, so sind für $m = 2$ nur die Richtungen 2, 4 und 5 kontrollierbar.

Definition 3 geht in die folgende über:

Definition 3':

Ein Fehler in l_i ist dann lokalisierbar, wenn die Zahl der kontrollierbaren Beobachtungen nicht davon abhängt, ob irgendeine Kombination F_m von Beobachtungen, die l_i enthält, bei der Kontrolle beteiligt ist oder nicht.

$$L_h(B, m) = \{l_i \mid \text{card}(K_h(B \setminus (F_m(i)))) = \text{card}(K_h(B)) - m, \text{ für alle } F_m\}$$

mit

$$F_m(i) = \{M \mid M = \{l_{j_k} \mid \text{ein } j_k = i, 1 \leq k \leq m\}\}$$

Beispiel:

Ohne die Visur 6 sind bei zwei möglichen groben Fehlern in keiner der Richtungen Fehler lokalisierbar ($m=2$). Z.B. Visur 1: Ist sowohl 1 als auch 2 grob falsch, kann ein Fehler in 3 nicht festgestellt werden. Eine Entscheidung, ob Visur 1 oder Visur 3 einen groben Fehler enthält, ist dann nicht möglich.

Wird N durch alle sechs Richtungen bestimmt, so sind in den Richtungen 2, 4 und 5 Fehler lokalisierbar.

Die Definitionen 4 bis 6 sind analog zu ändern. Wegen der Schwierigkeit, allgemeine Alternativhypothesen aufzustellen, wird die Erweiterung der Definitionen eher von theoretischem Interesse sein.

Wir sind nun in der Lage, die Beobachtungen in 4 Klassen einzuteilen:

N_k enthält als Elemente alle Beobachtungen,
die nicht kontrollierbar sind.

K_n enthält als Elemente alle Beobachtungen,
die für die Kontrolle notwendig sind.

L_n enthält als Elemente alle Beobachtungen,
die für die Lokalisierung notwendig sind.

$U = B \setminus (N_k \cup K_n \cup L_n)$ enthält als Elemente alle Beobachtungen,
die "überflüssig" sind.

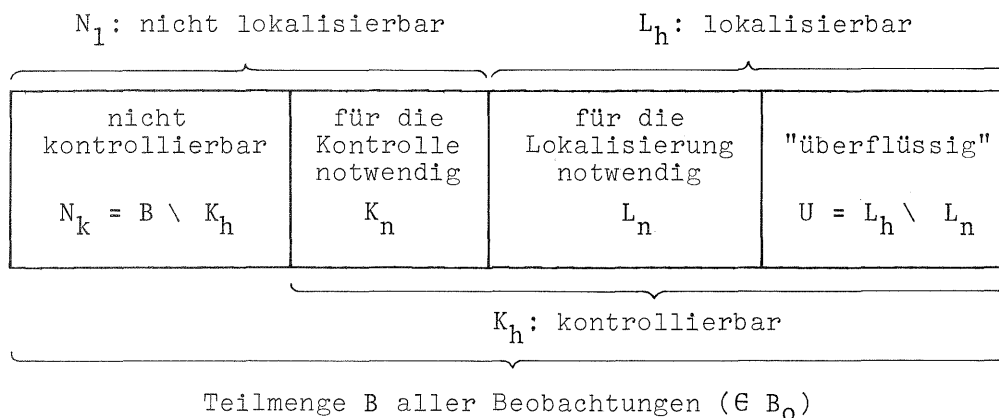


Fig. 2 Klasseneinteilung der Beobachtungen

Figur 2 soll die Einteilung veranschaulichen. Die Bereiche von L_h und K_h sind angedeutet. Man kann der Figur z.B. entnehmen, daß in kontrollierbaren Beobachtungen ($\in K_h$) keine Fehler lokalisiert werden können ($\notin L_h$), wenn sie für die Kontrolle notwendig sind ($\in K_n$). Die nicht für die Lokalisierung notwendigen, also überflüssigen Beobachtungen, treten nur bei kleinen Systemen auf; bei großen Systemen wird man dagegen wegen möglicher Fehlerhäufung nicht auf sie verzichten. Daher werden wir weiterhin die Klassen L_n und U nicht unterscheiden und nur die Menge L_h betrachten.

Die Redundanz eines Meßsystems mit n Beobachtungen l_i wollen wir durch die folgenden drei charakteristischen Zahlen beschreiben:

$r = n - u$ die Zahl der überschüssigen Messungen

$k(\nabla_{\max}) = \text{card}(K_n)$ die Zahl kontrollierbarer Beobachtungen, in denen aber Fehler nicht lokalisiert werden können und

$l(\nabla_{\max}) = \text{card}(L_h)$ die Zahl der Beobachtungen, in denen Fehler lokalisiert werden können.

Im Gegensatz zu r können k und auch l höchstens gleich der Anzahl n der Beobachtungen werden. Reichen die charakteristischen Zahlen zur Kennzeichnung der Voraussetzungen für die Fehlersuche nicht aus, so kann man k und l durch die Angabe der zugehörigen Mengen K_n und L_h bzw. deren Komplementärmengen N_k und N_l aufschlüsseln.

2.2.2 Zum Begriff "Grober Fehler"

Die Klasseneinteilung und damit auch die charakteristischen Zahlen k und l hängen wesentlich von dem maximal zulässigen Grenzwert ∇_{\max} ab, jede der Definitionen enthält, z.T. auch indirekt über K_h , diesen Parameter.

Der Grenzwert ∇_{\max} legt fest, ab welcher Größe Beobachtungsfehler ∇l_i als grob falsch gelten sollen, auch, wenn sie durch einen Test nicht erkannt werden können *). Damit ist der Begriff des "groben Fehlers" definiert. Zwei entscheidende Gründe sprechen für die freie Festlegung von ∇_{\max} gegenüber anderen Definitionen:

a) Die Festlegung ist unabhängig von einem Testverfahren oder von dessen Parametern, wie z.B. α und β .

Ein Vergleich mehrerer Testverfahren ist nur möglich, wenn die Vorstellung, was ein grober Fehler ist, nicht von einem Testverfahren abhängt.

b) Die Festlegung ist unabhängig von der Meßanordnung. Sie ist daher einer Festlegung vorzuziehen, die die Restverbesserungen V als Grundlage hat, denn die V sind bei gleichem ∇L wegen $\nabla V = -Q_{VV}P_{11} \nabla L$ i.a. von Beobachtung zu Beobachtung verschieden.

∇_{\max} dient nicht zum Testen von Beobachtungen, sondern als Grundlage für die Beurteilung von Meßsystemen bei vorgegebenem Testverfahren oder zum Vergleich mehrerer Testverfahren bei gegebener Meßanordnung.

Wenn die Beobachtungen sich in ihrer Genauigkeit stark unterscheiden, ist man gezwungen, nicht die Grenzwerte, sondern das Verhältnis der Grenzwerte zum jeweiligen mittleren Fehler a priori

$$\frac{\nabla l_i}{\sigma_{l_i}} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{(P_{11}Q_{VV})_{ii}}} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{(E-A_0)_{ii}}} \quad (44)$$

*) Baarda vermeidet die Angabe absoluter Größen bei der Definition der Zuverlässigkeit und verlangt nur, daß die Grenzwerte für alle Beobachtungen etwa gleich groß sind.

nach oben zu beschränken, um zu verhindern, daß genaue Beobachtungen wegen ungenauer Beobachtungen, relativ gesehen, schlecht bzw. nicht kontrollierbar sind. Dies tritt etwa bei geodätischen Netzen mit stark unterschiedlich genauen Beobachtungen auf. Hier können in genauen Beobachtungen 1g u.U. Fehler bis $100 \sigma_{1g}$ nicht erkennbar sein.

2.3 Mindestanforderungen an Meßsysteme

Mit Hilfe der charakteristischen Zahlen der Redundanz lassen sich nun Anforderungen an Meßsysteme formulieren, die ein gesichertes Ergebnis zum Ziel haben. In jedem Fall sollten grobe Fehler erkennbar sein, d.h. "sich nicht der Kontrolle entziehen". Inwieweit die Fehler lokalisierbar sein sollten, hängt von der Möglichkeit und dem Aufwand von Nachmessungen ab. Hier gilt abzuwägen, ob für die Lokalisierung grober Fehler grundsätzlich erhöhter Meßaufwand notwendig und wirtschaftlich zu vertreten ist.

1. Bei einfachen Messungen, die sofortige Auswertung oder wenig aufwendige Nachmessungen erlauben, genügt es, daß alle Messungen kontrollierbar sind ($k+1=n$). Unter diese Kategorie fallen alle nicht zu umfangreichen terrestrischen Messungen. Die Anforderungen sind in dieser Form in den verschiedenen Vermessungsanweisungen enthalten |46|, jedoch nicht durch Zahlenangaben präzisiert, so daß sie nicht immer für die Kontrolle aller Beobachtungen ausreichen |47|.
2. Bei Messungen, die vorwiegend automatisch ausgewertet und geprüft werden und Nachmessungen kaum zulassen, sollten alle Fehler lokalisierbar sein ($1=n, k=0$). Dies betrifft umfangreiche terrestrische Messungen und alle photogrammetrischen Auswertungen. Die Anforderungen werden - wenigstens bei photogrammetrischen Auswertungen - in den meisten Fällen nicht erfüllt (vgl. Teil II). Können Fehler zwar festgestellt, aber nicht lokalisiert werden, sind die Beobachtungen für die weitere Verarbeitung wertlos.
3. Bei sehr teuren Messungen ohne die Möglichkeit von Nachmessungen reicht die Lokalisierbarkeit einer fehlerhaften Beobachtung ($m = 1!$, wegen der einfachen Alternativhypothese) nicht aus. Hier muß man die Wahrscheinlichkeit von Fehlerhäufungen abschätzen, die die kontrollierte Bestimmung eines Punktes verhindern. Mit Definition 3' sollte dann $L_h(B_o, m) = B_o$ sein, d.h. trotz mehrerer Fehler sollten genügend Überbestimmungen die Berechnung der Koordinaten garantieren.

Die Visuren 1 bis 6 (Fig. 1) reichen zur gesicherten Bestimmung des Punktes N nicht aus, wenn mit zwei oder mehr groben Fehlern zu rechnen ist.

3. METHODEN ZUR SUCHE GROBER FEHLER

Die bisherigen Veröffentlichungen über Fehlersuchsysteme (|Davis, 1967|, |Fanta, 1973|, |Kraus/Krack, 1972|, |Osaikhuiwu, 1972|, |Rosenfield, 1967|) zeigen eine Vielfalt von Methoden zur automatischen Suche grober Fehler in photogrammetrischen oder geodätischen Blöcken. Die Fehlersuchsysteme sind vor allem von der Zielsetzung, dem verwendeten Test und meistens von dem jeweils übernommenen Blockausgleichungsprogramm geprägt und unterscheiden sich daher beträchtlich. In allen Fällen wird eine möglichst wirtschaftliche Strategie angestrebt. Die Methoden sollen im folgenden auf die Zerlegung der Gesamtausgleichung und die Behandlung mehrerer grober Fehler hin verglichen werden.

3.1 Stufenausgleichungen zur Suche grober Fehler

3.1.1 Fehlersuche nach einer Gesamtausgleichung

Die Prüfung der Verbesserungen nach einer gemeinsamen Ausgleichung aller Daten führt grundsätzlich zur sichersten Erfassung der groben Fehler in den Beobachtungen.

Bezogen auf die Gesamtzahl der Beobachtungen ist hier die Redundanz am größten. Die Grenzwerte für nicht erkennbare grobe Fehler sind in kleineren Ausgleichungseinheiten, d.h. Subblöcken größer als in einer Gesamtausgleichung. Kleine grobe Fehler sind in Subblöcken u.U. nicht mehr erkennbar.

Außerdem fordert die Aufteilung einen hohen organisatorischen Aufwand |Osaikhuiwu, 1972|. Bei der Realisierung eines automatischen Fehlersuchsystems bietet eine Gesamtausgleichung die Voraussetzung für eine einfache Programmstruktur. Vorhandene Programme brauchen für die Fehlersuche nur erweitert werden,

Dem Editingsystem von Davis |1967| und den Untersuchungen von Osaikhuiwu |1972| und Alimoradi |1973| liegen diese Überlegungen zugrunde. Sie verwenden einen für alle Verbesserungen der photogrammetrischen Messungen festen kritischen Wert. Dies ist nach den Ausführungen im ersten Abschnitt nur dann zulässig, wenn die Q_{VV} für alle Beobachtungen gleich sind. Da dies aber in den seltensten Fällen, wie etwa dem einfachen arithmetischen Mittel, zutrifft, muß man

- entweder einen Test heranziehen, der die Unterschiede der Q_{VV} berücksichtigt oder
- die Meßanordnung so verändern, daß die Gewichtskoeffizienten für alle Beobachtungen etwa gleich groß werden. Dies würde zu einem "zuverlässigen" Meßsystem im Sinne Baardas führen (vgl. Fußnote S. 23). Dann kann man den kritischen Wert nach Gl. (37) benutzen, dem die Relativgenauigkeit $\hat{\sigma}_{rel}$ zugrunde liegt.

Die Verteilung der Paßpunkte und der Hilfsdaten für die äußere Orientierung in photogrammetrischen Blöcken läßt sich meistens nicht oder nur eingeschränkt so beeinflussen, daß der Mittelwert $\overline{Q_{VV}}$ ohne Verlust die Q_{VV} ersetzen kann. Demgegenüber hat man auf die Anordnung der photogrammetrischen Verknüpfungspunkte mehr Einflußmöglichkeiten. Diese werden wir im Teil II ausführlich untersuchen,

Die Realisierung eines Systems zur automatischen Suche grober Fehler auf der Grundlage des in Abschnitt 1 genannten Testverfahrens ist jedoch nicht ohne weiteres möglich. Die Gründe dafür sind vielfältig:

- Große grobe Fehler ($>100 \sigma$) bewirken i.a., daß mehrere oder alle Verbesserungen den kritischen Wert überschreiten.
- Man muß mit mehreren groben Fehlern verschiedener Größe und Art rechnen.
- Die Lösung der Ausgleichung kann wegen großer grober Fehler divergieren.
- Man kann unter Umständen die Gewichtskoeffizienten nicht berechnen, da die Inverse Q_{xx} nicht zur Verfügung steht, sei es, weil der Speicherplatz nicht ausreicht oder weil kein direktes Verfahren zur Auflösung des Normalgleichungssystems verwendet wird.
- Der Anteil grober Fehler ist mit <0.5 bis vielleicht 5 % so gering, daß man nicht alle Verbesserungen prüfen muß.
- Bei der Prüfung der Verbesserungen reichen Näherungswerte für die Gewichtskoeffizienten aus (Fehler $<5 \%$), da die Q_{VV} auch bei gleichgenauen Beobachtungen oft sehr viel mehr streuen (Faktor 2 und größer).
- Die ausschließliche Prüfung der Beobachtungen nach einer Ausgleichung aller Daten würde in der Regel zu spät vorgenommen, so daß Nachmessungen nicht oder nur schwer möglich sind.

Die Zerlegung der Ausgleichung in kleinere Einheiten führt im Extremfall zur Prüfung der Beobachtungen unmittelbar nach der Messung. Um die Messung selbst nicht zu belasten, kommt nur eine Prüfung im on-line-Verfahren in Frage, bei dem das Auswertegerät an einen elektronischen Rechner angeschlossen ist und Fehler vor allem Fehler in der Punktnumerierung, sofort gemeldet werden. Ein Zeitverlust bei der Nachmessung wird dadurch weitgehend vermieden.

3.1.2 On-line-Verfahren

Fanta [1973] hat on-line-Verfahren zur Prüfung photogrammetrischer Messungen untersucht. Der Vorschlag von Kraus und Krack [1972], die Nahtstellen der Standpunktsysteme in großräumigen Polaraufnahmen mit Hilfe einer Helmerttransformation zu kontrollieren, zielt ebenfalls auf eine frühzeitige Prüfung der Messungen. In beiden Fällen werden die kleinstmöglichen Einheiten, die Modellbildung bzw. die Helmerttransformation, zur Fehlersuche herangezogen. Dadurch kann ein großer Teil der groben Fehler vor der Gesamtausgleichung gefunden werden.

Ein statistisch fundiertes Verfahren ist wegen der meist geringen Redundanz und der ungleichmäßigen Verteilung der Beobachtungen notwendig, aber auch anwendbar. Fanta hat zwar die Auswirkung grober Fehler bei der Modellbildung mit sechs Gruberpunkten untersucht und die Gewichtskoeffizientenmatrix $Q_{\hat{1}\hat{1}} = E - Q_{VV}$ angegeben *), jedoch diese Kenntnis zur Verfeinerung seines Testverfahrens nicht ausgenutzt.

*) Die von Fanta (S. 36) angegebenen Werte sind nur näherungsweise richtig (vgl. Teil II.1), wohl weil zu wenig Iterationen durchgeführt wurden.

Die Zweiteiligkeit des Verfahrens von Kraus und Krack zeigt die Nachteile eines statistisch nicht fundierten Tests besonders deutlich: Bei großen Punktzahlen führt die Helmerttransformation in der Regel zur richtigen Lokalisierung der groben Fehler. Bei kleinen Punktzahlen werden oft richtige Punkte fälschlicherweise als grob falsch angezeigt. Daher wird in diesen Fällen ein auf Streckenvergleichen beruhendes Verfahren verwandt. Zwar stellt das Verfahren nicht den Anspruch, kleine grobe Fehler finden zu können, doch führt die Anwendung des "data-snoopings" zu einer sicheren Lokalisierung auch wesentlich kleinerer Fehler (s.o. und vgl. |Kraus, 1975|, Abschn. 3.2.2 und Teil III).

Bei Fehlerhäufung bieten kleine Systeme zusätzlich die Möglichkeit, durch systematisches Suchen der richtigen Beobachtungen wesentlich sicherer die Daten von großen groben Fehlern zu befreien.

Wegen der geringen Redundanz lassen sich aber kleine grobe Fehler im on-line-Verfahren nicht oder nicht sicher aufdecken. Prüft man die Messungen nicht im on-line-Verfahren (wie bei Kraus/Krack), kann man außerdem in den meisten Fällen die falschen Beobachtungen nicht lokalisieren, so daß dafür die Ergebnisse der einzelnen Kontrollen zusammengetragen und verglichen werden müssen.

Man kann sich zwar durch die Zerlegung des Blocks in kleinste Einheiten gegen fast alle großen groben Fehler absichern. Für die Suche kleiner grober Fehler wird man aber auf die Bildung größerer Einheiten nicht verzichten können, zumal nur in diesen eine Lokalisierung möglich ist.

3.1.3 Fehlersuche in Subblöcken

Die Aufteilung großer Blöcke in Subblöcke stellt einen Kompromiß dar, um einerseits den hohen Aufwand an Speicherplatz und Rechenzeit andererseits die Unsicherheit bei der Suche kleiner grober Fehler zu vermeiden. Der hohe organisatorische Aufwand für die Zusammenstellung der Bilder bzw. Modelle zu Subblöcken darf jedoch nicht unterschätzt werden.

Über die geeignete Größe der Subblöcke entscheiden zwei Gesichtspunkte:

- Die Subblöcke müssen mindestens so groß sein, daß kleine Fehler mit fast derselben Sicherheit wie nach einer Gesamtausgleichung gefunden werden können. Dies setzt die genaue Kenntnis der Gewichtskoeffizienten bzw. der Grenzwerte für erkennbare grobe Fehler voraus, die wir deshalb in Teil II für die Lageblockausgleichung bestimmen.
- Die Subblöcke sollten so groß sein, daß der Aufwand für die Zusammenstellung der Modelle die Rechenzeit nicht stärker beeinflusst, als die Inversion des Normalgleichungssystems. Die Größe der Subblöcke wird daher wesentlich durch die Organisation des jeweiligen Rechenprogramms bestimmt. Große Subblöcke sind auch wegen der notwendigen Überlappungsbereiche kleinen vorzuziehen.

3.2 Die Behandlung mehrerer grober Fehler

3.2.1 Die Auswahl der Tests

Die Qualität eines Fehlersuchsystems hängt wesentlich von der Wirksamkeit des verwendeten Tests ab. In den meisten Fällen handelt es sich um die Prüfung mehrerer Alternativhypothesen, die zu einem Test zusammengefaßt werden. Die größte Testgröße dient dabei als Indikator für einen groben Fehler. Für die Prüfung der Verbesserungen nach einer Ausgleichung kommen vor allem drei Tests in Frage:

a) Der einfache Test T_1^0 *) verwendet den Indikator

$$w^0 = \max_i \left(\frac{|v_i|}{\sigma_{1_i}} \right) \quad i = \dots \quad (45a)$$

Für gleichgenaue Beobachtungen geht w^0 über in:

$$w^0 = \max_i (|v_i|) / \sigma_1 \quad i = \dots$$

Diesen verbreiteten Test verwenden u.a. auch Davis |1967|, Osaikhuiwu |1972|, Kraus und Krack |1973|.

b) Der statistische Test T_1^1 , dem das "data-snooping" (Gl. (35)) zugrunde liegt, verwendet den Indikator

$$w^1 = \max_i \left(\frac{|v_i|}{\sigma_{v_i}} \right) = \max_i (|w_i|) \quad i = \dots \quad (45b)$$

Sowohl der einfache wie der statistische Test beruhen auf der "konventionellen Gruppe" von Alternativhypothesen.

c) Wir wollen zusätzlich einen erweiterten statistischen Test T_2^2 vorsehen, der zur Prüfung erweiterter Alternativhypothesen H_{ap} (Gl. (15b)) dient. Hier lautet der Indikator:

$$w^2 = \max_{ijp} \left(\frac{|c_p' p v|}{\sigma_{c_p' p v}} \right) \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} c_{p,k} = 0 \quad (k \neq i, k \neq j) \\ c_{p,i} = 1 \\ c_{p,j} = c \quad p = \dots \end{array} \quad (45c)$$

Der kritische Wert für alle Indikatoren beträgt

$$k_w = \sqrt{F_{1-\alpha, 1, \infty}}$$

Tests mit nur einer Alternative bezeichnen wir mit $T_v^u(v_i)$ ($u=0, 1, 2, v=1, 2$). Die Beschränkung der Zahl von Alternativen ist bei dem erweiterten statistischen Test T_2^2 notwendig, aber auch bei den Tests T_1^0 und T_1^1 möglich. Ebenso kann man eine Modifizierung von T_1^0 und T_1^1 vornehmen, bei der die m größten Testgrößen als Indikatoren für mehrere grobe Fehler verwendet werden. Für $m = 2$ erhält man daraus die Tests T_2^0 und T_2^1 (vgl. Teil III).

*) Der obere Index kennzeichnet die Testgröße, der untere Index gibt die Zahl der angezeigten Fehler an.

Die Mindestgröße grober Fehler, die durch den Test erkannt werden können, läßt sich dann angeben, wenn die zugrundegelegte Alternativhypothese zutrifft. Liegen mehr grobe Fehler vor, ist dies nicht ohne weiteres möglich. Jedoch sollten die Tests in diesem Fall wenigstens die großen groben Fehler sicher erkennen können.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Test T alle großen groben Fehler $\forall_p L$ richtig anzeigt, nennen wir Lokalisierungswirksamkeit W des Tests T bezüglich der Alternativhypothese H_{ap} (Gl. (15)):

$$W(T|H_{ap}) = P(T \text{ zeigt alle } \forall_p L \text{ von } H_{ap} \text{ an}) \quad (46)$$

Die Güte der Einzeltests $T(v_i)$ von T läßt nicht ohne weiteres Schlüsse auf die Lokalisierungswirksamkeit von T zu. ¹⁾

3.2.2 Die Lokalisierungswirksamkeit des einfachen Tests T_1^0 bei einem groben Fehler

Beim einfachen Test läßt sich für unabhängige Beobachtungen die Wirksamkeit angeben, wenn nur ein grober Fehler $\forall l_j$ vorhanden ist. Dann gilt ($P_{11} = E$)

$$W(T_1^0|H_{a_j}) = \begin{cases} 100 \% , & \text{wenn } Q_{v_j v_j} = \max_i(Q_{v_i v_j}) \\ 0 \% , & \text{wenn } Q_{v_j v_j} \neq \max_i(Q_{v_i v_j}) \end{cases}$$

Denn aus

$$\begin{aligned} w^0 &= \max_i \left(\frac{|v_i|}{\sigma} \right) \stackrel{=2)}{=} \max_i \left(\frac{|Q_{v_i v_j} \forall l_j|}{\sigma} \right) \\ &= \max_i (|Q_{v_i v_j}|) \frac{|\forall l_j|}{\sigma} \end{aligned}$$

folgt, daß nur für $i=j$ der Test den Fehler $\forall l_j$ anzeigt, d.h. nur wenn die Hauptdiagonalglieder der Matrix Q_{VV} die Absolutbeträge der Nebendiagonalglieder dominieren. Andernfalls sind die groben Fehler mit diesem Test nicht lokalisierbar. Eine Analyse der Q_{VV} genügt in diesem Fall für die Bestimmung der Wirksamkeit des einfachen Tests.

Im Gegensatz zum einfachen Test ist der statistische Test bei einem großen groben Fehler immer 100 %ig wirksam (wenn eine Entscheidung möglich ist): Hier folgt mit dem Korrelationskoeffizient $|\rho_{ij}| \leq 1$ aus

$$w^1 = \max_i (|w_i|) = \max_i \left(\frac{|Q_{v_i v_j} \forall l_j|}{\sigma \sqrt{Q_{v_i v_i}}} \right)$$

1) Die Lokalisierungswirksamkeit ist nicht identisch mit der Effizienz im statistischen Sinn. Wir werden, da Mißverständnisse auszuschließen sind, weiter nur von Wirksamkeit sprechen.

2) Dieses Gleichheitszeichen darf nur stehen, weil die zufälligen Fehler der übrigen Beobachtungen ($\neq j$) gegenüber dem großen groben Fehler vernachlässigt werden können.

$$= \max_i \left(\frac{|\rho_{ij}| \sqrt{Q_{v_i v_j}} |\nabla l_j|}{\sigma} \right)$$

$$= \max_i (|\rho_{ij}|) \left(\frac{\sqrt{Q_{v_j v_j}} |\nabla l_j|}{\sigma} \right)$$

daß T_1^1 immer den Fehler richtig anzeigt, solange kein $|\rho_{ij}| = 1$ ($i \neq j$) ist. Hat ein gemischter Korrelationskoeffizient ρ_{ij} den Absolutbetrag 1, so ist ein grober Fehler in einer der Beobachtungen l_i oder l_j nicht lokalisierbar. Dies gilt z.B. für eine Helmerttransformation mit drei Punkten (vgl. [Kraus, 1975]).

Der Vergleich zeigt, daß die Meßanordnung und nicht die zufälligen Fehler die Ursache für die geringe Wirksamkeit des einfachen Tests ist. Durch die Vernachlässigung der Q_{VV} verliert der Test seine Dominanz.

3.2.3 Die Güte eines statistischen Tests $T_1^1(v_i)$ bei mehreren groben Fehlern

Wenn die einfache Alternativhypothese H_{a1} nicht zutrifft, verliert auch der statistische Test T_1^1 seine Wirksamkeit. Die Güte eines Einzeltests $T_1^1(v_i | H_{ap})$ unter einer Alternative H_{ap} läßt sich angeben und kann zur Begründung gebräuchlicher Methoden beim Suchen grober Fehler dienen; dies sind vor allem:

- Die getrennte Prüfung von Hilfsdaten für die äußere Orientierung, von photogrammetrischen Koordinaten und Paßpunktkoordinaten;
- Die gleichzeitige Suche mehrerer getrennt liegender grober Fehler;
- Die iterative Suche grober Fehler verschiedener Größenordnung bei Fehlerhäufung.

Die Güte des Tests $T_1^1(v_i | H_{ap})$ beträgt (die Indizes bei T_1^1 werden vorübergehend unterdrückt):

$$\beta(T(v_i | H_{ap})) = P(w_i(H_{ap}) > k_i | H_{ap})$$

Die Güte hängt im wesentlichen von $w_i(H_{ap})$ ab. Es gilt (vgl. Gl. (35)):

$$w_i(H_{ap}) = \frac{v_i(H_{ap})}{\sigma \sqrt{Q_{v_i v_i}}}$$

Mit Gl. (14) und C_i aus Gl. (33) erhält man daraus

$$v_i(H_{ap}) = - C_i (Q_{VV} P_{11}) C_p \nabla_p$$

$$= - ((Q_{VV} P_{11})_{ii} c_{p,i} + \sum_{j \neq i} (Q_{VV} P_{11})_{ij} c_{p,j}) \nabla_p$$

$$= \nabla_{p,i} v_i + \nabla_{p,j} v_i \tag{47}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $\nabla_i = \nabla_p$ und $c_{p,i} > 0$ annehmen und den Index p unterdrücken.

$\nabla_i v_i$ ist der Einfluß des Fehlers ∇l_i und $\nabla_j v_i$ der Einfluß der übrigen Fehler ∇l_j ($j \neq i$) auf die Verbesserung v_i . Die Testgüte von T nimmt mit wachsendem $|v_i|$ ab. Nur wenn $\nabla_j v_i$ in dem kleinen Bereich $0 > \nabla_j v_i > -2\nabla_i v_i$ liegt, führen die übrigen Fehler zu einer Erhöhung der Testgüte, etwa bei Punktverwechslungen.

Gl. (47) geht bei zwei Fehlern ∇l_1 und ∇l_2

$$C_2 = (1, c, 0, \dots, 0) \quad (49)$$

in

$$v_1(H_a) = -\nabla_2 (Q_{v_1 v_1} + c Q_{v_1 v_2}) \quad (47a)$$

über. Der Test $T(v_1 | H_{a_2})$ ist dann fast gleichmächtig wie $T(v_1 | H_{a_1})$, wenn

$$|Q_{v_1 v_2} c| \ll Q_{v_1 v_1}$$

ist.

Für $Q_{v_1 v_1}$ nicht $\ll 1$ kann man zwei Fälle unterscheiden:

1. $|c| \ll 1$:

Der zweite grobe Fehler ist wesentlich kleiner als der erste. Wegen $|Q_{v_1 v_2}| \leq 1$ ist diese Bedingung hinreichend.

Bei Fehlerhäufungen können Fehler verschiedener Größenordnung nacheinander ungestört gefunden werden.

2. $|Q_{v_1 v_2}| \ll 1$:

Der relative Einfluß des zweiten Fehlers auf den ersten kann vernachlässigt werden. Diese Bedingung ist nur hinreichend, wenn der zweite Fehler höchstens so groß ist wie der erste ($|c| < 1$ oder $|c| \approx 1$).

$|Q_{v_1 v_2}| \ll 1$ kann in zwei Fällen auftreten:

a) Die Beobachtungen liegen weit auseinander.

Gleich große Fehler in Bild- oder Modellkoordinaten können, wenn sie weit genügend auseinanderliegen ungestört "gleichzeitig" gefunden werden. Für grobe Fehler verschiedener Größenordnung gilt dies nur eingeschränkt, da die Prüfung des kleineren Fehlers durch den Einfluß des größeren beeinträchtigt wird ($|c| > 1$!). Dies ist ein Nachteil der "Fehlerkreis-Methode" von Osaikhuiwu |1972| (vgl. Abschnitt II.4).

Die Aufteilung eines Blockes in Subblöcke ist nur möglich, wenn der Einfluß des einen Subblocks auf den anderen gering bleibt.

b) Die Beobachtungen sind verschiedener Art.

Paßpunkte und Hilfsdaten für die äußere Orientierung können getrennt geprüft werden. Das gleiche gilt für Beobachtungen verschiedener Genauigkeit.

Wenn $Q_{v_1 v_1} \ll 1$ ist, l_i also schlecht kontrollierbar ist, genügt keine der beiden Bedingungen allein. In diesen Fällen kann auch ein kleiner Fehler in der Nähe von l_1 (z.B. $|Q_{v_1 v_2}| > 0,1$) dazu führen, daß ein großer grober Fehler ∇l_1 durch den statistischen Test nicht gefunden werden kann (vgl. Fig. 27, S. 80).

Aus diesem Grunde interessieren die Q_{VV} -Werte, um die Stellen im Block zu finden, an denen die Wirksamkeit des statistischen Tests durch kleine grobe Fehler, d.h. auch systematische, gemindert werden kann.

3.3 Zur Korrektur grober Fehler

Auf die Überprüfung der Beobachtungen folgt die eigentliche Bereinigung der Daten (vgl. editing). Die Reaktion auf eine Fehleranzeige, entweder eine Elimination, eine Korrektur oder am besten eine Nachmessung der grob falschen Beobachtung wird vom Zweck der Messung aber auch von der Klasse bestimmt, zu der die jeweilige Beobachtung gehört.

Bei Beobachtungen, in denen Fehler nicht lokalisierbar sind, hängt die Reaktion davon ab, ob zusätzliche Informationen über die Beobachtungen zur Verfügung stehen und so doch eine Lokalisierung ermöglichen. Andernfalls müssen diese Beobachtungen eliminiert werden, in automatischen Fehlersuchsystemen meist durch Nullsetzen des Gewichts. Die zugehörigen Koordinaten fallen damit für die Weiterverarbeitung aus, so daß der Nutzen dieser Beobachtungen nicht durch den Zweck der Messung, sondern durch die Fehlerquote bestimmt wird.

Bei Beobachtungen, in denen Fehler lokalisierbar sind, kann man die grob falschen Beobachtungen eliminieren oder, falls die Beobachtungen für die Weiterverarbeitung notwendig sind, korrigieren. Dies kommt z.B. bei den Paßpunkten für Einzelbildentzerrungen oder bei Hilfsdaten für die äußere Orientierung in Frage.

Streng genommen besteht eine Korrektur darin, den ursprünglichen Fehler rückgängig zu machen. Dies setzt die Kenntnis des Fehlers voraus. Die meisten Fehler lassen sich auf einige wenige Grundtypen zurückführen, wie z.B.

- fehlerhafte Punktidentifizierung
- Punktverwechslung
- fehlerhafte Ziffer in der Punktnummer oder im Beobachtungswert
- Ziffernvertauschung in der Punktnummer oder im Beobachtungswert

Jeder grobe Fehler kann auf eine dieser Fehlertypen hin geprüft und gegebenenfalls korrigiert werden (vgl. [Kraus/Krack, 1972]). Die Prüfung erfolgt sinnvollerweise nach einer vorhergegangenen Elimination, um einen Näherungswert für den Fehlerbetrag zu erhalten. Durch die Korrektur bleibt die Redundanz r erhalten.

Dagegen läßt sich folgende Art der "Korrektur" immer durchführen, bewirkt aber eine Verminderung der Redundanz. Hier wird die fehlerhafte Beobachtung durch den Wert ersetzt, den man aus der Ausgleichung der übrigen Beobachtungen erhält (vgl. [Rosenfield, 1967]). Dieser Wert ist kontrolliert, da sonst nach Definition 3 (Abschn. I.2.2) eine Lokalisierung nicht möglich ist. Das Verfahren ist dem "Winsorisieren" ([Sachs, 1971, S. 220]) von Meßreihen ähnlich, bei dem der grob falsche Meßwert durch den benachbarten ersetzt wird.

Die Korrektur ist bei beiden Methoden ebenso wie die Kontrolle und die Lokalisierung nie mit 100 %-iger Sicherheit möglich. Die Realisierung eines automatischen Editing wird stark von der jeweiligen Aufgabenstellung geprägt, weshalb wir die Korrektur fehlerhafter Beobachtungen in dieser Arbeit nicht weiter behandeln.

TEIL II: VORAUSSETZUNGEN FÜR DIE SUCHE GROBER FEHLER IN PHOTOGRAMMETRISCHEN LAGEBLÖCKEN

1. ZIEL DER UNTERSUCHUNG

In diesem Teil sollen die Voraussetzungen für die Suche grober Fehler in photogrammetrischen Lageblöcken eingehend untersucht werden. Grundlage hierfür bilden die Gewichtskoeffizienten Q_{VV} der Verbesserungen bzw. die unteren Grenzen für grobe Fehler, die mit dem statistischen Test T_1^1 gerade noch erkannt werden können. In die Untersuchung werden die Modellbildung und die Helmerttransformation einbezogen.

Man erhält mit den Q_{VV} -Werten zunächst Aussagen über die Kontrollierbarkeit der Beobachtungen. Aus den gemischten Gewichtskoeffizienten kann man erkennen, ob grobe Fehler sich mit dem einfachen Test finden lassen. Damit ergeben sich Hinweise, wie die Kontrollierbarkeit der Beobachtungen an den Stellen im Block erhöht werden kann, an denen die Fehlersuche erschwert ist. Dies ist die Voraussetzung für die gesicherte Lokalisierung großer grober Fehler mit dem einfachen Test bzw. für die Erhöhung der Wirksamkeit des statistischen Tests.

Ein Beispiel soll den Unterschied beider Tests und ihre Empfindlichkeit gegenüber Fehlerhäufungen verdeutlichen.

2. DIE SUCHE GROBER FEHLER BEI DER MODELLBILDUNG

2.1 Die Modellbildung mit zwei Bildern

Die relative Orientierung zweier Bilder zu einem Modell ist schon oft im Hinblick auf die Genauigkeit der resultierenden Koordinaten und der Orientierungsunbekannten untersucht worden [Gotthardt, 1940], [Stark, 1973]. Die großen Genauigkeitsunterschiede der Orientierungsunbekannten weisen auf die Anpassungsfähigkeit des Systems und somit auf die Schwierigkeiten hin, Fehler zu erkennen. Wir wollen zwei Fälle näher betrachten.

Benutzt man zur Orientierung nur die sechs Grüberpunkte 1, 2, ..., 6, wie sie in Fig. 3 dargestellt sind, so erhält man unabhängig von der Basis b , dem Abstand a

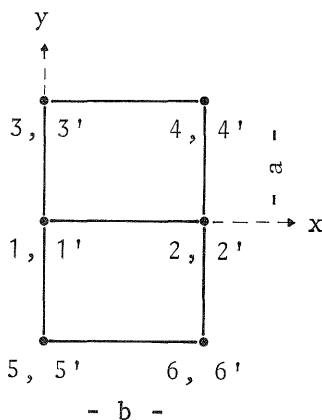


Fig. 3
Lage der Grüberpunkte zur relativen Orientierung eines Bildpaares

der Punkte von der Streifenachse und von der Kammerkonstante folgende Gewichtskoeffizientenmatrix der als gleich genau angenommenen y -Parallaxen:

$$Q_{VV} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (51)$$

Die Q_{VV} -Matrix ändert sich nicht, wenn die Punkte 3 - 6 eine gemeinsame aber andere Höhe haben, als die Punkte 1 und 2 (s. Anhang).

Den Q_{VV} -Werten entsprechen Grenzwerte für gerade noch erkennbare Fehler von:

$$\nabla_o l = 1.7 \gamma_o = 7 \sigma \text{ für die Punkte 1 und 2} \quad (52a)$$

$$\nabla_o l = 3.5 \gamma_o = 14 \sigma \text{ für die Punkte 3 bis 6} \quad (52b)$$

Bei einer mittleren y -Parallaxe von 5μ sind in den außen liegenden Punkten p_y -Fehler unter 70μ nicht erkennbar. Ihr Einfluß wird bei der Orientierung absorbiert. Die Restparallaxen in den Punkten 3 bis 6 gehen auf ein Zwölftel zurück, das wären im ungünstigsten Fall nur 6μ , wenn man zufällige Fehler nicht berücksichtigt. Die Restparallaxen in den Punkten 1 und 2 betragen in diesem Fall 12μ : die größte Restklaffung tritt demnach nicht an dem fehlerhaften Punkt auf. Der einfache Test T_1^0 führt in diesem Fall zum falschen Ergebnis.

Eine Lokalisierung ist wegen der einfachen Überbestimmung des Systems nicht möglich, alle Beobachtungen sind für die Kontrolle notwendig. Das zeigt sich darin, daß die Testgrößen w_i beim statistischen Test T_1^1 gleich groß sind, denn für alle Korrelationskoeffizienten gilt $|\rho_{ij}| = 1$.

Verwendet man dagegen Doppelpunkte, so erhält man folgende Gewichtskoeffizientenmatrix (vgl. Anhang):

$$Q_{VV} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 16 & -8 & & & & & & & & & & & & & \\ -8 & 16 & & & & & & & & & & & & & \\ & & 4 & & & & & & & & & & & & \\ & & -4 & & -2 & & 2 & & -2 & & 2 & & & & \\ & & & 16 & -8 & & 2 & & -2 & & 2 & & -2 & & \\ & & & -8 & 16 & & 2 & & -2 & & 2 & & -2 & & \\ & & -2 & & 2 & & \frac{13}{-11} & \frac{-11}{13} & -1 & & 1 & & -1 & & \\ & & 2 & & -2 & & -1 & & \frac{13}{-11} & \frac{-11}{13} & -1 & & 1 & & \\ & & -2 & & 2 & & 1 & & -1 & & \frac{13}{-11} & \frac{-11}{13} & -1 & & \\ & & 2 & & -2 & & -1 & & 1 & & -1 & & \frac{13}{-11} & \frac{-11}{13} \end{pmatrix} \quad (53)$$

$$\text{mit } 1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 4 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Für die Grenzwerte ergibt sich dann:

$$\nabla_0 1 = 1.2 \quad \gamma_0 = 5 \quad \sigma \text{ für die Punkte 1 und 2, bzw. } 1' \text{ und } 2' \quad (54a)$$

$$\nabla_0 1 = 1.35 \quad \gamma_0 = 5.5 \quad \sigma \text{ für die Punkte 3, } 3' \text{ usw. bis } 6, 6' . \quad (54b)$$

Unter sonst gleichen Bedingungen können in den Punkten 3 bis 6 bzw. 3' bis 6' nun schon Fehler in der y-Parallaxe von 27 μ erkannt werden. Die Restparallaxe beträgt nun etwa 15 μ und ist größer als die Restparallaxen an den übrigen Punkten. In allen Punkten sind Fehler lokalisierbar.

Bemerkung:

Für die manuelle Fehlersuche empfiehlt sich hier ein vereinfachtes Verfahren, das nur die Vorzeichen der Restparallaxen verwendet: Trägt man die Vorzeichen der Parallaxen lagerichtig auf, wie z.B.

3	-	-	4
3'	-	+	4'
1	+	-	2
1'	+	-	2'
5	-	+	6
5'	-	+	6'

und haben die y-Parallaxen an den Doppelpunkten mit einer Ausnahme gleiches Vorzeichen, so wechseln die Vorzeichen von Punktgruppe zu Punktgruppe schachbrettartig. An der Stelle, an der zwei verschiedene Vorzeichen auftreten, wie hier bei 4 und 4', ist derjenige Punkt grob falsch, der in das Schachbrettmuster paßt, hier der Punkt 4'.

Der Vergleich zeigt, daß sich bei Einzelpunkten die Randpunkte sehr schlecht kontrollieren lassen und die Messung von Doppelpunkten die Größe nicht erkennbarer Fehler deutlich verringert. Die Lokalisierbarkeit bezieht sich nur auf die Punkte, nicht auf die Strahlen!

Außerdem - und dies ist entscheidend - können nur die Fehler der y-Parallaxen geprüft werden. Die x-Koordinaten sind, unabhängig von der Zahl der verwendeten Punkte, überhaupt nicht kontrollierbar, da sie die relative Orientierung nicht beeinflussen. Sie wirken sich daher nur an dem betreffenden Punkt aus und führen nicht wie p_y -Fehler zu Modelldeformationen. Auf diese Weise können bei den Punkten außerhalb der Streifenachse in allen drei Koordinaten unerkannte Fehler bleiben. Eine Vergrößerung der Q_{VV} und damit der Kontrollierbarkeit durch Verändern der Lage der Punkte oder durch die Wahl einer anderen Kammerkonstanten ist nicht möglich (vgl. Anhang).

Die Modellbildung eignet sich nicht für die Fehlersuche. Fehler bei der Modellbildung lassen sich im Bereich der Überdeckung daher erst im Blockverband aufdecken.

2.2 Die Modellbildung mit drei und mehr Bildern

Die Erweiterung der Kontrolle auf Einheiten mit mehr als zwei Bildern hängt stark von der Längs- und Querüberdeckung ab.

Bei den üblichen Überdeckungsverhältnissen mit $p = 60 \%$ und $q = 20 \%$ bietet sich in Streifenrichtung eine Modellbildung mit drei Bildern an [Mikhail, 1962]. Eine Modellbildung mit vier oder mehr Bildern eines Streifens führt nicht weiter (Fig. 4).

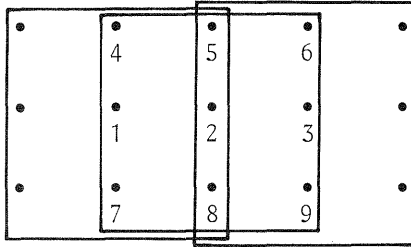


Fig. 4 Verknüpfungspunkte bei Bildtripeln

Nachbarstreifen kann man nur dann in die Fehlersuchen einbeziehen, wenn man wenigstens zwei Bildpaare verwendet und für jedes Bildpaar genügend *) Höhenpaßpunkte vorgibt (Fig. 5). Denn die 20 %-ige Querüberdeckung reicht zur gegenseitigen Orientierung nicht aus. Für die Prüfung der Höhen sind wenigstens zwei Verknüpfungspunkte (Punkt 1 und 2), für die Prüfung der Lagekoordinaten drei Verknüpfungspunkte (Punkte 1, 2 und 3) in dem gemeinsamen Bereich aller vier Bilder notwendig.

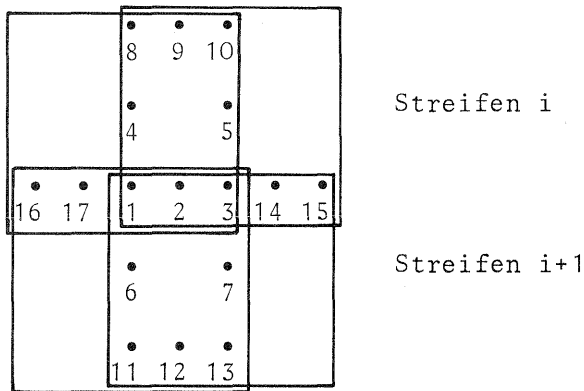


Fig. 5 Punktlage bei der Prüfung von Streifenübergängen

Eine höhere Querüberdeckung (> 50 %) läßt die Prüfung der Bildkoordinaten quer zur Streifenrichtung auch ohne Paßpunkte zu. In diesem Fall kann man Subblöcke mit sechs oder neun Bildern verwenden [Mikhail, 1963].

Eine Analyse der Gewichtskoeffizienten wollen wir einer späteren Untersuchung überlassen. Am Beispiel der Modellbildung mit drei Bildern wollen wir jedoch zeigen, daß die Prüfung der Bildkoordinaten in zu kleinen Einheiten nicht zu vollständig kontrollierten Modellkoordinaten führen kann.

Die Modellbildung mit drei Bildern bietet gegenüber der mit zweien den Vorteil, daß - 60 %-ige Längsüberdeckung vorausgesetzt - in den Punkten 2, 5 und 8 (Fig. 4) x- und z-Koordinaten kontrollierbar und Fehler in y-Richtung lokalisierbar sind. Fehler in x- und z-Richtung können nur festgestellt, jedoch nicht lokalisiert werden. Die übrigen Punkte sind nicht besser kontrollierbar als bei der herkömmlichen Modellbildung. Es ist aber möglich, alle Verknüpfungen inner-

*) wenigstens fünf, um Höhenfehler lokalisieren zu können.

halb eines Streifens mit Hilfe fortgesetzter Tripelbildung zu prüfen. x-Fehler in den Randpunkten der Streifen kann man erst im Block aufdecken. x-Fehler in der Streifenachse sind bei 20 %-iger Querüberdeckung auch im Blockverband nicht lokalisierbar.

Die Prüfung der Bildkoordinaten durch Berechnung von Bildtripeln ist zwar wesentlich effektiver als die einfache Modellbildung, aber im Hinblick auf die Lokalisierbarkeit von Fehlern noch nicht hinreichend. Die Prüfung der Bildkoordinaten muß daher in größere Recheneinheiten verlegt werden.

3. DIE SUCHE GROBER FEHLER BEI DER EBENEN HELMERTTRANSFORMATION

Die ebene Helmerttransformation kann man innerhalb einer Blockausgleichung für zwei wesentliche Kontrollschritte verwenden: die Prüfung der Modellverknüpfungen und die Prüfung der Paßpunktkoordinaten nach einer freien Ausgleichung des photogrammetrischen Blocks. Die innere Struktur der Helmerttransformation ist wegen der geringen Zahl von Unbekannten und der Linearität des mathematischen Systems sehr einfach. Daher erhält man schon bei wenig Punkten relativ hohe Überbestimmungen, so daß Fehler im mathematischen Modell einerseits und grobe Fehler andererseits nicht verteilt und so zumindest festgestellt werden können. Eine Lokalisierung grober Fehler ist im Vergleich zur Modellbildung mit drei Bildern nicht möglich.

Die Kontrollierbarkeit der Koordinaten hängt im wesentlichen von der Zahl und der räumlichen Verteilung der Punkte ab.

Der Grenzwert für einen Koordinatenfehler ergibt sich bei gleichgewichteten und unkorrelierten Koordinaten (Ableitung siehe Teil III) zu:

$$\nabla_0 l_i = \nabla_0 x_i = \gamma_0 / \sqrt{Q_{v_i v_i}} = \gamma_0 / \sqrt{\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{s_i^2}{\sum_i s_i^2}\right)} \quad (55)$$

- n ist die Anzahl der Punkte
- s_i ist der Abstand des Punktes i vom Schwerpunkt
- γ_0 ist eine von σ , α_0 und β_0 abhängige Größe, und für eine Helmerttransformation fest (vgl. Gl. (22)).

3.1 Die Abhängigkeit der Grenzwerte von der Punktzahl

Bei regelmäßig verteilten Punkten wirken sich die Zahl n der Punkte und die Größe $\sum s^2$ auf $\nabla_0 l_i$ in der gleichen Weise aus: mit wachsender Punktzahl wird der Grenzwert kleiner und nähert sich γ_0 . Die Werte Q_{v_v} und $\nabla_0 l_i$ sind in Fig. 6 für ein regelmäßiges n-Eck dargestellt.

Für zwei Punkte ist Q_{v_v} generell Null, so daß $\nabla_0 l_i$ unendlich wird, für $n = 3$ liegt $\nabla_0 l_i$ bereits bei $\gamma_0 \sqrt{3}$ und weicht für $n > 7$ weniger als 20 % von γ_0 ab. Schon bei kleinen Punktzahlen führen demnach zusätzliche Beobachtungen kaum zu einer Erhöhung ihrer Kontrollierbarkeit.

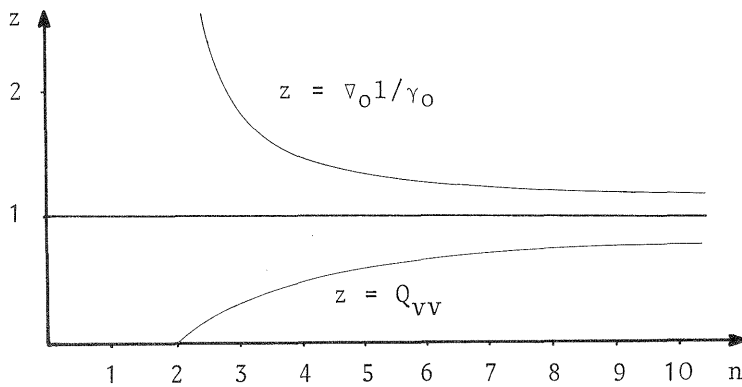


Fig. 6 Gewichtskoeffizienten Q_{VV} und Grenzwerte $v_0 l$ bei der Helmerttransformation eines regelmäßigen n -Ecks in Abhängigkeit von der Zahl der Punkte

3.2 Die Abhängigkeit der Grenzwerte von der Geometrie

Für unregelmäßig verteilte Punkte gilt dies nicht mehr allgemein, da der Abstand eines Punktes vom Schwerpunkt den Grenzwert stark beeinflusst. Die Punkthaufen der Fig. 7 (S. 39) sollen dies veranschaulichen. Die Grenzwerte $v_0 l$ sind durch Kreise um die einzelnen Punkte dargestellt, um die Abhängigkeit von der Lage der Punkte im Punkthaufen zu verdeutlichen. Linien gleicher Grenzwerte sind Kreise um den Schwerpunkt. Die Grenzwerte nehmen mit wachsendem Abstand vom Schwerpunkt zu, wie das aus Fig. 8 erkenntlich ist. Sie zeigt die Abhängigkeit des Grenzwerts von s für Punkthaufen mit $n = 8$ Punkten.

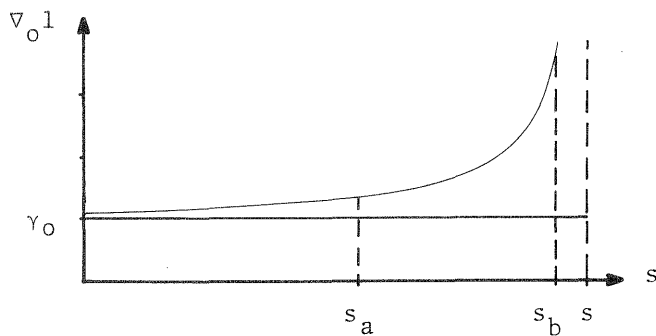


Fig. 8 Grenzwerte einer Helmerttransformation mit 8 Punkten in Abhängigkeit von dem Abstand s eines Punktes vom Schwerpunkt

Die Entfernung s_∞ , bei der $v_0 l_i$ unendlich wird, d.h. in einem Punkt keine Fehlerkontrolle mehr möglich ist, würde nur erreicht, wenn 7 der 8 Punkte identisch sind. In den Punkthaufen a und b der Fig. 7 betragen die Abstände s maximal $s_a = 0.54 s_\infty$ bzw. $s_b = 0.95 s_\infty$, dem entsprechen Grenzwerte von $1.3 \gamma_0$ bzw. $3.6 \gamma_0$. Der Unterschied ist beträchtlich: Im ungünstigeren Fall können in dem isolierten Punkt Fehler bis 14σ nicht erkannt werden.

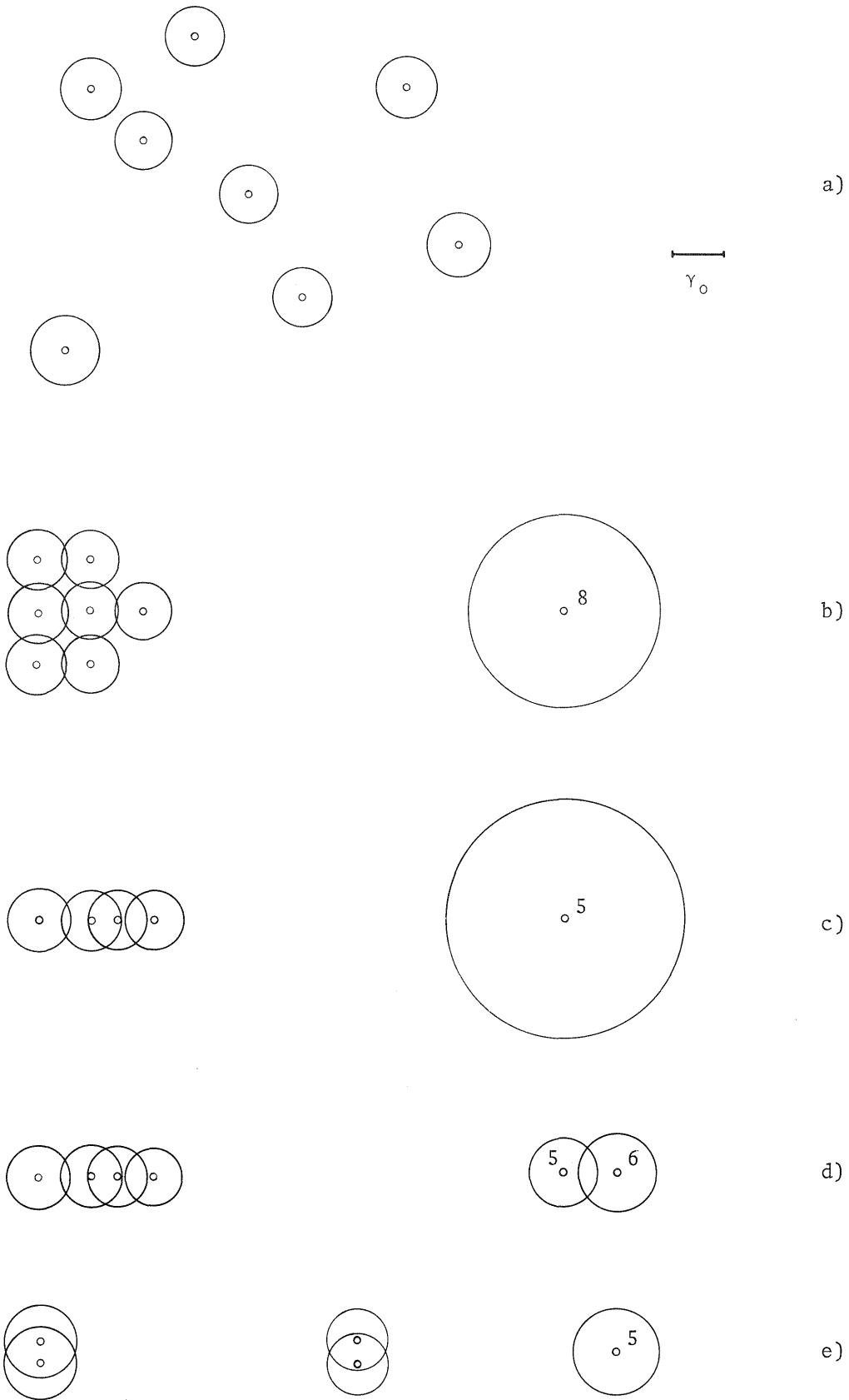


Fig. 7 Helmertransformation: Abhängigkeit der Grenzwerte (Radius der Kreise) von der Lage der Punkte

- a) und b): Isolierung eines Punktes
- c) und d): Kontrolle bei isoliertem Punkt
- e) : Unvollständige Modellverknüpfung

Die Gewichtskoeffizientenmatrizen ¹⁾ für beide Fälle lauten:

$$Q_{VV}(7a) = \begin{pmatrix} .617 & -.246 & -.195 & -.149 & -.128 & -.214 & .089 & -.213 \\ & .744 & -.202 & -.223 & -.114 & -.063 & -.137 & .062 \\ & & .829 & -.175 & -.119 & -.088 & -.098 & -.025 \\ & & & .776 & -.115 & -.043 & -.195 & -.133 \\ & & & & .874 & -.134 & -.128 & -.138 \\ & & & & & .797 & -.166 & -.238 \\ & & & & & & .717 & -.292 \\ \text{symmetrisch} & & & & & & & .646 \end{pmatrix}$$

$$Q_{VV}(7b) = \begin{pmatrix} .821 & -.169 & -.162 & -.157 & -.145 & -.137 & -.122 & .114^* \\ & .833 & -.169 & -.147 & -.145 & -.147 & -.122 & .059 \\ & & .821 & -.137 & -.145 & -.157 & -.122 & .114^* \\ & & & .854 & -.135 & -.124 & -.124 & -.106^* \\ & & & & .866 & -.135 & -.124 & -.039 \\ & & & & & .854 & -.124 & -.106^* \\ & & & & & & .875 & -.137^* \\ \text{symmetrisch} & & & & & & & \boxed{.078} \end{pmatrix}$$

Im Fall 7a dominieren die Diagonalelemente; der einfache Test führt hier bei einem großen groben Fehler immer zum richtigen Ergebnis. Im Fall 7b trifft dies nicht zu. Ein Fehler im Punkt 8 ist durch den einfachen Test in keinem Fall lokalisierbar. (Die v_j mit $|v_j| > v_i$ (l_i fehlerhaft) sind mit * gekennzeichnet).

Fig. 7c und d soll die Wirkung eines Kontrollpunktes in der Nähe eines isolierten Punktes verdeutlichen. Die Gewichtskoeffizientenmatrizen lauten hier:

$$Q_{VV}(7c) = \begin{pmatrix} .667 & -.288 & -.265 & -.234 & .120^* \\ & .742 & -.243 & -.222 & .011 \\ & & .768 & .216 & -.043^* \\ & & & .792 & -.119^* \\ \text{symmetrisch} & & & & \boxed{.032} \end{pmatrix}$$

$$Q_{VV}(7d) = \begin{pmatrix} .679 & -.285 & -.267 & -.242 & .039 & .075 \\ & .743 & -.243 & -.224 & -.009 & .019 \\ & & .768 & -.215 & -.033 & -.010 \\ & & & .797 & -.067 & -.049 \\ & & & & \boxed{.559} & -.489^* \\ \text{symmetrisch} & & & & & \boxed{.454} \end{pmatrix}$$

Der Grenzwert des isolierten Punktes (Fig. 7c) beträgt $\nabla_0 l_5(7c) = 5.6 \gamma_0 = 22.4 \sigma$. Durch die Messung eines Beipunktes wird $\nabla_0 l_5(7d) = 1.3 \gamma_0 = 5.5 \sigma$; der Beipunkt ist mit $\nabla_0 l_6 = 1.5 \gamma_0 = 6 \sigma$ ähnlich gut kontrollierbar.

1) Die folgenden Gewichtskoeffizientenmatrizen enthalten $|Q_{v_i v_i}|$ mit Vorzeichen von $\text{Real}(Q_{v_i v_i})$ als Elemente.

An diesem Beispiel kann man auch zeigen, wie Fehlschlüsse beim Suchen richtiger Beobachtungen zustande kommen können. Ist der Punkt 5 um einen Betrag $1.5 \gamma_0 = 6 \sigma < \sqrt{15} < 22.4 \sigma = 5.6 \gamma_0$ falsch, wird er beim Prüfen der Punkte 1 bis 5 nicht als falsch erkannt. Nimmt man den Punkt 6 hinzu, so stellt man einen Widerspruch fest, darf aber nicht auf einen groben Fehler in Punkt 6 schließen (entgegen Rosenfield, |1967|).

Mit dem einfachen Test wird man einen Fehler in Punkt 5(7c) oder Punkt 6(7d) unabhängig von der Größe nicht finden können. Eine Berücksichtigung der Vorzeichen führt ohne die Lage der Punkte mit einzubeziehen nicht weiter; es ist z.B. (7c) $v_1 > v_5$.

Die Punktverteilung der Fig. 7e kann bei der Prüfung von Modellverknüpfungen vorkommen, wenn 12 Punkte pro Modell für die Verknüpfungen vorgesehen waren, jedoch einer der Verknüpfungspunkte ausfiel. Die zugehörige Gewichtskoeffizientenmatrix lautet hier:

$$Q_{VV}(7e) = \begin{pmatrix} .570 & -.430 & -.119 & -.119 & .132 \\ & .570 & -.119 & -.119 & -.132 \\ & & .771 & -.229 & -.316^* \\ & & & .771 & -.316^* \\ \text{symmetrisch} & & & & \boxed{.312} \end{pmatrix}$$

Auch hier kann in dem "isolierten" Punkt 5 mit dem einfachen Test ein beliebig großer Fehler nicht erkannt werden. Die Restverbesserungen $|v_3|$ und $|v_4|$ sind in diesem Fall größer als $|v_5|$.

Die Beispiele zeigen, daß nur in Punkthaufen mit gleichmäßig verteilten Punkten die Diagonalglieder größer als die Nebendiagonalglieder sind und die Grenzwerte nur wenig streuen. Da die kritischen Werte für die Verbesserungen demselben Gesetz wie die $\sqrt{0}1_i$ gehorchen, kann man hier bei der Suche mit dem statistischen Test T_1^1 die Unterschiede der Q_{VV} unberücksichtigt lassen, den mittleren Gewichtskoeffizient

$$\overline{Q_{VV}} = r/n \tag{56}$$

verwenden und erhält die übliche Regel, die größte Verbesserung als Indikator zu benutzen, jedoch mit dem kritischen Wert

$$k_V = \sigma \sqrt{F_{1-\alpha_0, 1, \infty} \cdot \frac{r}{n}} \tag{57}$$

für die Verbesserungen (vgl. I.1.2.2). Die Mindestzahl von Punkten, ab der dieses Vorgehen möglich ist, liegt vermutlich etwa bei 8 bis 10 Punkten. Bei kleineren Punkthaufen oder solchen mit einem isolierten Punkt streuen die Grenzwerte zu stark, so daß die Vernachlässigung der Gewichtskoeffizienten leicht zu Fehlentscheidungen führen kann. Wir werden dies im Teil III näher untersuchen, auch um herauszufinden, ob man von den Gewichtskoeffizienten auf die Wirksamkeit von Tests schließen kann.

4. DIE SUCHE GROBER FEHLER BEI LAGEBLÖCKEN

Die Voraussetzungen für die Suche grober Fehler in Lageblöcken untersuchen wir auch hier auf der Grundlage der Gewichtskoeffizienten Q_{VV} . Sie werden jedoch durch die Computersimulation bestimmt. Da dies sehr aufwendig ist, werden wir zunächst die charakteristischen Zahlen k und l mit $Q_{VV} > 0^*$) als Bedingung für die Kontrollierbarkeit bestimmen. Gl. (14) läßt uns auch die Mindestgröße erkennbarer grober Fehler abschätzen. Die Berechnung der Q_{VV} -Werte zeigt, ob diese Näherungen wirklich ausreichen, die Voraussetzungen für die Fehlersuche zu beurteilen. Die Analyse der Gewichtskoeffizienten gibt Aufschluß darüber, wie man die Kontrollierbarkeit der Beobachtungen erhöhen kann. Gleichzeitig wird damit die Wirksamkeit der Testverfahren vergrößert. Außerdem können wir dann die Mindestgröße von Subblöcken angeben, die für die Suche grober Fehler ausreicht. Dabei müssen evtl. Fehlerhäufungen berücksichtigt werden.

4.1 Die Auswahl der Blöcke

Wie wir in den beiden vorigen Abschnitten gesehen haben, sind die Gewichtskoeffizienten stark von der Anzahl der beteiligten Punkte abhängig; außerdem ist die Lokalisierbarkeit der Fehler bei Einzelbefliegungen nicht immer garantiert. Wir untersuchen daher Blöcke mit zwei Befliegungsanordnungen und vier verschiedenen Punktbesetzungen im Modell:

- a) Einfachbefliegungen mit 4, 6, 8 und 12 Punkten pro Modell und den üblichen Überdeckungsverhältnissen $p = 0.6$ und $q = 0.2$; wir bezeichnen sie mit E4, E6, E8 und E12 (vgl. Fig. 9a).
- b) Doppelbefliegungen mit 6 bzw. 12 Punkten pro Modell, bestehend aus zwei senkrecht zueinander liegenden Einzelbefliegungen E6 bzw. E12, so daß je zwei Modelle des einen Verbandes mit je zweien des andern koinzidieren; wir bezeichnen sie mit D6 und D12 (vgl. Fig. 9b).

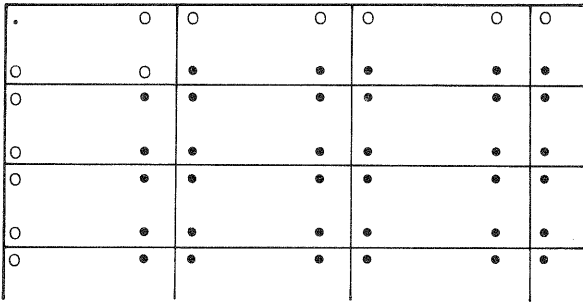
Wir unterscheiden zwischen "freien" Lageblöcken für die Prüfung der photogrammetrischen Koordinaten und Lageblöcken mit Paßpunktrahmen, um den gegenseitigen Einfluß zwischen Verknüpfungs- und Paßpunkten zu untersuchen.

Modell- und Paßpunktkoordinaten werden als gleichgenau angenommen ($P = E$). Dann kann man mit Gl. (14) (S. 9)

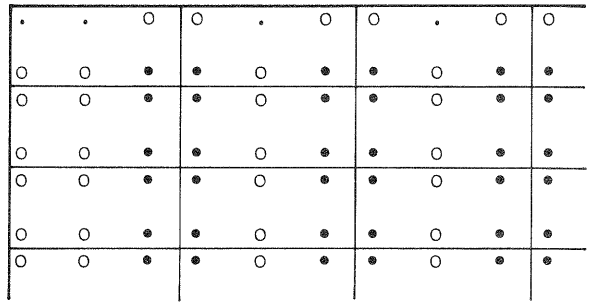
$$Q_{V_i V_i} = \frac{-\nabla V_i}{\nabla l_i}$$

die Gewichtskoeffizienten als das umgekehrte Verhältnis eines groben Fehlers ∇l_i zu der resultierenden Verbesserung ∇V_i erhalten, wenn die übrigen Beobachtungen fehlerfrei sind. Dies bildet die Grundlage für die Bestimmung der Q_{VV} auf dem Wege der Computersimulation.

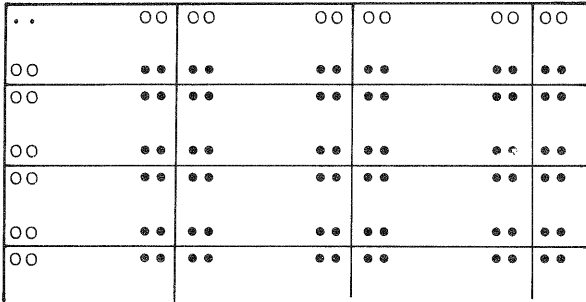
*) entspricht $\nabla_{\max} = \infty$



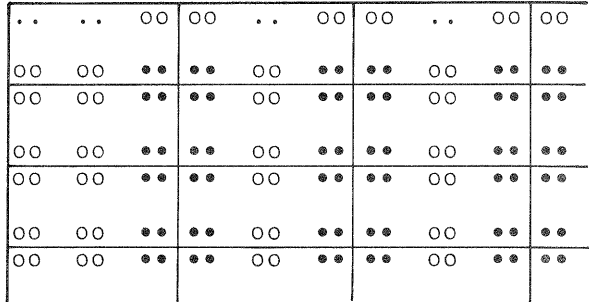
4 Punkte pro Modell



6 Punkte pro Modell



8 Punkte pro Modell



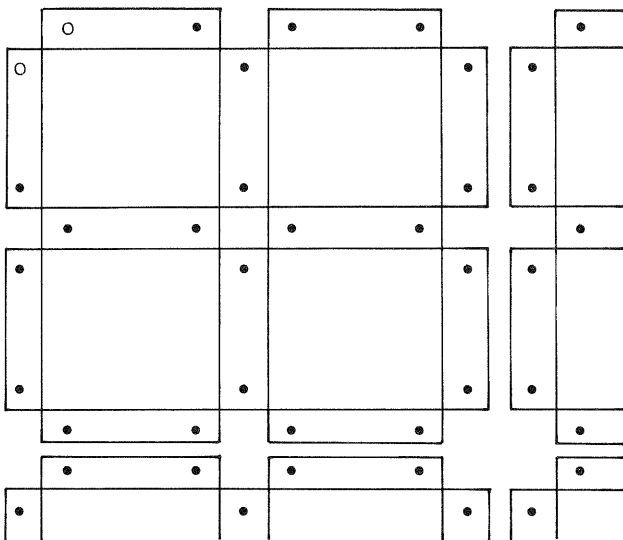
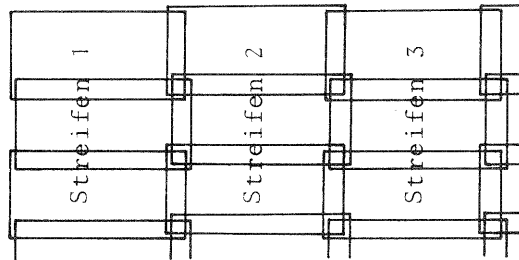
12 Punkte pro Modell

- . nicht kontrollierbar
- o nicht lokalisierbar
- lokalisierbar

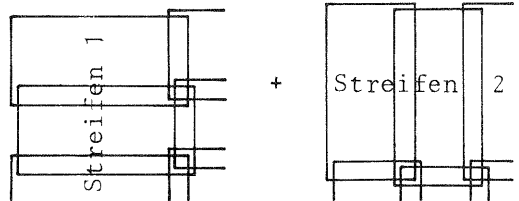
Fig. 9a

Schematische Punktanordnung bei Modellblöcken (Einzelbefliegungen, $p=0.6, q=0.2$)

\cong



\cong



- o nicht lokalisierbar
- lokalisierbar

Fig. 9b

Schematische Punktanordnung bei Modellblöcken (Doppelbefliegung, Kreuzverband)

4.2 Freie Lageblöcke

4.2.1 Eine Abschätzung der Grenzwerte

Die Redundanz r ist in Tab. 2 für die verschiedenen Blöcke als Funktion der Streifenzahl N und der Zahl M der Modelle pro Streifen angegeben. Die daraus abgeleiteten mittleren Gewichtskoeffizienten $\overline{Q_{VV}}$ und Grenzwerte $\overline{\nabla_0 1}$ erkennbarer Fehler sind für quadratische Blöcke in Fig. 10 graphisch veranschaulicht. Die entsprechenden Werte kann man auch der Tab. 3 entnehmen.

Erwartungsgemäß hängen die $\overline{\nabla_0 1}$ sehr stark von der Zahl der Punkte im Modell ab. Die Grenzwerte für unendlich große Blöcke liegen zwischen $1.22 \gamma_0$ für D12 und $2.0 \gamma_0$ für E4, die Gewichtskoeffizienten zwischen 0.6 und 0.25 . Bei E4-Blöcken betragen die Verbesserungen also im günstigsten Fall $1/4$ des ursprünglichen Fehlers. Für kleine Blöcke mit vier Streifen sind die Unterschiede wesentlich

	n	r	n-k	k-1	l
E4	4NM	NM-N-M+1	4	4(N+M-1)	4(NM-N-M)
E6	6NM	2NM-2N-M+1	2(N+2)	2(N+1)M+4(M-2)	4(M-1)(N-1)
E8	8NM	4NM-2(N+M)	8	8(N+M-2)	8(N-1)(M-1)
E12	12NM	6NM-2(2N+M)	4(N+2)	4(N+1)N+8(M-2)	8(N-1)(M-1)
D6	12NM	6NM-2N-M+1	0	8	12NM-8
D12	24NM	16NM-2(2N+M)	0	16	24NM-16

Tab. 2 Charakteristische Zahlen der Redundanz bei freien Lageblöcken (vgl. Fig. 11, S. 51)

N Anzahl der Streifen in einer Richtung

M Anzahl der Modelle im Streifen

(Einheit: 2 Koordinaten = Punkt = komplexe Zahl)

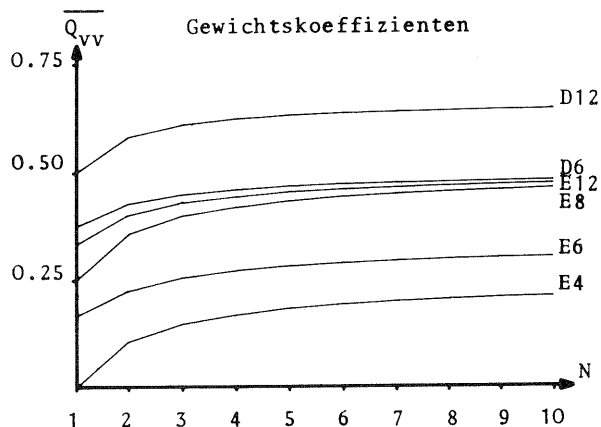
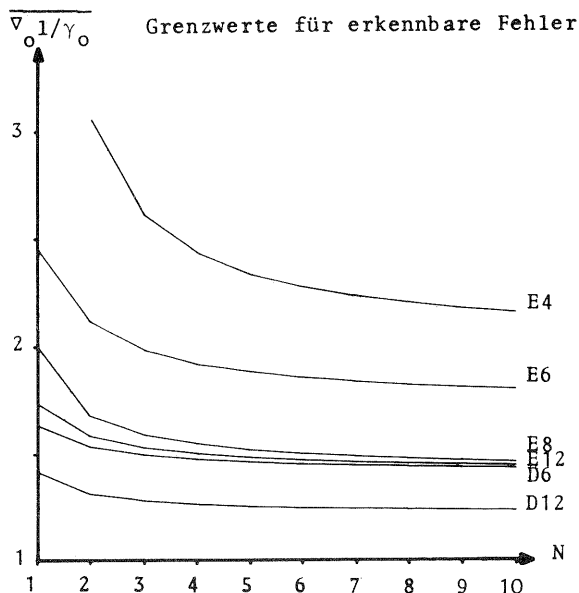


Fig. 10 Mittlere Gewichtskoeffizienten $\overline{Q_{VV}}$ und mittlere Grenzwerte $\overline{\nabla_0 1}$ quadratischer Lageblöcke in Abhängigkeit von der Streifenzahl N

Tab. 3a Mittlere Grenzwerte $\overline{v_0 I}$ für rechteckige (M=N) und quadratische (M=2N) Lageblöcke in Abhängigkeit von der Streifenzahl N

N	E4		E6		E8		E12		D6		D12	
	M=N	M=2N	M=N	M=2N	M=N	M=2N	M=N	M=2N	M=N	M=2N	M=N	M=2N
1	∞	∞	∞	2.45	∞	2.00	∞	1.73	1.73	1.63	1.55	1.41
2	3.46	3.06	2.31	2.11	1.73	1.67	1.63	1.58	1.59	1.53	1.36	1.31
3	2.83	2.61	2.10	1.98	1.63	1.59	1.56	1.53	1.53	1.49	1.31	1.28
4	2.58	2.43	2.00	1.92	1.58	1.54	1.53	1.50	1.50	1.47	1.29	1.26
5	2.45	2.33	1.94	1.88	1.55	1.52	1.51	1.48	1.49	1.46	1.27	1.26
6	2.37	2.27	1.91	1.85	1.53	1.50	1.49	1.47	1.47	1.45	1.26	1.25
7	2.31	2.23	1.88	1.84	1.51	1.49	1.48	1.46	1.46	1.45	1.26	1.25
8	2.27	2.20	1.86	1.82	1.50	1.48	1.47	1.46	1.46	1.44	1.25	1.24
9	2.24	2.18	1.85	1.81	1.49	1.47	1.47	1.45	1.45	1.44	1.25	1.24
10	2.21	2.16	1.84	1.80	1.48	1.47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.25	1.24
12	2.174	2.130	1.818	1.793	1.472	1.458	1.453	1.443	1.444	1.434	1.244	1.238
16	2.129	2.097	1.796	1.777	1.458	1.447	1.443	1.436	1.436	1.429	1.239	1.234
20	2.103	2.077	1.783	1.768	1.449	1.441	1.438	1.432	1.432	1.426	1.236	1.232
30	2.068	2.051	1.766	1.756	1.438	1.432	1.430	1.426	1.426	1.422	1.232	1.230
40	2.051	2.038	1.757	1.750	1.432	1.427	1.426	1.423	1.423	1.420	1.231	1.229
50	2.040	2.030	1.752	1.747	1.428	1.425	1.424	1.421	1.421	1.419	1.229	1.228
60	2.034	2.025	1.749	1.744	1.426	1.423	1.422	1.420	1.420	1.418	1.229	1.227
80	2.025	2.019	1.745	1.741	1.423	1.421	1.420	1.419	1.419	1.417	1.228	1.227
100	2.020	2.015	1.742	1.739	1.421	1.420	1.419	1.418	1.418	1.417	1.227	1.226
1000	2.002	2.002	1.733	1.733	1.415	1.415	1.415	1.415	1.415	1.414	1.225	1.225

Tab. 3b Mittlere Gewichtskoeffizienten Q_{VV} für rechteckige (M=N) und quadratische (M=2N) Lageblöcke in Abhängigkeit von der Streifenzahl N

N	E4		E6		E8		E12		D6		D12	
	M=N	M=2N	M=N	M=2N	M=N	M=2N	M=N	M=2N	M=N	M=2N	M=N	M=2N
1	0.000	0.000	0.000	0.167	0.000	0.250	0.000	0.333	0.333	0.375	0.417	0.500
2	0.083	0.107	0.187	0.225	0.333	0.357	0.375	0.400	0.396	0.427	0.542	0.583
3	0.125	0.147	0.227	0.255	0.375	0.397	0.409	0.429	0.426	0.449	0.583	0.611
4	0.150	0.169	0.250	0.272	0.400	0.419	0.429	0.444	0.443	0.461	0.604	0.625
5	0.167	0.184	0.265	0.283	0.417	0.434	0.441	0.455	0.453	0.468	0.617	0.633
6	0.179	0.194	0.275	0.291	0.429	0.444	0.450	0.462	0.461	0.473	0.625	0.639
7	0.187	0.201	0.283	0.296	0.437	0.451	0.457	0.467	0.466	0.477	0.631	0.643
8	0.194	0.207	0.288	0.301	0.444	0.457	0.462	0.471	0.470	0.480	0.635	0.646
9	0.200	0.211	0.293	0.304	0.450	0.461	0.466	0.474	0.473	0.482	0.639	0.648
10	0.205	0.215	0.297	0.307	0.455	0.465	0.469	0.476	0.476	0.484	0.642	0.650
12	0.212	0.220	0.303	0.311	0.462	0.470	0.474	0.480	0.480	0.486	0.646	0.653
16	0.221	0.227	0.310	0.317	0.471	0.477	0.480	0.485	0.485	0.490	0.651	0.656
20	0.226	0.232	0.315	0.320	0.476	0.482	0.484	0.488	0.488	0.492	0.654	0.658
30	0.234	0.238	0.321	0.324	0.484	0.488	0.489	0.492	0.492	0.494	0.658	0.661
40	0.238	0.241	0.324	0.326	0.488	0.491	0.492	0.494	0.494	0.496	0.660	0.662
50	0.240	0.243	0.326	0.328	0.490	0.493	0.493	0.495	0.495	0.497	0.662	0.663
60	0.242	0.244	0.327	0.329	0.492	0.494	0.495	0.496	0.496	0.497	0.662	0.664
80	0.244	0.245	0.329	0.330	0.494	0.495	0.496	0.497	0.497	0.498	0.664	0.665
100	0.245	0.246	0.329	0.331	0.495	0.496	0.497	0.498	0.498	0.498	0.664	0.665
1000	0.250	0.250	0.333	0.333	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.666	0.666

größer: für D12 ist $v_{01} = 1.26 \gamma_0$, $\overline{Q_{VV}} = 0.63$, für E4 dagegen $v_{01} = 2.84 \gamma_0$, $\overline{Q_{VV}} = 0.12$. In einem E4-Block mit 32 Modellen können demnach Fehler unter durchschnittlich 12 σ mit einer Sicherheit von $\beta = 0.8$ nicht entdeckt werden.

Auch der Einfluß der Punkte in der Streifenachse bei Einzelbefliegungen wird deutlich. Die Grenzwerte werden um mindestens 12 % gesenkt, bei Doppelpunkten ist die Differenz unbedeutend. Die Punkte in der Streifenachse führen zu keiner wesentlichen Verbesserung.

Der Unterschied zwischen Einzel- und Doppelpunkten beträgt demgegenüber bei Einzelbefliegungen mindestens 30 %. Bei Doppelbefliegungen ist auch hier der Unterschied wesentlich geringer. Die Grenzwerte sind dabei am kleinsten.

Die Abhängigkeit der Grenzwerte von der Blockgröße ist ebenfalls sehr verschieden: Bei Einzelbefliegungen sind in kleinen Blöcken erst relativ große Fehler erkennbar, die Grenzwerte nehmen z.T. sehr schnell ab. Da die Gewichtskoeffizienten nur global abgeschätzt sind, kann man aus diesen Werten nicht schließen, daß kleine Blöcke nicht für die Fehlersuche geeignet sind; die Abhängigkeit der einzelnen Q_{VV} -Werte von der Lage des Punktes im Block wirkt sich zu stark aus (vgl. 4.4).

4.2.2 Eine Abschätzung der charakteristischen Zahlen k und l

Bevor wir die Gewichtskoeffizienten im einzelnen untersuchen, wollen wir die charakteristischen Zahlen der Redundanz k und l im Hinblick darauf vergleichen, daß nur große grobe Fehler gefunden werden sollen. Dann bleibt die Größe der Gewichtskoeffizienten unberücksichtigt und wir können k und l leicht angeben:

- a) Nicht kontrollierbar sind alle Punkte (Anzahl $n - k$), die nur einmal bestimmt sind, oder in einem Modell mit nur zwei Punkten liegen.
- b) Nicht lokalisierbar sind Fehler in all den Punkten (Anzahl $n - l$), die nur zweimal bestimmt sind oder in einem Modell mit nur drei Punkten liegen.

Die Zahlen $n - k$ der nicht kontrollierbaren, die Zahlen $k - l$ der kontrollierbaren, aber nicht lokalisierbaren und die Zahlen l der lokalisierbaren Punkte in Abhängigkeit von N und M (s.o.) sind aus Tab. 2 zu entnehmen (S. 44).

Die Punkte, in denen Fehler nicht lokalisierbar sind, liegen jeweils am Rand des Blocks (vgl. Fig. 9). Die Eckpunkte der Blöcke sind bei Einzelbefliegungen nicht kontrollierbar, trotzdem werden an diese Stellen Paßpunkte gelegt, z.T. ohne weitere Vorkehrungen für die Fehlersuche. Bei E6- und E12-Blöcken sind in den Punkten der Streifenachse Fehler nicht lokalisierbar. Gegebenenfalls werden beide Messungen wertlos.

Doppelbefliegungen weisen erwartungsgemäß die größten Q_{VV} auf. Alle Punkte sind kontrollierbar und nur in den Eckpunkten kann man Fehler nicht lokalisieren. Die prozentualen Anteile der nicht kontrollierbaren Beobachtungen und der Beobachtungen in denen Fehler lokalisierbar sind, $(n-k)/n$ und l/n , stellt Fig. 11 für quadratische Blöcke dar.

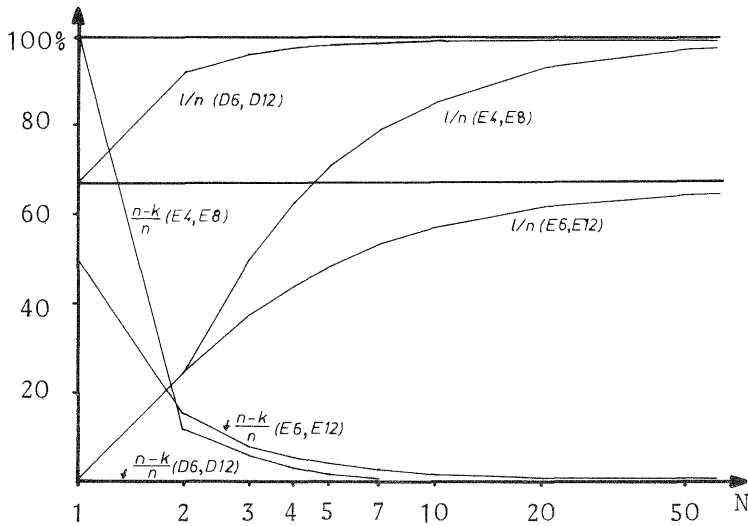


Fig. 11 Prozentualer Anteil nicht kontrollierbarer ($n-k$) und lokalisierbarer (l) Beobachtungen bei quadratischen Lageblöcken ($\nabla_{\max} = \infty$) in Abhängigkeit von der Streifenzahl N

Die Schwäche von E6 und E12 wird hier besonders deutlich: Selbst in sehr großen Blöcken bleibt l/n unter $0.\bar{6}$; d.h. in 33 % aller Beobachtungen sind Fehler nicht lokalisierbar! In allen anderen Fällen nähert sich l/n mit wachsender Blockgröße 100 %. Die Zahl der nicht kontrollierbaren Beobachtungen bestärkt diese Tendenz.

Doppelbefliegungen sind den Einzelbefliegungen vor allem bei kleinen Blöcken weit überlegen. Der zusätzliche Aufwand erhöht die Kontrollierbarkeit erheblich.

4.2.3 Der Einfluß der Lage der groben Fehler auf die Gewichtskoeffizienten

Detaillierte Angaben über die Kontrollierbarkeit der Beobachtungen sind nur bei Kenntnis der einzelnen Q_{VV} - bzw. $\nabla_0 l$ -Werte möglich. Für die Berechnung der Q_{VV} wurde das Programm PAT-M [Ackermann, Ebner, Klein 1970] verwendet.

Die Gewichtskoeffizienten Q_{VV} und die Grenzwerte $\nabla_0 l$ sind in Fig. 12 für freie quadratische Lageblöcke mit 8 und 18 Modellen dargestellt.

Zunächst fällt auf, daß nur am Blockrand große Grenzwerte auftreten. Im Blockinnern streuen sie dagegen nur wenig.

Bei den E4-Blöcken sind in den Randpunkten Fehler bis 22σ bzw. 11σ nicht feststellbar. Der Unterschied der beiden Ränder ist beträchtlich. Der Rand, an dem die kurzen Modellseiten abschließen (im folgenden 'K-Rand'), ist wesentlich empfindlicher als der, an dem die langen Seiten der Modelle abschließen ('L-Rand'). Bei den E6-Blöcken wird der Unterschied der beiden Ränder durch die zusätzlichen Punkte in der Streifenachse aufgehoben. Die Ränder der E8- bzw. E12-Blöcke sind ebenfalls gleich gut kontrollierbar.

	11. .13	11. .13	11. .13	11. .13	
21. .035	10. .16	9.4 .18	9.4 .18	10. .16	21. .035
21. .035	9.2 .19	8.7 .21	8.7 .21	9.2 .19	21. .035
19. .044	8.9 .20	8.5 .22	8.5 .22	8.9 .20	19. .044
19. .044	8.7 .21	8.3 .23	8.3 .23	8.7 .21	19. .044
18. .046	8.7 .21	8.3 .23	8.3 .23	8.7 .21	18. .046

4 Punkte pro Modell

	11. .13	11. .13	11. .13	11. .13	
12. .12	6.9 .34	8.2 .24	7.8 .26	6.9 .34	7.8 .26
12. .12	6.9 .34	7.8 .26	7.4 .29	6.9 .34	7.4 .29
11. .13	6.9 .34	7.7 .27	7.3 .30	6.8 .35	7.3 .30
11. .13	6.9 .34	7.6 .28	7.2 .31	6.8 .35	7.2 .31
11. .13	6.9 .34	7.6 .28	7.2 .31	6.8 .35	7.2 .31

6 Punkte pro Modell

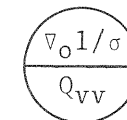
	7.2 .31	7.2 .31	7.2 .31	7.2 .31	
7.8 .26	5.8 .47	5.9 .46	5.9 .46	5.8 .47	7.8 .26
7.8 .26	5.8 .48	5.9 .47	5.9 .47	5.8 .48	7.8 .26
7.8 .26	5.8 .48	5.8 .48	5.8 .48	5.8 .48	7.8 .26
7.8 .26	5.8 .48	5.8 .48	5.8 .48	5.8 .48	7.8 .26
7.8 .26	5.8 .48	5.8 .48	5.8 .48	5.8 .48	7.8 .26

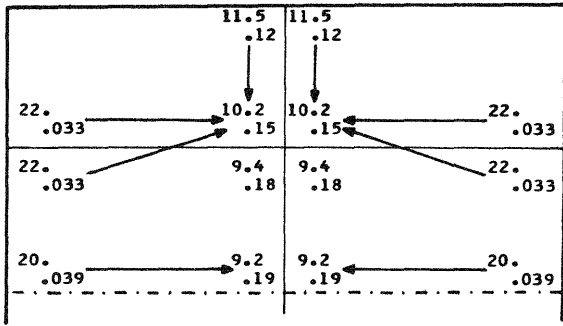
8 Punkte pro Modell

	7.1 .32	7.1 .32	7.1 .32	7.1 .32	
7.3 .30	6.2 .41	5.6 .51	5.7 .50	6.2 .41	5.7 .50
7.3 .30	6.2 .41	5.6 .51	5.6 .51	6.2 .41	5.6 .51
7.1 .31	6.2 .41	5.5 .52	5.5 .52	6.2 .41	5.5 .52
7.1 .31	6.2 .41	5.5 .52	5.5 .52	6.2 .41	5.5 .52
7.1 .31	6.2 .41	5.5 .52	5.5 .52	6.2 .41	5.5 .52

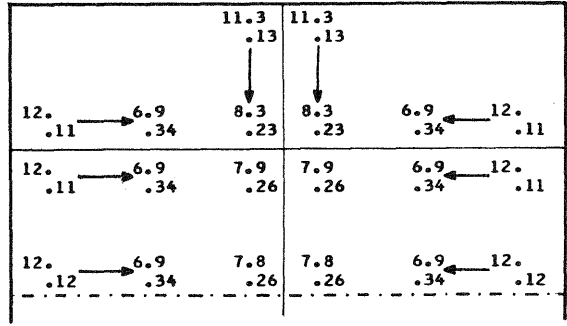
12 Punkte pro Modell

Fig. 12b Gewichtskoeffizienten Q_{VV} und Grenzwerte $\nabla_0 1$ für freien 18-Modelle-Block ($p=0.6, q=0.2$, Punktanzahl s. Fig. 9a, S. 47)

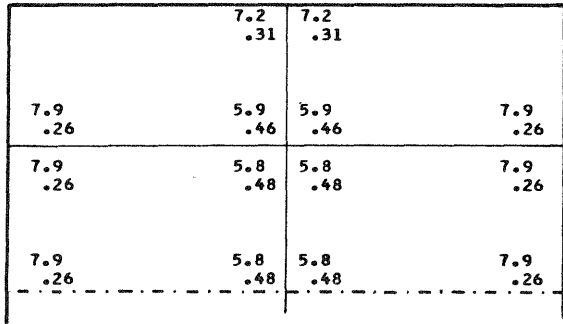




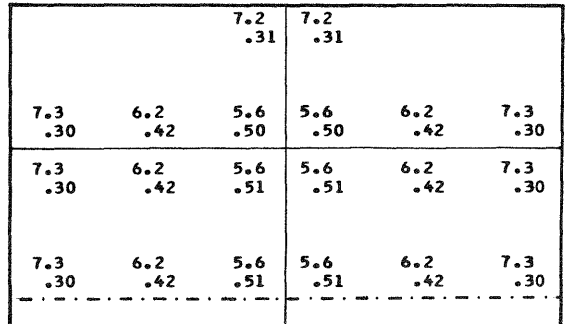
4 Punkte pro Modell



6 Punkte pro Modell

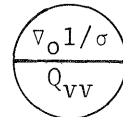


8 Punkte pro Modell



12 Punkte pro Modell

Fig. 12a Gewichtskoeffizienten Q_{VV} und Grenzwerte ∇_{01} für freien 8-Modelle-Block ($p=0.6, q=0.2$, Punktanordnung s. Fig. 9a, S. 47)



Die Unterschiede zwischen Rand und Blockinneren sind bei den E4- und E6-Blöcken sehr groß. Im Innern der Blöcke wird bei allen Punktbesetzungen mindestens 75 % des Q_{VV} -wertes für unendlich große Blöcke erreicht. Eine Ausnahme bildet mit 60 % der innere Punkt des E4-Eckmodells.

Bei den E4- und E6-Blöcken verursachen grobe Fehler in den Randpunkten nicht am Rand die größte Verbesserung. Die Fehler "verschieben" sich zum Blockinneren hin. Der gerade genannte innere Punkt des E4-Eckmodells weist immer die größte Verbesserung auf, wenn er oder einer der vier benachbarten Randpunkte grob falsch ist. Eine Fehlerlokalisierung ist nicht möglich. Der einfache Test würde zu Fehlschlüssen führen.

Dagegen verursachen grobe Fehler in E8- oder E12-Blöcken immer an der Stelle die größte Verbesserung, an der sie auftreten, so daß sie sich mit dem einfachen Test finden lassen.

Der Vergleich zeigt zwar die z.T. starke Abhängigkeit der Gewichtskoeffizienten von der Lage der Punkte im Block, gibt jedoch keinen klaren Hinweis, wie die Unterschiede behoben werden können.

4.2.4 Der Einfluß der Punktanordnung im Modell auf die Gewichtskoeffizienten

Die Punktanordnung im Modell verursacht das unterschiedliche Gefälle der Q_{VV} zum Rand des Blockes hin. Der Tab. 4 kann man entnehmen, wie stark eine Erhöhung der Punktzahl die Größe der Grenzwerte ∇_{01} mindert. Der Einfluß ist bei den beiden Rändern und der Blockmitte verschieden.

	Änderung der Punktzahl pro Modell (Mehraufwand)	Lage der Punkte	Änderung von $\nabla_0 1/\sigma$		Einfluß auf $\nabla_0 1$ in %
			8-Modell-Block	18-Modelle-Block	
1	4 → 6 (+ 50 %)	K-Rand	22. → 12.	18. → 11.	40-45 % !
		L-Rand	11.5 → 11.3	7.2 → 7.1	< 2 %
		Mitte	9.2 → 7.8	8.3 → 7.2	< 15 %
2	8 → 12 (+ 50 %)	K-Rand	7.2 → 7.2	7.2 → 7.1	< 2 %
		L-Rand	7.9 → 7.3	7.8 → 7.1	< 10 %
		Mitte	5.8 → 5.6	5.8 → 5.5	< 5 %
3	4 → 8 (+100 %)	K-Rand	22. → 8.0	18. → 7.8	55-65 % !
		L-Rand	11. → 7.5	11. → 7.2	30-35 %
		Mitte	9.2 → 5.8	8.3 → 5.8	30-35 %
4	6 → 12 (+100 %)	K-Rand	11. → 7.3	11. → 7.1	30-35 %
		L-Rand	11. → 7.2	11. → 7.1	30-35 %
		Mitte	7.8 → 5.6	7.2 → 5.5	15-25 %
5	4 → 4 + +Doppelpunkte am Rand (+ 7 % *)	K-Rand	22. → 7.8	18. → 7.8	55-65 % !
		L-Rand	11. → 7.6	11. → 7.6	30-35 %
		Mitte	9.2 → 8.2	8.3 → 8.1	< 10 %

*) Bei einem 200-Modelle-Block

Tab. 4 Einfluß der Punktzahl pro Modell auf die Grenzwerte $\nabla_0 1$ bei freien quadratischen Lageblöcken mit 8 bzw. 18 Modellen

Die ersten beiden Zeilen zeigen, wie die Punkte in der Streifenachse die Kontrollierbarkeit verändern. Ein spürbarer Einfluß ist nur bei dem Übergang von E4- zu E6-Blöcken am K-Rand festzustellen. Die Erhöhung des Meßaufwandes um 50 % rechtfertigt diesen Gewinn jedoch nicht, da sich in den Randpunkten von E6-Blöcken grobe Fehler mit dem einfachen Test nicht finden lassen.

Die Messung von Doppelpunkten (Zeile 3 und 4) führt zu einer sehr guten Kontrollierbarkeit aller Beobachtungen. Auch hier ist der Gewinn bei den K-Rändern der E4-Blöcke am größten. In allen Fällen können nun mindestens 30 % kleinere Fehler erkannt werden.

4.2.5 Doppelbefliegungen

Der Meßaufwand für Doppelbefliegungen ist bei sechs Punkten pro Modell mit dem für E12-Blöcke vergleichbar. Fig. 12c zeigt die Gewichtskoeffizienten und Grenzwerte für einen 8- und einen 16-Modelle-Block. Mit Ausnahme der Blockecken sind die Beobachtungen gleich gut oder besser kontrollierbar als bei E12-Blöcken. Die Q_{VV} streuen zwischen ca. 0.28 und 0.60, je nach der Vielfachheit der Verknüpfungspunkte und nach der Lage des Punktes: Punkte in der Modellmitte sind besser kontrollierbar als Eckpunkte der Modelle. Aus diesem Grund kann man in dem vierfachen Verknüpfungspunkt in der Mitte des dargestellten Teilblocks kleinere grobe Fehler finden ($\nabla_0 1 = 5.5 \sigma$) als in dem achtfachen Verknüpfungspunkt in der Mitte des Gesamtblocks ($\nabla_0 1 = 6.1 \sigma$). Die Blockränder sind durchweg gut kontrollierbar.

	7.6 .28	6.9 .34		6.9 .34	7.0 .33		7.0 .33	6.9 .34		6.9 .34	7.6 .28
7.6 .28			5.8 .47			6.9 .34			5.8 .47		7.6 .28
6.9 .34			5.5 .54			6.2 .41			5.5 .54		6.9 .34
	5.8 .47	5.5 .54		5.5 .54	5.2 .60		5.2 .60	5.5 .54		5.5 .54	5.8 .47
6.9 .34			5.5 .54			6.2 .41			5.5 .54		6.9 .34
7.6 .28			5.8 .47			6.9 .34			5.8 .47		7.6 .28
	7.6 .28	6.9 .34		6.9 .34	7.0 .33		7.0 .33	6.9 .34		6.9 .34	7.6 .28

8-Modelle-Block

	7.6 .28	6.9 .34		6.9 .34	6.9 .34		6.9 .34	6.9 .34		6.9 .34	7.6 .28
7.6 .28			5.8 .47			6.8 .35			5.8 .47		7.6 .28
6.9 .34			5.4 .55			6.2 .41			5.4 .55		6.9 .34
	5.8 .47	5.4 .55		5.4 .55	5.2 .60		5.2 .60	5.4 .55		5.4 .55	5.8 .47
6.9 .34			5.4 .55			6.1 .43			5.4 .55		6.9 .34
6.9 .34			5.2 .60			6.1 .43			5.2 .60		6.9 .34
	6.8 .35	6.2 .41		6.1 .43	6.1 .43		6.1 .43	6.1 .43		6.2 .41	6.9 .34

16-Modelle-Block

Fig. 12c Gewichtskoeffizienten Q_{VV} und Grenzwerte v_{01} bei freien Lageblöcken (Doppelbefliegungen) mit sechs Punkten pro Modell (Punktanordnung vgl. Fig. 9b, S. 47)

$$\frac{v_{01}/\sigma}{Q_{VV}}$$

Die Grenzwerte werden durch die Messung von Doppelpunkten am Rand des Blockes um weniger als 30 %, in der Mitte um weniger als 10 % gemindert, wie man der Fig. 12d entnehmen kann. Im günstigsten Fall sind Fehler ab $v_{01} = 1.2 \gamma_0 = 4.7 \sigma$ gegenüber $v_0 = 1.3 \gamma_0 = 5.2 \sigma$ bei D6-Blöcken erkennbar.

Der Unterschied ist verglichen mit dem erhöhten Meßaufwand unbedeutend.

Die Gewichtskoeffizienten Q_{VV} liegen bei Doppelbefliegungen in unserem Fall immer über 0.25. Die Anschauung läßt vermuten, daß dies auch für andere Befliegungsanordnungen gilt.

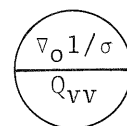
	6.4 .39	5.7 .50	5.7 .50	5.5 .54	5.5 .54	5.7 .50	5.7 .50	6.4 .39
6.4 .39			5.3 .57		5.5 .54		5.3 .57	6.4 .39
5.7 .50			5.0 .64		5.1 .62		5.0 .64	5.7 .50
	5.3 .57	5.0 .64	5.0 .64	4.7 .72	4.7 .72	5.0 .64	5.0 .64	5.3 .57
5.7 .50			5.0 .64		5.1 .62		5.0 .64	5.7 .50
6.4 .39			5.3 .57		5.5 .54		5.3 .57	6.4 .39
6.4 .39	5.7 .50	5.7 .50	5.7 .50	5.5 .54	5.5 .54	5.7 .50	5.7 .50	6.4 .39

8-Modelle-Block

	6.4 .39	5.7 .50	5.7 .50	5.4 .55	5.4 .55	5.7 .50	5.7 .50	6.4 .39
6.4 .39			5.3 .57		5.4 .55		5.3 .57	6.4 .39
5.7 .50			5.0 .64		5.1 .62		5.0 .64	5.7 .50
	5.3 .57	5.0 .64	5.0 .65	4.7 .72	4.7 .72	5.0 .65	5.0 .64	5.3 .57
5.7 .50			5.0 .65		5.0 .63		5.0 .65	5.7 .50
5.4 .55			4.7 .72		5.0 .65		4.7 .72	5.4 .55
5.4 .55	5.1 .62	5.0 .60	5.0 .60	5.0 .65	5.0 .65	5.0 .60	5.1 .62	5.4 .55

16-Modelle-Block

Fig. 12d Gewichtungskoeffizienten Q_{VV} und Grenzwerte ∇_{01}/σ bei freien Lageblöcken (Doppelbefliegungen) mit zwölf Punkten pro Modell (Punktanordnung vgl. Fig. 9b, S. 47)



4.2.6 Möglichkeiten zur Erhöhung der Kontrollierbarkeit

Die Ergebnisse legen mehrere Methoden nahe, mit denen eine gleichmäßig hohe Kontrollierbarkeit aller photogrammetrischen Koordinaten eines Blocks zu erreichen ist. Sie sind in den folgenden Abschnitten nach dem Grad des Meßaufwandes geordnet.

4.2.6.1 Doppelbefliegungen

Mehrfachbefliegungen sind neben terrestrischen Kontrollen das aufwendigste Verfahren zur Prüfung photogrammetrischer Messungen. Sie weisen die höchste

Sicherheit bei der Fehlersuche auf. Jedoch wird nur durch terrestrische Kontrollen die Signalisierung, d.h. die Identität der Photos geprüft.

Die gegenseitige Stabilisierung der Modelle führt dazu, daß grobe Fehler mit dem einfachen Test in allen Beobachtungen lokalisierbar sind. Auch bei Fehlerhäufungen ist die kontrollierte Bestimmung der Koordinaten gewährleistet, denn alle Punkte werden in wenigstens zwei unabhängigen Bildpaaren erfaßt. Doppelpunkte führen daher zu keiner wesentlich höheren Kontrollierbarkeit.

Für die Prüfung der Beobachtungen allein sind schon Doppelbefliegungen zu aufwendig, für die Eliminierung systematischer Fehler auf meßtechnischem Weg sind sie jedoch gut geeignet [Thomas, 1975].

4.2.6.2 Messung von Doppelpunkten

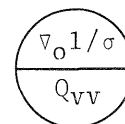
Unter den Einfachbefliegungen sind nur bei den E8- und E12-Blöcken die Ränder gut kontrollierbar. E12-Blöcke bieten gegenüber E8-Blöcken keinen Vorteil, da in wenigstens 33 % der Punkte grobe Fehler nicht lokalisierbar sind (vgl. 4.2.2). E8-Blöcke bieten bei vergleichsweise geringem Meßaufwand die besten Voraussetzungen für die Suche grober Fehler. Auch wenn - im Gegensatz zu Doppelbefliegungen - Fehler in den Randpunkten nicht lokalisierbar sind, bleiben gegebenenfalls die Verknüpfungen erhalten. Dies ist besonders wichtig, da gerade hier Paßpunkte liegen sollten.

Diese Vorteile bleiben bestehen, wenn nur am Rand des Blockes Doppelpunkte und sonst Einfachpunkte gemessen werden. E4-Blöcke, die Grundlage vor allem für die Kartenherstellung, sind auf diese Weise gleichmäßig gut kontrollierbar. Die Gewichtskoeffizienten und die Grenzwerte sind aus der Fig. 13 zu entnehmen. Man erkennt, daß in den Punkten des K-Randes die Grenzwerte durch die Messung von Doppelpunkten um ca. 60 % verringert werden (vgl. Tab. 4). Bei einem 200-Modelle-Block beträgt der Mehraufwand dagegen nur 7 %.

Fig. 13 Einfluß von Doppelpunkten am Rand eines freien 18-Modelle-Blocks auf die Gewichtskoeffizienten Q_{VV} und die Grenzwerte $\nabla_0 1/\sigma$

4 : 4 Punkte pro Modell
 4' : 4 Punkte pro Modell, zusätzlich Beipunkte am Rand des Blocks

4→4'	4→4'	4→4'	4→4'	4→4'	4→4'
	11. → 7.6 .13 → .29	11. → 7.6 .13 → .29	11. → 7.6 .13 → .29	11. → 7.6 .13 → .29	
21. → 7.8 .035 → .26	10. → 9. .16 → .20	9.4 → 8.5 .18 → .22	9.4 → 8.5 .18 → .22	10. → 9. .16 → .20	21. → 7.8 .035 → .26
21. → 7.8 .035 → .26	9.2 → 8.8 .19 → .21	8.7 → 8.4 .21 → .23	8.7 → 8.4 .21 → .23	9.2 → 8.8 .19 → .21	21. → 7.8 .035 → .26
19. → 7.8 .045 → .26	8.9 → 8.6 .20 → .22	8.5 → 8.3 .22 → .23	8.5 → 8.3 .22 → .23	8.9 → 8.6 .20 → .22	19. → 7.8 .045 → .26
19. → 7.8 .045 → .26	8.7 → 8.5 .21 → .22	8.3 → 8.2 .23 → .24	8.3 → 8.2 .23 → .24	8.7 → 8.5 .21 → .22	19. → 7.8 .045 → .26
18. → 7.8 .05 → .26	8.7 → 8.5 .21 → .22	8.3 → 8.1 .23 → .24	8.3 → 8.1 .23 → .24	8.7 → 8.5 .21 → .22	18. → 7.8 .05 → .26



4.2.6.3 Zusätzliche Modelle am Rand

Da man bei dieser Methode Doppelmessungen nur am Rand des Blockes vornimmt, wird die Kontrollierbarkeit der Ränder von Teilblöcken davon nicht beeinflusst. Hier bietet sich die Umrandung der Teilblöcke mit zusätzlichen Modellen an, wie sie von Ackermann |1966| zur Erhöhung der Genauigkeit vorgeschlagen wurde. Dazu werden Nachbarstreifen bzw. ein oder zwei Modelle an den Seiten des Teilblocks mit in die Ausgleichung einbezogen. Die Ränder der ursprünglichen Teilblöcke liegen so im Innern, wodurch eine gleichmäßige Kontrollierbarkeit der Beobachtungen erreicht ist. An den Rändern des Gesamtblocks erhält man Mischformen: Die Ränder der Teilblöcke werden durch Doppelpunkte oder zusätzliche Modelle versteift.

Mit einem sehr geringen Mehraufwand ist es auf diese Weise möglich, bei Grenzwerten von ca. 8σ in allen Bearbeitungsstufen eine gleichmäßige Kontrollierbarkeit der photogrammetrischen Koordinaten zu erreichen.

4.3 Lageblöcke mit Paßpunktrahmen

Bisher haben wir nur "freie" Blöcke betrachtet. Im allgemeinen kommen nur sie für die Prüfung grober Fehler in Teilblöcken in Frage. Bei mittleren oder kleineren photogrammetrischen Blöcken wäre auch eine Fehlersuche nach einer Ausgleichung mit Paßpunkten möglich, die wir in diesem Abschnitt untersuchen.

Für die genaue und gesicherte Punktbestimmung genügen Paßpunkte am Rand des Blockes |Ackermann, 1966|. Sie werden als stochastische Größen behandelt und erhalten das gleiche Gewicht ($p_i = 1$) wie die photogrammetrischen Verknüpfungspunkte. Wir beschränken die Untersuchung auf Blöcke mit vier Punkten pro Modell, da sich hier die Folgen der Einpassung des Blocks auf einen Rahmen besonders deutlich zeigen. Die Kontrollierbarkeit der Meßdaten hängt stark von der Paßpunktdichte ab. Deshalb wählen wir als Paßpunktintervall $i = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ und 20 Basislängen.

In Tab. 5 sind die Gewichtskoeffizienten Q_{VV} ausgewählter Punkte in Abhängigkeit von der Blockgröße zusammengestellt, dies sind (vgl. Fig. 14):

PP11 : Eckpaßpunkt
PP12, VP12: nächstliegender Paß- bzw. Verknüpfungspunkt des L-Randes
PP21, VP21: nächstliegender Paß- bzw. Verknüpfungspunkt des K-Randes
PP13, VP13: Paß- bzw. Verknüpfungspunkt in der Mitte des L-Randes
PP31, VP31: Paß- bzw. Verknüpfungspunkt in der Mitte des K-Randes
VP33: Verknüpfungspunkt in der Mitte des Blocks

Die Werte sind für Blöcke mit vier verschiedenen Paßpunktbesetzungen angegeben:

- $i=2$, mit dichtem Paßpunktrand
- $i=N$, mit acht Paßpunkten
- $i=2N$, mit vier Paßpunkten und
- $i=\infty$, mit zwei Paßpunkten, d.h. für freie Blöcke

Tab. 5 Gewichtskoeffizienten Q_{VV} in Paß- und Verknüpfungspunkten quadratischer Lageblöcke ($\sqrt{\lambda_0} = 4$) mit vier Punkten pro Modell

N	PP11		PP12	PP13		PP21	PP31								
	i=2	i=2N	i=2	i=2	i=N	i=2	i=2	i=N							
2	.189	.0837	.330	.330	.330	.310	.310	.310							
3	.188	.0451	.321	.321	.330	.306	.306	.310							
4	.188	.0276	.319	.316	.200	.304	.299	.191							
5	.187	.0184	.318	.314		.304	.298								
6	.187	.0131	.318	.312	.131	.304	.296	.129							
10	.187	.0049	.318	.309	.068	.304	.293	.068							
			VP12	VP13	VP21	VP31	VP33								
			i=2N	i=∞	i=2N	i=∞	i=2	i=2N	i=∞	i=2	i=2N	i=∞			
2			.177	.120	.177	.120	.159	.095	.033	.159	.093	.039	.272	.217	.189
3			.161		.161		.158	.069		.158	.073		.258	.246	
4			.147		.150		.158	.058		.157	.066		.256	.247	
5			.146		.148		.156	.048		.155	.059		.254	.249	
6			.142		.147		.156	.043		.155	.056		.253	.249	
10			.135	.131	.143	.140	.156	.037	.033	.155	.053	.050	.251	.249	.249

N Zahl der Streifen
i Paßpunktintervall in Basislängen
PP Paßpunkt
VP Verknüpfungspunkt

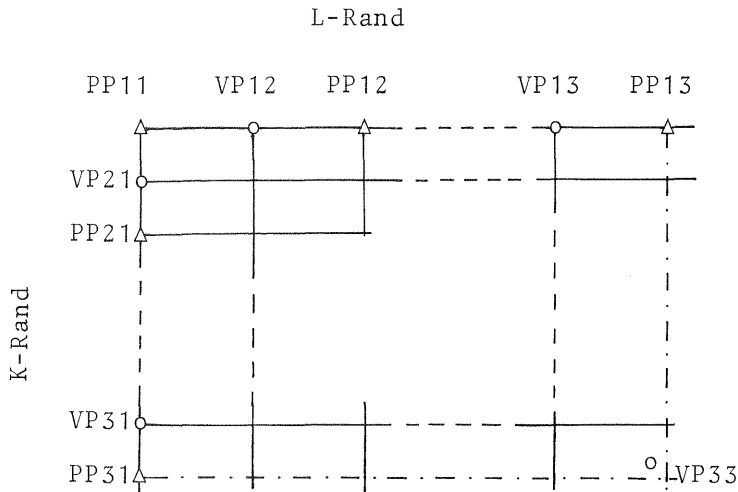


Fig. 14 Lage auserwählter Paß- und Verknüpfungspunkte
(zu Tab. 5)

4.3.1 Die Gewichtskoeffizienten der Verknüpfungspunkte

Zunächst betrachten wir den Einfluß des Paßpunkttrahmens auf die Kontrollierbarkeit der Verknüpfungspunkte.

Die Gewichtskoeffizienten Q_{VV} der Verknüpfungspunkte VP12, VP13, VP21 und VP31 sind bei dichter Paßpunktbesetzung mit $Q_{VV} = 0.15$ am größten und fast unabhängig von der Blockgröße. Der Unterschied zur Eckbesetzung nimmt mit wachsender Blockgröße zu. In einem 200-Modelle-Block mit dichtem Paßpunkttrand sind die Grenzwerte $\nabla_0 l$ in Punkten des K-Randes mit $\nabla_0 l = 2.5 \gamma_0 = 10 \sigma$ etwa halb so groß wie in einem Block mit nur 4 Paßpunkten. Diese wirken sich auf die Kontrollierbarkeit der Verknüpfungspunkte kaum aus, wie der Vergleich mit dem "freien" Block ($i = \infty$) zeigt.

Die Q_{VV} der Verknüpfungspunkte sind zwischen den Paßpunkten fast konstant, sie nehmen nur bei großen Paßpunktintervallen ($i > 6$) zur Blockecke hin ab. Der Unterschied der Grenzwerte zwischen Verknüpfungspunkt VP21 ($\nabla_0 l = 5.2 \gamma_0 = 21 \sigma$) und Punkt VP31 ($\nabla_0 l = 4.3 \gamma_0 = 17 \sigma$) ist jedoch gering. Die Gewichtskoeffizienten Q_{VV} und die Grenzwerte $\nabla_0 l$ sind für Lageblöcke mit 4 Paßpunkten in Fig. 15 dargestellt und gelten auch für freie Lageblöcke. Die Homogenität im Innern des Blocks ist deutlich zu erkennen.

Bei dichter Paßpunktbesetzung ($i = 2$) verschieben sich Fehler in Randpunkten nicht. Jedoch schon bei einem Paßpunktintervall von vier Basislängen können grobe Fehler in einzelnen Randpunkten mit dem einfachen Test nicht gefunden werden.

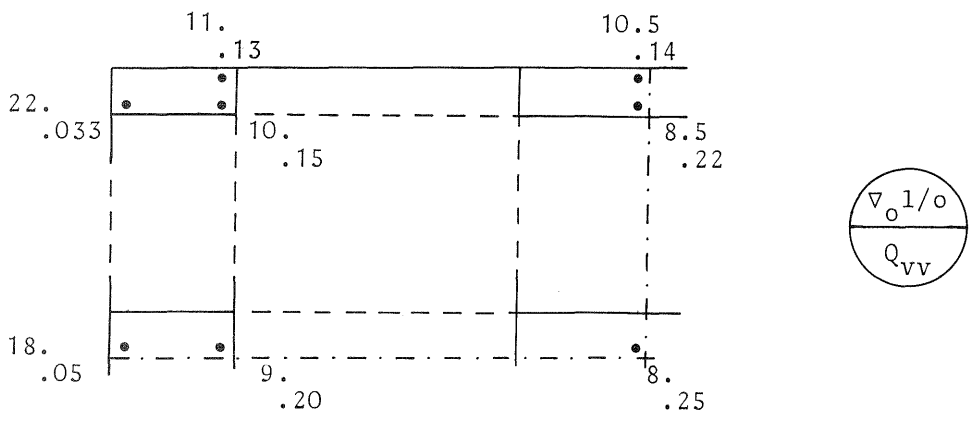


Fig. 15 Gewichtskoeffizienten Q_{VV} und Grenzwerte $\nabla_0 1$ für quadratische Lageblöcke (frei oder mit 4 Paßpunkten, Einfluß der Blockgröße < 15 %) Vier Punkte pro Modell

Die Grenzwerte der Randpunkte liegen in allen Fällen über $2.5 \gamma_0 = 10 \sigma$. Verglichen mit doppelten Randverknüpfungspunkten erscheint daher eine dichte Paßpunktbesetzung für die Prüfung der Verknüpfungspunkte nicht geeignet, solange nicht genügend Paßpunkte zur Verfügung stehen, die eine wesentlich höhere Genauigkeit als die photogrammetrischen Punkte aufweisen.

4.3.2 Die Gewichtskoeffizienten der Paßpunkte

Die Gewichtskoeffizienten der Paßpunkte an den Rändern (PP12, PP13, PP21, PP32) haben bis zu einem Paßpunktintervall von vier Basislängen etwa die gleiche Größe wie die Q_{VV} der Verknüpfungspunkte im Innern des Blocks. Der Paßpunkt in der Ecke ist nur bei dichter Paßpunktbesetzung ($i = 2$) hinreichend gut kontrollierbar ($\nabla_0 1 = 2.4 \gamma_0 = 10 \sigma$). Mit wachsendem Paßpunktintervall nimmt der Grenzwert dieses Punktes zu. Die Abhängigkeit ist in Fig. 16 dargestellt.

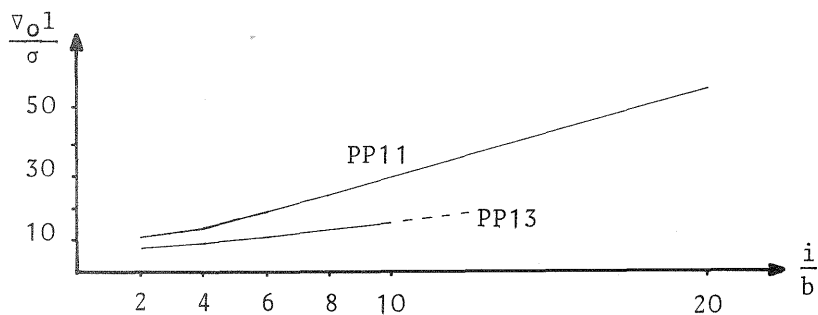


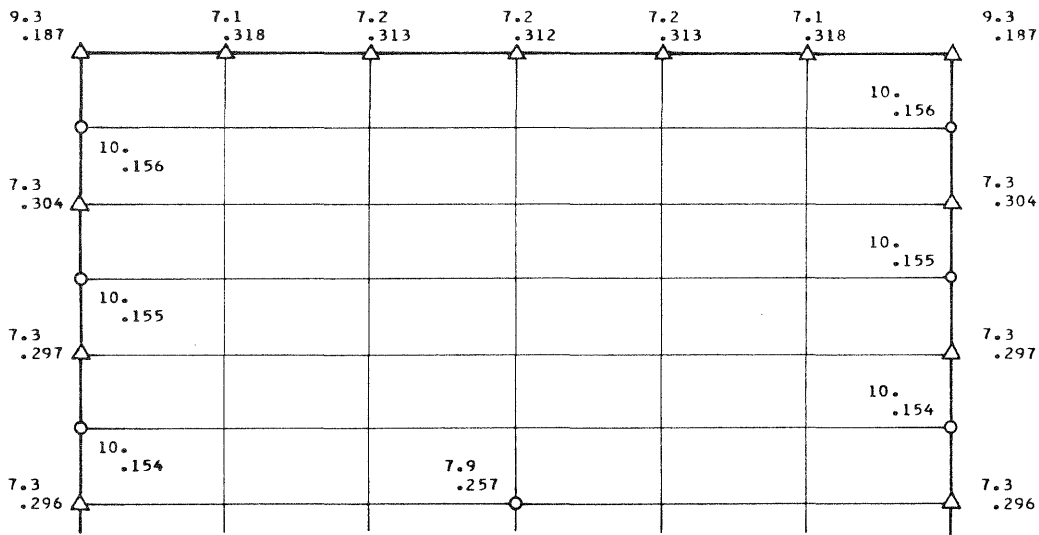
Fig. 16 Grenzwerte für Eck- und Randpaßpunkte in Abhängigkeit vom Paßpunktintervall i

Für große i kann man den Grenzwert der Eckpaßpunkte mit

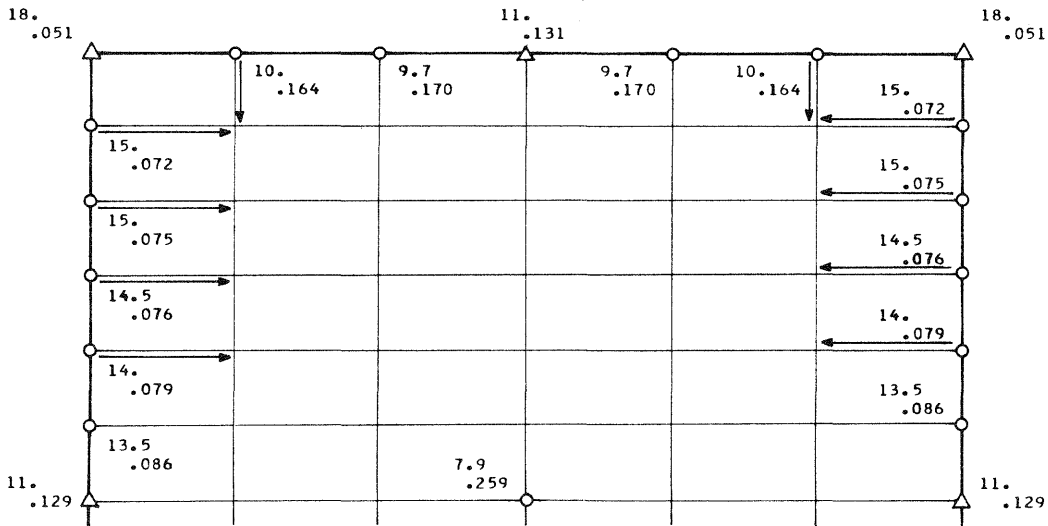
$$\nabla_0 1(PP11) = 0.7 \gamma_0 \frac{i}{b} = 0.7 \sqrt{\lambda_0} \sigma \frac{i}{b}$$

abschätzen. Die Grenzwerte der Randpaßpunkte sind in diesem Fall etwa halb so groß und für den gesamten Rand fast konstant. Die Lageblöcke der Fig. 17 sollen dies veranschaulichen.

Im Gegensatz zu den Randverknüpfungspunkten und trotz der z.T. kleinen Q_{VV} -Werte tritt die größte Restverbesserung immer an dem jeweils grob falschen Paßpunkt auf, den man daher mit dem einfachen Testverfahren lokalisieren kann.



a) Paßpunktintervall $i = 2$



b) Paßpunktintervall $i = 6$

Fig. 17 Gewichtskoeffizienten Q_{VV} und Grenzwerte $\nabla_0 1$ in einem quadratischen E4-Block mit 72 Modellen

Obwohl die Verknüpfungspunkte etwas schlechter kontrollierbar sind, sollte man sie bei großen Paßpunktintervallen getrennt von den Paßpunkten prüfen, damit die Kontrolle der Paßpunkte nicht von Fehlern in den photogrammetrischen Koordinaten beeinträchtigt wird (vgl. 4.4.1). Bei dichter Paßpunktbesetzung und Verwendung eines statistischen Tests empfiehlt sich dagegen die gemeinsame Prüfung aller Messungen.

Eine Erhöhung der Kontrollierbarkeit der Paßpunkte durch Doppelpunkte ist theoretisch möglich, jedoch wegen der meist gemeinsamen Bestimmung praktisch unwirksam. *)

4.4 Gemischte Gewichtskoeffizienten

4.4.1 200-Modelle-Block mit schwacher Paßpunktbesetzung

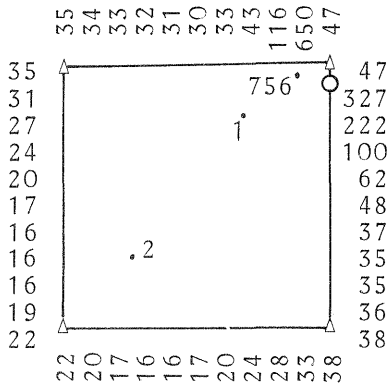
Die Schwierigkeit der Suche grober Fehler nach einer Ausgleichung mit Paßpunkten wird besonders deutlich, wenn man die Größe der Restklaffungen im gesamten Block untersucht.

In Fig. 18 sind die Absolutbeträge der Restfehler in mm angegeben, die ein grober Fehler von 10 m in E4-Blöcken mit vier bzw. acht Paßpunkten verursacht. Zusätzlich sind die Stellen gekennzeichnet, an denen die Restklaffungen relativ zur Umgebung am größten bzw. am kleinsten sind.

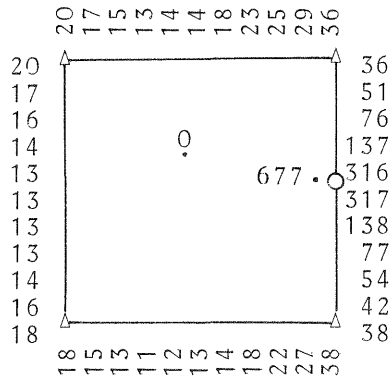
Bei Fig. 18a handelt es sich um den groben Fehler eines Punktes am K-Rand in der Nähe der Blockecke. Das Maximum der $|v|$ fällt nicht mit diesem Fehler zusammen (s.o.). Die Beträge der Verbesserungen nehmen mit wachsender Entfernung von diesem Maximum nicht monoton ab. Die übrigen drei Paßpunkte bilden relative Maxima. Im Innern des Blocks sind zwei Minima zu erkennen, bei denen die Restklaffungen weniger als 1/10 des kleinsten relativen Maximums betragen. Linien gleicher $|v|$ sind in Fig. 18b dargestellt. Die Fig. 18c bis Fig. 18f zeigen, daß es sich hier um keinen Einzelfall handelt.

Bei den Paßpunktfehlern in Fig. 18d und f erkennt man, wie klein die Restklaffungen sind. Das Maximum ist im Vergleich zu Verknüpfungspunktfehlern (Fig. 18a, c und e) sehr flach. Ein zusätzlicher Fehler von nur 10 cm (!) in dem benachbarten Verknüpfungspunkt am K-Rand bewirkt (d) deshalb, daß der Eckpaßpunkt nicht mehr die größte Restverbesserung erhält. Die relativen Maxima an den Paßpunkten dürfen daher auch nicht unbedingt als Hinweis auf grobe Paßpunktfehler gedeutet werden. Ob diese Maxima zum Beispiel bei einer Kombination der Fehler von Fig. 18d und Fig. 18e auf Paßpunkt- oder Verknüpfungspunktfehler hinweisen, kann man erst nach der Elimination des grob falschen Verknüpfungspunktes in der Mitte des Blocks entscheiden. Die "Fehlerkreismethode" von Osaikhuiwu [1972], bei der mehrere Fehler ohne zwischenzeitliche Neuberechnung des Blocks gleichzeitig angezeigt werden, kann daher zu Fehlschlüssen führen.

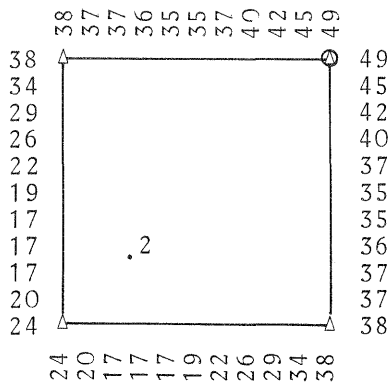
*) Die Korrelation grob falscher photogrammetrischer Doppelpunkte kann zwar nicht vernachlässigt werden, ist aber wesentlich kleiner.



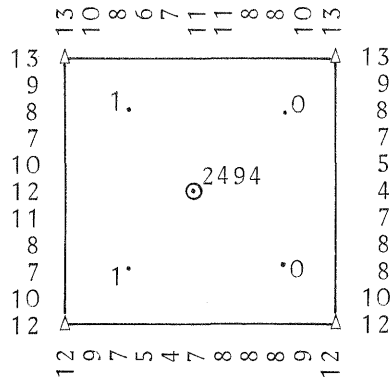
a) Verknüpfungspunktfehler



c) Verknüpfungspunktfehler

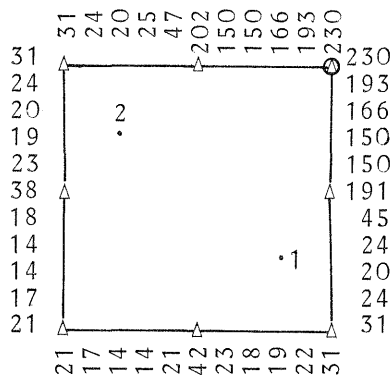


d) Paßpunktfehler



e) Verknüpfungspunktfehler

- △ Paßpunkt
- fehlerhafter Punkt
- Minimum oder Maximum



f) Paßpunktfehler

Fig. 18 Absolutbeträge der Restfehler in 200-Modelle-Blöcken mit einem 10-m-Fehler (Angaben in mm)

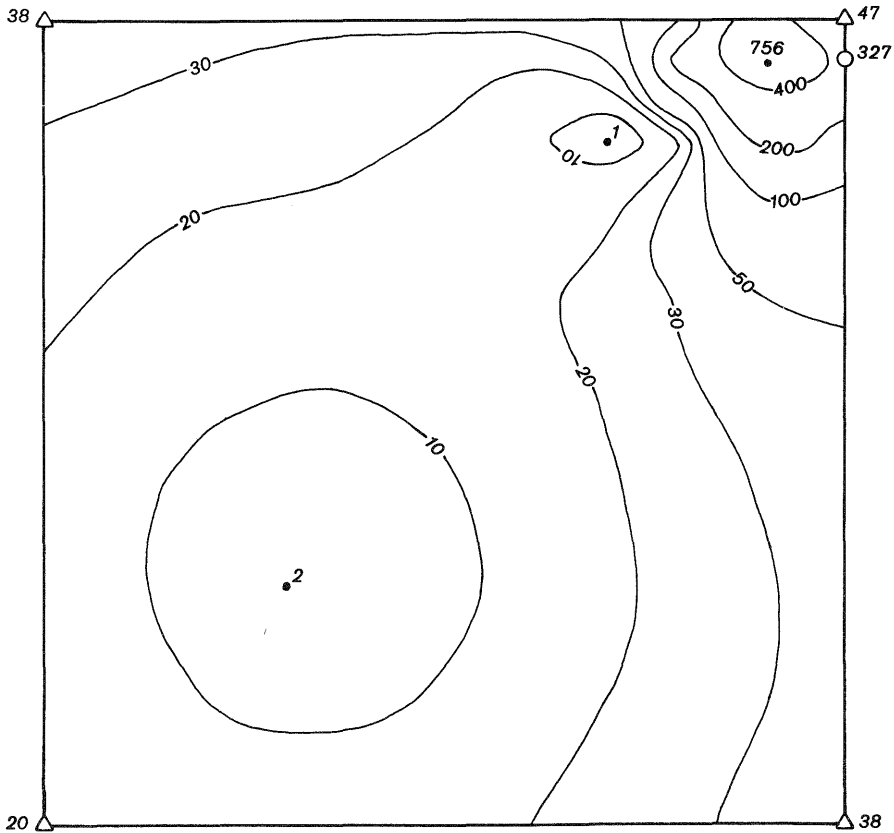


Fig. 18b Linien gleicher $|v|$ bei einem 200-Modelle-Block mit einem 10-m-Fehler (Angaben in mm)

Die Berücksichtigung der Q_{VV} verändert die Lage der größten bzw. kleinsten Verbesserung nur am Rand des Blocks, so daß die genannten Schwierigkeiten bei der Suche grober Paßpunktfehler nur gemildert werden.

Eine wirksame Kontrolle der Paßpunkte setzt daher die sichere Erfassung aller grob falschen Verknüpfungspunkte in einer freien Blockausgleichung voraus. Auch wegen der gegenseitigen Beeinflussung dieser Fehler ist eine Aufteilung in Subblöcke zweckmäßig.

4.4.2 Beispiel für die Suche eines groben Fehlers in einem freien Lageblock

Fig. 19a, b stellt die Restvektoren an den Verknüpfungspunkten eines freien 18-Modelle-Blocks mit vier Punkten pro Modell dar. Jeder der Blöcke enthält einen Lagefehler. Die übrigen Punkte sind fehlerfrei. Tab. 6 zeigt die Verbesserung der Punkte, die im Umkreis der Punkte mit den größten Verbesserungen liegen. Aus den Gewichtskoeffizienten $Q_{V_i}v_i$ erhält man den kritischen Wert.

$$k_i = \sigma \sqrt{Q_{V_i}v_i F_{0.999,1,\infty}} = 3.29 \sqrt{Q_{V_i}v_i} \sigma$$

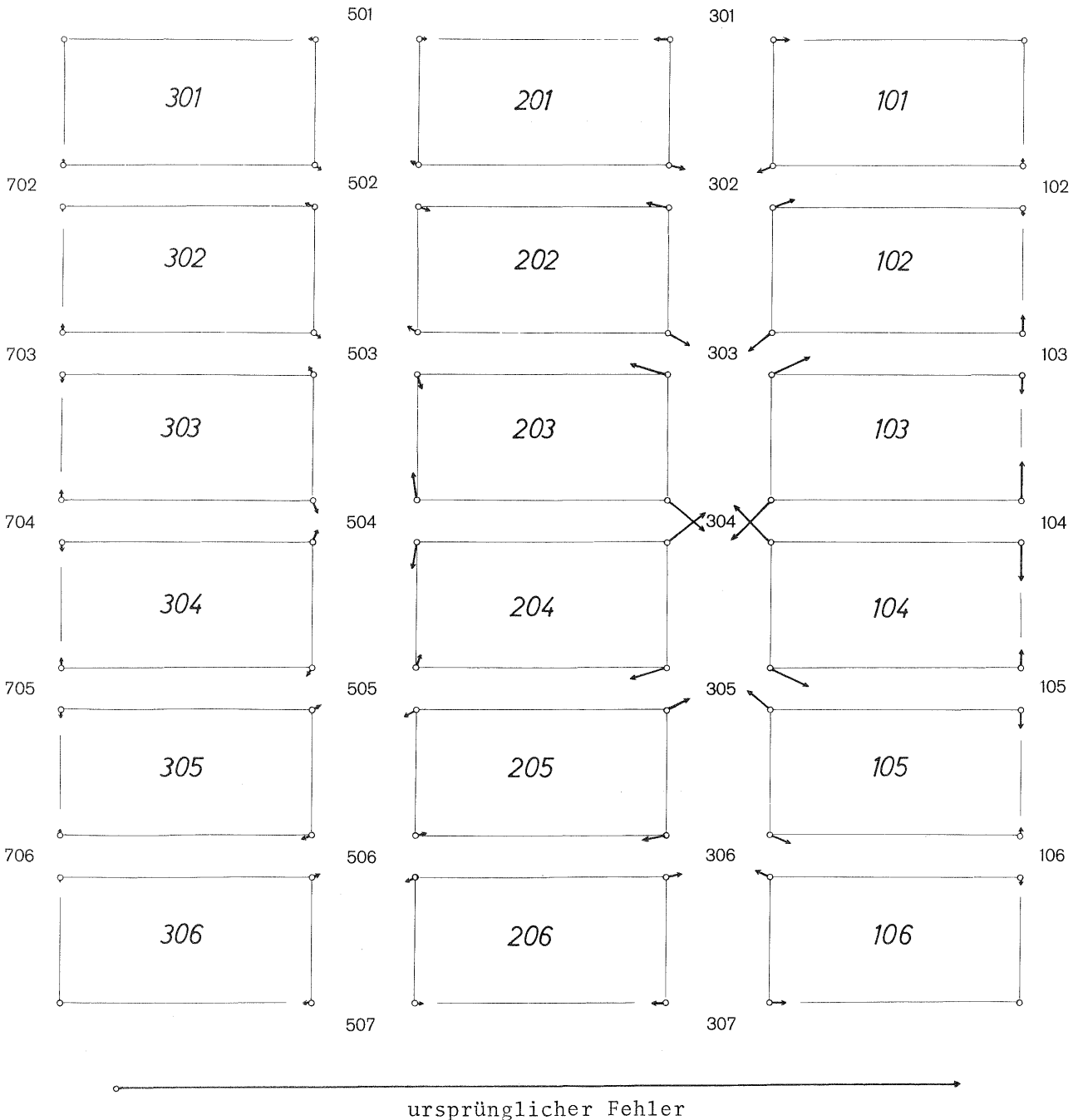


Fig. 19a Restvektoren eines fehlerfreien 18-Modelle-Blocks mit einem groben Fehler in Punkt 104
(zu Tab. 6)

Spalten 4 bis 7 enthalten die Testgrößen für den einfachen und den statistischen Test.

Der einfache Test mit dem Indikator $|v|_{\max}$ zeigt im Fall a den Punkt 304 des Modells 104 im Inneren des Blocks als groß falsch an, der statistische Test mit dem Indikator $|w_i|_{\max}$ dagegen den Randpunkt 104 im Modell 104. Dieser Punkt ist tatsächlich um 10 Recheneinheiten groß falsch. Eine Lokalisierung der falschen Beobachtung ist nicht möglich. Die zugehörige Verbesserung ist die fünftgrößte, wogegen $|w_i|_{\max}$ mit 0.65 Recheneinheiten deutlich über die zweitgrößte Testgröße mit 0.43 Recheneinheiten bei Punkt 304 desselben Modells dominiert.

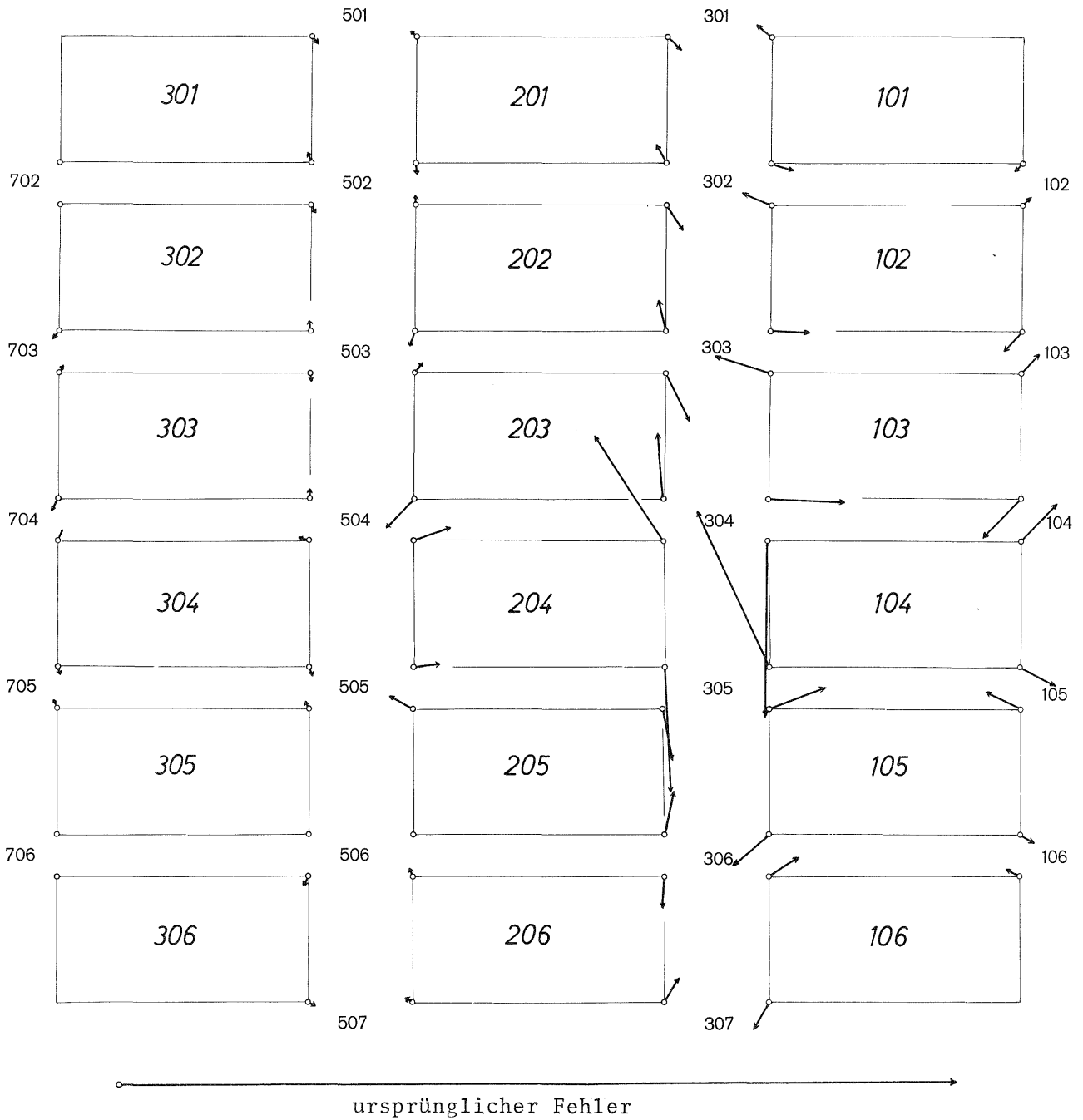


Fig. 19b Restvektoren eines fehlerfreien 18-Modelle-Blocks mit einem groben Fehler in Punkt 304 im Modell 104 (zu Tab. 6)

Ein gleichgroßer grober Fehler in diesem Punkt führt auf das Vektorfeld Fig. 19b. Die zugehörigen Testgrößen sind den Spalten 6 und 7 der Tab. 6 zu entnehmen. Sowohl der einfache wie der statistische Test lokalisieren den groben Fehler richtig. Der relative Unterschied zur zweitgrößten Testgröße ist beim einfachen Test ca. 2.2 %, beim statistischen Test ca. 1.8 %. Wegen dieses sehr geringen Unterschiedes zwischen größter und zweitgrößter Testgröße kann ein kleiner unentdeckbarer Fehler z.B. in Punkt 105 desselben Modells zu einer Fehlentscheidung beider Tests führen.

Tab. 6 Beispiel für die Suche eines groben Fehlers mit dem einfachen und dem statistischen Test

a) freier Block mit Fehler im Randpunkt 104

b) freier Block mit Fehler in Punkt 304 im Modell 104

(Text S. 62/63)

1		2	3	4	5	6	7
Modell	Punkt	Q_{VV}	$\frac{k_i}{\sigma}$	a		b	
				$ v $	$\frac{\sigma v }{k_i}$	$ v $	$\frac{\sigma v }{k_i}$
101	102	.0348	.614	.094	.153	.130	.213
	301	.1257	1.166	.179	.153	.244	.209
	302	.1605	1.318	.201	.153	.276	.210
102	102	.0348	.614	.094	.153	.131	.213
	302	.1902	1.435	.271	.189	.373	.260
	303	.1997	1.470	.341	.232	.470	.319
103	103	.0442	.692	.228	.329	.313	.452
	303	.2064	1.495	.500	.334	.695	.465
	304	.2084	1.502	<u>.642</u>	.427	.893	.595
104	104	.0462	.707	.462	<u>.653</u>	.643	.909
	105	.0442	.692	.228	<u>.329</u>	.467	.675
	304	.2084	1.502	<u>.642</u>	.427	<u>2.084</u>	<u>1.387</u>
	305	.2064	1.495	<u>.500</u>	.334	<u>2.037</u>	<u>1.362</u>
105	106	.0348	.614	.094	.153	.188	.306
	305	.1997	1.470	.341	.232	.703	.478
	306	.1902	1.435	.271	.189	.558	.389
106	306	.1605	1.318	.201	.153	.404	.306
	307	.1257	1.166	.179	.153	.357	.306
201	302	.1828	1.407	.186	.132	.248	.176
202	302	.2127	1.517	.259	.171	.353	.233
	303	.2225	1.552	.289	.186	.392	.253
203	303	.2292	1.576	.467	.296	.645	.409
	304	.2306	1.580	.562	.356	.782	.495
204	304	.2306	1.580	.562	.356	1.528	.967
	305	.2292	1.576	.467	.296	1.486	.943
205	305	.2225	1.552	.289	.186	.615	.396
	306	.2127	1.517	.259	.171	.528	.348
206	306	.1828	1.407	.186	.132	.362	.257
Maximalwert bei Modell				104	104	104	104
Punkt				304	104	304	304

4.5 Die Mindestgröße von Subblöcken für die Suche grober Fehler

Die Analyse der Gewichtskoeffizienten Q_{VV} ermöglicht nun eine Aussage über die Mindestgröße von Subblöcken, in denen grobe Fehler mit fast derselben Sicherheit gefunden werden können wie im Gesamtblock. Zwei Kriterien genügen zunächst für die Festlegung:

- a) Die Gewichtskoeffizienten sollen sich nur wenig voneinander unterscheiden.

$$Q_{V_i V_i} (\text{Subblock}) \leq (1 - \delta^2) Q_{V_i V_i} (\text{Gesamtblock})$$

Für $\delta^2 = 0.2$ ist die Differenz der zugehörigen Grenzwerte kleiner als 10 % (vgl. [Baarda, 1968]).

- b) Die Beobachtungen sollen im Subblock denselben Klassen (K_n, L_h) wie im Gesamtblock angehören, d.h. im Gesamtblock kontrollierbare (lokalisierbare) Beobachtungen sollen auch im Subblock kontrollierbar (lokalisierbar) sein.

Nur die Punkte im Innern von Subblöcken können diese Bedingungen erfüllen. Da grobe Fehler in den Randpunkten meistens nicht lokalisierbar sind, sollte außerdem die Elimination eines groben Fehlers in einem Randpunkt die Lokalisierbarkeit der Innenpunkte nicht beeinträchtigen, auch wenn dadurch die Bedingung a) nicht mehr eingehalten wird. Man kann nicht allgemein fordern, daß zwei Fehler in einem Subblock lokalisierbar sind, da in E4-Blöcken zwei grobe Fehler im gleichen Modell zwar festgestellt, aber nicht gefunden werden können.

Man erhält unter diesen Voraussetzungen folgende Subblöcke für die Fehlersuche:

E4- und E6-Blöcke:	3 Streifen à 3 Modelle
E8- und E12-Blöcke:	2 Streifen à 2 Modelle
D6-Blöcke:	2x2 Streifen à 4 Modelle
D12-Blöcke:	1 Streifen à 4 Modelle 2 Streifen à 2 Modelle

In Tab. 7 ist die Zahl der in diesen Subblöcken kontrollierbaren Punkte und die Zahl der Subblöcke für die Prüfung aller Punkte in rechteckigen Blöcken aufgeführt. Die Subblöcke sind in Fig. 20 dargestellt (D6- und D12-Blöcke s. Fig. 12).

Bei einer regelmäßigen Anordnung der Subblöcke können bei Einzelbefliegungen durchschnittlich ebenso viel Punkte kontrolliert werden, wie ein Modell enthält. Bei Doppelbefliegungen werden 8 Modelle gleichzeitig geprüft.

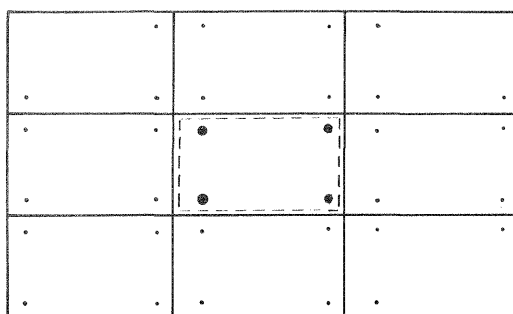
E4-Subblöcke mit 2 Streifen, d.h. Doppelstreifen kann man für die Kontrolle nicht verwenden, da sich Fehler der Randverknüpfungspunkte nicht lokalisieren lassen. Außer bei den E4- und E6-Blöcken sind in den angegebenen Subblöcken zwei grobe Fehler immer lokalisierbar. Die Subblöcke eignen sich auch für die Prüfung der Ränder des Gesamtblocks.

Eine Ausnahme bildet der E4-Block mit neun Modellen. Die Mitte des K-Randes ist erst von einem Subblock mit drei Streifen à fünf Modelle sicher kontrollierbar.

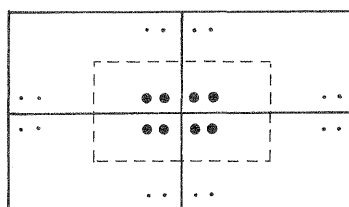
Tab. 7 Mindestgröße von Subblöcken für die Suche grober Fehler in Lageblöcken

	E4	E6	E8	E12	D6	D12
Zahl der Streifen (N)	3	3	2	2	2x2	1,2
Zahl der Modelle pro Streifen (M)	3	3	2	2	je 4	2,4
Zahl der kontrollierb. Punkte	4	6(16)*	8	12(16)*	48(92)*	34(40)*
Zahl der Modelle im Subblock	9	9	4	4	16	8
Subblöcke pro Gesamblock \approx	NM	NM	NM	NM	2NM/9	NM/3

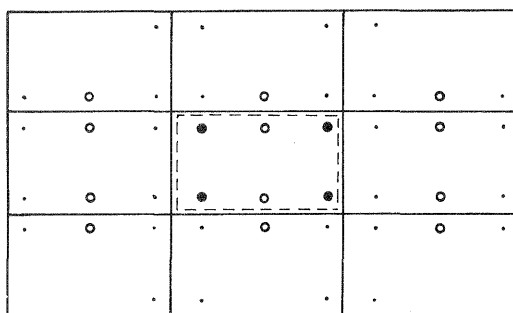
* Diese Zahl wird nur am Rand des Gesamblocks wirksam



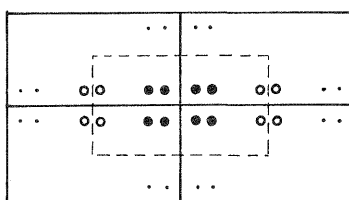
E4-Subblock



E8-Subblock




E6-Subblock



E12-Subblock

Fig. 20 Kleinste Subblöcke für die Suche grober Fehler in Lageblöcken

 Bereich, der für die Kontrolle geeignet ist

Bei Doppelbefliegungen mit anderer Fluganordnung, z.B. bei 60 %-iger Querüberdeckung, kommt man u.U. mit kleineren Subblöcken aus.

Größere Subblöcke sind wegen der großen Überlappungsbereiche wirtschaftlich, auch weil der Organisationsaufwand für die Zusammenstellung der Modelle bei kleinen Subblöcken die Rechenzeit stärker beeinflusst, als die Inversion des Normalgleichungssystems.

TEIL III: TESTVERFAHREN BEI DER HELMERTTRANSFORMATION

1. ZIEL DER UNTERSUCHUNG

Die Ergebnisse von Teil II zeigen, daß die Voraussetzungen für die Suche grober Fehler in Lageblöcken gegeben sind, wenn man einmal von den Rändern schwach verknüpfender Blöcke absieht. Sie verdeutlichen auch, daß man das einfache Testverfahren in den meisten Fällen nicht verwenden kann, auch nicht für die Suche großer grober Fehler.

Daher muß man die Lokalisierungswirksamkeit verschiedener Tests unter möglichst allgemeinen Bedingungen kennen. Eine Untersuchung der Wirksamkeit ¹⁾ von Testverfahren läßt im Vergleich zur Analyse der Gewichtskoeffizienten Q_{VV} außerdem Rückschlüsse darüber zu, ob die Q_{VV} schon genügend Aufschluß geben. Daher beschränken wir uns im folgenden auf die Helmerttransformation.

Köhler [1974] hat die Wirksamkeit des einfachen Tests T_1^0 mit der des statistischen Tests T_1^1 bei der Helmerttransformation und der Drei-Parameter-Transformation ²⁾ verglichen (vgl. [Kraus, 1975]). Wie er zeigt, versagt der statistische Test, bei der Drei-Parameter-Transformation mit einem groben Fehler nur, wenn dieser groß ist ³⁾, während der Test bei der Helmerttransformation einen groben Fehler immer richtig anzeigt.

Dieses Ergebnis konnten wir in Teil I (Abschnitt 3.2.2) theoretisch nachweisen.

Bei zwei groben Fehlern empfiehlt Köhler ein sukzessives Eliminieren der groben Fehler. Für weniger wirksam hält er die gleichzeitige Elimination beider Fehler, d.h. den modifizierten Test T_2^1 . Er geht von fehlerfreien Koordinaten beider Systeme aus, verwendet fest vorgegebene Punktanordnungen und gibt Bereiche an, in denen große grobe Fehler nicht gefunden werden können.

In der hier folgenden Untersuchung sollen zufällige Koordinatenfehler mit berücksichtigt und die Punktanordnung von Fall zu Fall variiert werden. Besonderes Gewicht wird auf die Abhängigkeit der Wirksamkeit von dem Größenverhältnis und dem Winkel zwischen den beiden groben Fehlern gelegt. Die Analyse dient als Grundlage für die Erweiterung des statistischen Tests analog Gl. (15b). Wegen des hohen Aufwandes, der mit dieser Erweiterung verbunden ist, soll der erweiterte Test T_2^2 kritisch mit dem modifizierten Test T_2^1 verglichen werden.

¹⁾ vgl. Fußnote S. 33

²⁾ Die Drei-Parameter-Transformation ist eine Helmerttransformation mit festem Maßstab, hat also nur die unbekannt Transformationsparameter Δx , Δy und κ .

³⁾ Das Versagen des statistischen Tests bei zwei Koordinatenfehlern v_x und v_y an einem Punkt, kann man durch Testen des Absolutbetrages der Verbesserung vermeiden (vgl. auch Teil III. 3.3).

2. DAS UNTERSUCHUNGSKONZEPT

2.1 Wahl der Untersuchungsmethode

Die Wirksamkeit von Tests, wie wir sie in Teil I definiert haben, läßt sich grundsätzlich auf drei Weisen bestimmen:

1. theoretisch, d.h. durch Ableiten der Wahrscheinlichkeitsverteilung,
2. durch Simulation, d.h. Anwendung der Tests auf künstliche Daten und
3. empirisch, d.h. durch Anwendung der Tests auf echte Daten.

Einer allgemeinen theoretischen Lösung steht entgegen, daß es sich einerseits um z.T. unstetige funktionale Zusammenhänge handelt wie etwa die Zahl der Punkte, und daß andererseits auch hier Annahmen über die Verteilung der Punkte und der Fehler notwendig sind, die den im Vergleich zu den beiden anderen Lösungen hohen mathematischen Aufwand nicht rechtfertigen. Die Anwendung der Tests auf echte oder künstliche Daten setzt voraus, daß diese in sehr großer Zahl zur Verfügung stehen, da der Nachweis einer Wirksamkeit von über 99 % nur mit wenigstens einigen tausend Fällen sicher möglich ist.

Da echte Daten in diesem Umfang nur schwer zugänglich sind, entschieden wir uns für die Computersimulation. Die Vorteile sind offensichtlich:

- Wir können über die Parameter frei verfügen,
- die Daten sind nicht durch unbekannte Einflüsse systematisch verfälscht,
- die Aussagen nähern sich bei genügend großem Stichprobenumfang dem theoretischen Ergebnis und
- schließlich wird gezeigt, wie die Fehlersuchroutinen arbeiten.

2.2 Programmbeschreibung

Zur Lösung der genannten Aufgabe wurde vom Verfasser ein Programm entwickelt, das sich in drei wesentliche Teile gliedert:

- Datengenerierung
- Helmerttransformation und Fehlersuche
- Analyse

2.2.1 Datengenerierung

Die Daten, die jedem Fall zugrunde liegen, werden unter Berücksichtigung der zu variierenden Parameter zufällig ausgewählt, dafür kommen in Frage:

- der Bereich, in dem die Punkte liegen,
- die Zahl der Punkte,
- der mittlere Koordinatenfehler,
- die Zahl und Art der groben Fehler,
- der minimale Punktabstand.

Von diesen Parametern werden einige für die gesamte Untersuchung festgehalten, weil sie das Ergebnis erst in zweiter Linie beeinflussen:

- der Bereich, aus dem die Punkte ausgewählt werden, ist mit 100×200 ,
- der mittlere Koordinatenfehler mit $\tilde{\sigma} = 0.01$ und
- der maximale Punktabstand mit 10 fest vorgegeben.

Die Auswahl der Koordinaten und der groben Fehler erfolgt mit einem Zufalls-generator. Für die Erwartungswerte der Koordinaten und die groben Fehler dienen gleichmäßig verteilte Pseudozufallszahlen, die nach der gemischten Kongruenzmethode [Heister/Welsch, 1972] hergestellt werden. Die normalverteilten Koordinatenfehler werden nach der von Gleinsvik [1970] beschriebenen Methode erzeugt und an den Erwartungswerten angebracht.

Da die in allen Auswahlprozessen zugrunde liegenden Pseudozufallszahlen streng deterministisch sind, läßt sich jeder Fall durch eine einzige Zahl kennzeichnen und so jederzeit wiederholen. Dies bildet für den Vergleich mehrerer Testmethoden eine gute Grundlage und kann mit anderen auf physikalischer Basis arbeitenden Generatoren nicht erreicht werden. Andererseits sind die Pseudozufallszahlen untereinander nur sehr schwach korreliert, daß die Ergebnisse hierdurch nicht systematisch verfälscht werden.

2.2.2 Helmerttransformation und Fehlersuche

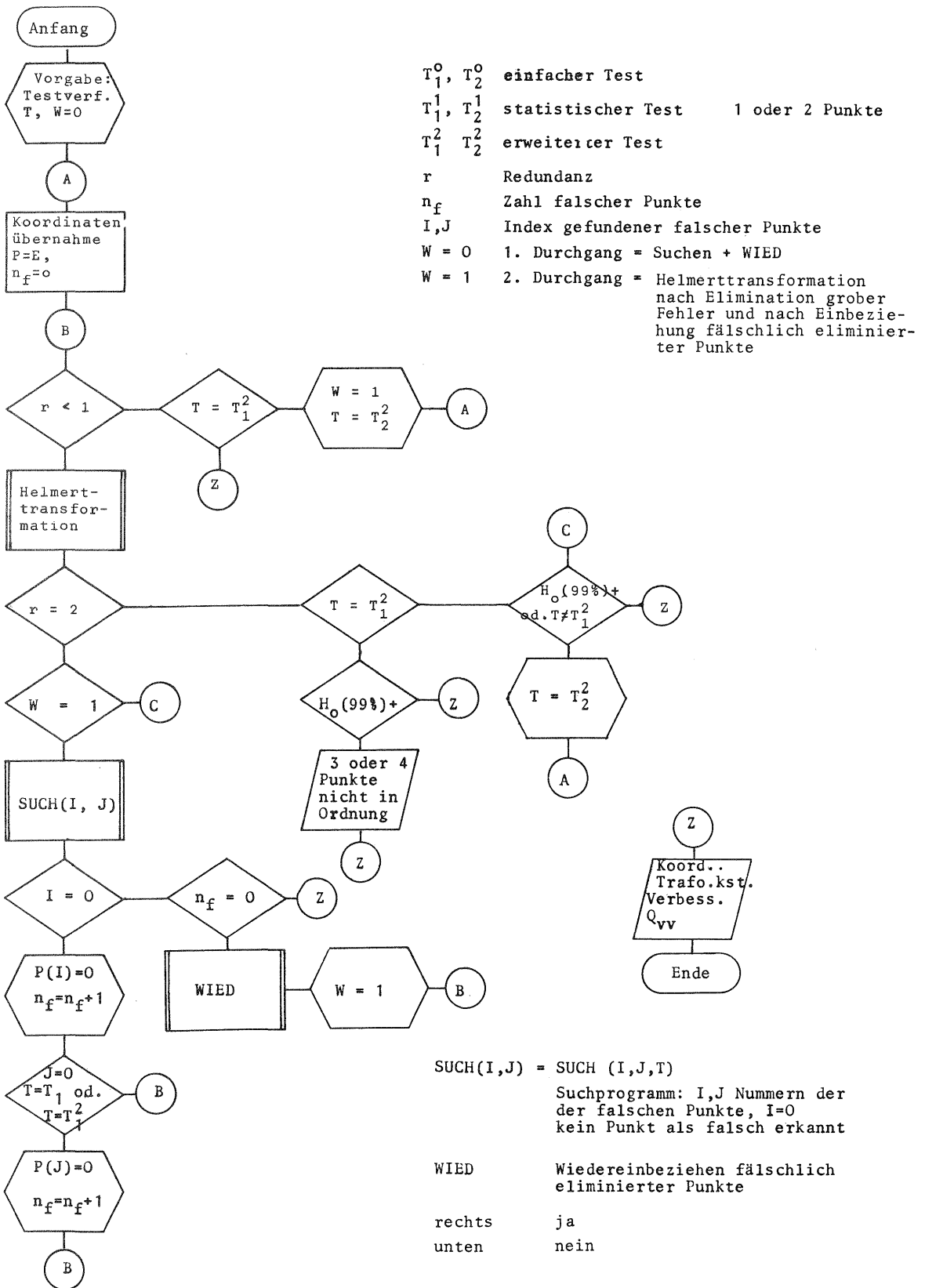
Die Struktur dieses Programmteils lehnt sich an Testverfahren an, bei denen die Fehlersuche in einen Globaltest für den mittleren Fehler $\hat{\sigma}$ und Einzeltests zur Lokalisierung der falschen Beobachtungen zerfällt, wie es dem Flußdiagramm Fig. 21 zu entnehmen ist. Der Zusammenhang zwischen den Parametern α und α_0 für den Global- und die Einzeltests (vgl. Kap. I. 1.2.2) wird insofern vernachlässigt, als beide Werte unabhängig von der Punktzahl vorgegeben werden. Dies hat auf das Untersuchungsergebnis hier keinen Einfluß, da durch die Festlegung Gl. (39) die Vertrauensintervalle aufeinander abgestimmt werden, und das bei großen groben Fehlern nicht zum Tragen kommt.

Die Prüfung der Restverbesserungen bildet den Kern des Programms. Dieser Programmteil ist so konzipiert, daß man durch Vorgabe einer Kenngröße das Testverfahren, das zur Anwendung kommen soll, wählen kann. Auf diese Weise läßt sich die Wirksamkeit mehrerer Verfahren mit denselben Daten, also auf einer klaren Vergleichsbasis, untersuchen.

2.2.3 Analyse

Die Entscheidung, ob H_0 und H_1 nicht zutreffen ist bei Tests, die sukzessive eine Beobachtung nach der anderen eliminieren, leicht möglich, da sie bei großen Abweichungen die Eigenschaft haben, entweder alle oder keinen Fehler zu finden. Im günstigen Fall, werden die Fehler der Reihe nach eliminiert, worunter auch einige richtige Beobachtungen sein können. Im ungünstigen Fall, wird in allen Schritten wenigstens ein Fehler nicht gefunden, so daß im letzten Schritt wegen ungenügender Redundanz eine Lokalisierung und damit eine Trennung falscher und richtiger Beobachtungen nicht möglich ist.

Fig. 21 Flußdiagramm für Helmertransformaion und Fehlersuche



Mit dem Anteil V der Fehlschläge an der Gesamtheit aller Fälle ist die Wirksamkeit dieser Tests daher:

$$\begin{aligned} W &= 1 - V = \\ &= 1 - \frac{\text{Zahl der Fehlschläge}}{\text{Gesamtzahl der Fälle}} \\ &= \frac{\text{Anzahl der Fälle, in denen alle Fehler gefunden wurden}}{\text{Gesamtzahl der Fälle}} \end{aligned}$$

Wir werden statt W meistens V angeben.

3. VORBEREITUNGEN FÜR DIE HELMERTTRANSFORMATION UND DIE FEHLERSUCHE

3.1 Das mathematische und das stochastische Modell

Bei der Helmerttransformation handelt es sich um eine lineare konforme Abbildung mit Überbestimmungen. Da jede analytische Funktion einer komplexen Variablen eine konforme Abbildung beschreibt (vgl. |Großmann, 1964, S. 143|), bietet sich eine Herleitung der Formeln mit komplexen Größen an, wie es schon mehrfach praktiziert wurde |Shut, 1964, 1967|, |Dorrer, 1971|, |Förstner/Wrobel, 1976|. Die Vorteile der komplexen Schreib- und Rechenweise sind dort deutlich herausgestellt, hier soll sie nur die Übersichtlichkeit erhöhen.

Wir verwenden im folgenden, wenn es sich aus dem Zusammenhang nicht anders ergibt, folgende Bezeichnungen:

a, b, c, \dots oder $(1, 2)$	komplexe Zahlen
j, k, l, m, n	reelle Zahlen
A, B, C, \dots	Spaltenvektoren mit komplexen Elementen
A, B, C, \dots	Matrizen mit komplexen Elementen
a'	konjugiertkomplexe Zahl zu a
A' bzw. A'	zu A bzw. A transportierter Vektor bzw. Matrix mit konjug.kompl. Elementen

Die lineare Transformation des Systems x in das System y hat demnach die Form (math. Modell):

$$y = a x + b \tag{59}$$

mit den Transformationsparametern a für die Drehstreckung und b für die Translation.

Die Koordinaten des Systems y seien unabhängig und gleichgenau, so daß für die Gewichtsmatrix

$$P = E = \text{Einheitsmatrix} \tag{60}$$

angenommen wird. Ob diese Annahmen zutreffen, sei dahingestellt. Sie sind nicht komplizierter als bei photogrammetrischen Transformationen üblich und für die hier folgenden Untersuchungen in jedem Fall hinreichend.

Wir haben den allgemeinen Ansatz, daß die Koordinaten beider Systeme als stochastische Größen behandelt werden, insofern vereinfacht, als das x-System als fehlerfrei postuliert wird. Dies vereinfacht die Ausgleichung. Die Gleichwertigkeit beider Systeme stellen wir durch Transformation in beiden Richtungen her, womit der Nachteil verfälschter Gewichtskoeffizienten behoben ist.

3.2 Bereitstellung der Rechenformeln

Bei Überbestimmung erhält man für die Punkte P_1 bis P_n das System der Verbesserungsgleichungen

$$V = A T - L \quad (61)$$

mit

$$V' = (v_1, v_2, \dots, v_n), \quad A = (X, E)' = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$T' = (a, b)' \quad L' = Y' = (y_1, \dots, y_n)' \quad (62)$$

Zur Vereinfachung der Formeln kann o.B.d.A. angenommen werden.

$$[x] = X'E = [y] = Y'E = 0. \quad (63)$$

Die für die Tests notwendigen Gewichtskoeffizienten erhalten wir nach Gl. (13) (vgl. I.1.1) zu

$$Q_{VV} = E - \frac{XX'}{X'X} - \frac{EE'}{E'E} \quad (64)$$

oder ausgeschrieben mit $s = [x'x]$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} - \frac{x_1 x_1'}{s} & -\frac{1}{n} - \frac{x_1 x_2'}{s} & \dots & -\frac{1}{n} - \frac{x_1 x_n'}{s} \\ -\frac{1}{n} - \frac{x_2 x_1'}{s} & 1 - \frac{1}{n} - \frac{x_2 x_2'}{s} & \dots & . \\ \vdots & \vdots & & \\ -\frac{1}{n} - \frac{x_n x_1'}{s} & . & \dots & 1 - \frac{1}{n} - \frac{x_n x_n'}{s} \end{pmatrix}$$

Der mittlere Fehler einer Beobachtung (Koordinate) mit dem Gewicht $p = 1$ ergibt sich zu

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{V'V}{2n-4}}. \quad (65)$$

3.3 Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Testgröße w

Im vorigen Abschnitt haben wir die Formeln aus Kap. I.1 wörtlich übernommen, ohne zu berücksichtigen, daß es sich jetzt um komplexe Größen handelt. Wenn wir das Testverfahren unverändert anwenden wollen, müssen wir zeigen, daß die dort genannte Testgröße w

$$w = \frac{C' \hat{V}}{\sigma \sqrt{C' Q_{VV} C}} = \frac{\hat{\psi}}{\sigma \hat{\psi}} \quad (66)$$

dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung hat, wenn man die Größen C, V etc. komplex interpretiert, und daß sich beim Übergang die Dimension des Tests nicht ändert.

Bei $\hat{\psi} = C' \hat{V}$ handelt es sich geometrisch veranschaulicht um eine Lageabweichung \hat{d} . Die Verteilung von Lagefehlern ist zweidimensional, läßt nur positive Argumente, in diesem Fall Strecken, zu und weicht von der Normalverteilung erheblich ab. Die Testgröße

$$\hat{\theta}^2 = \frac{\hat{d}^2}{\frac{\sigma^2}{2}} \quad (67)$$

für die Prüfung der Alternative H_{a2} : 'Lageabweichung $d \neq 0$ ' hat daher eine Fisher-Verteilung mit zwei Freiheitsgraden für d. Testet man jedoch die Alternative H_{a1} : 'Lageabweichung d in Richtung von $d \neq 0$ ', verringert sich die Zahl der Freiheitsgrade auf 1 und man muß die Testgröße

$$\hat{\theta}'^2 = \frac{\hat{d}'^2}{\frac{\sigma^2}{2}} \quad (68)$$

verwenden. \hat{d}'^2 hängt dann i.a. von der Richtung ab und kann aus der Fehlerellipse abgeleitet werden.

In unserem Fall entarten nun die Fehlerellipsen zu Kreisen, so daß \hat{d}'^2 für alle Richtungen gleich ist. Aus diesem Grund ist $\pm \hat{w}$ mit $\pm \hat{\theta}$, identisch, gibt die "Lageabweichung" in der dem Test zugrunde gelegten Richtung an und ist, wie jede Koordinatendifferenz, normalverteilt.

Wir sind so in der Lage, den kritischen Bereich w zu verkleinern und die Testgüte dann zu erhöhen, wenn der mittlere Koordinatenfehler invariant gegen Drehungen des Koordinatensystems ist. Dies ist ein Grund mehr, bei trigonometrischen Netzen Fehlerkreise anzustreben, vor allem dann, wenn die Netze für den Nachweis von Punktverschiebungen konzipiert werden.

4. DIE ERGEBNISSE

4.1 Voruntersuchung

4.1.1 Die Wirksamkeit des statistischen Tests *) bei kleinen Punktgruppen

Die Wirksamkeit des statistischen Tests T_1^1 wird zunächst bei Punktgruppen mit 6, 8 und 12 Punkten untersucht und mit dem einfachen Test T_1^0 verglichen, um die Notwendigkeit einer Erweiterung des statistischen Tests zu überprüfen. Den zu erwartenden Einfluß der Punktgruppierung auf die Wirksamkeit einer Methode berücksichtigen wir, indem wir pro Punktzahl eine Punktgruppe ohne (Gruppen A6, A8, A12) und mit isoliertem Punkt (Gruppen B6, B8, B12) fest vorgeben und nur die angebrachten groben Fehler zufällig wählen. Diese Einschränkung führt zwar nicht zu repräsentativen Ergebnissen; diese zeigen aber, wie weit der statistische Test von einem optimalen Test abweichen kann. Die ausgewählten Punktgruppen sind in Fig. 22 dargestellt.

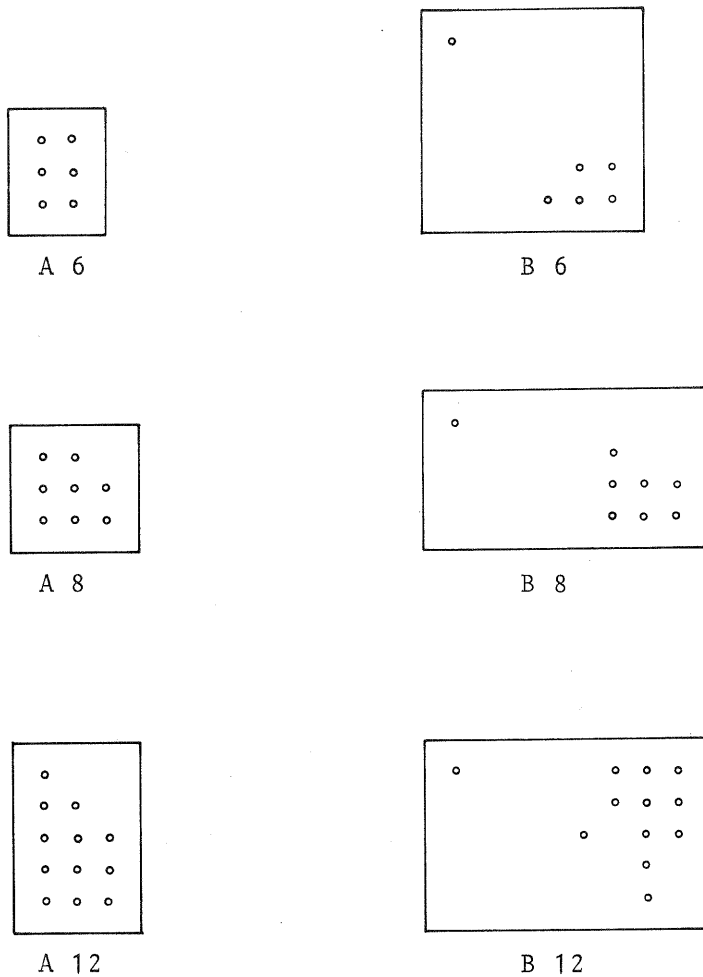


Fig. 22 Punktgruppen der Voruntersuchung
A ohne isolierten Punkt
B mit isolierten Punkt

*) zur Definition der Tests vgl. I. 3.2

Die Zahl der groben Fehler, Lagefehler und Punktverwechslungen, variieren wir zwischen 1 und 3, jedoch so, daß wenigstens drei Punkte ohne grobe Fehler bleiben, um eine 'Lokalisierung' zu ermöglichen. Auf diese Weise sind von 6 Punkten maximal 3 falsch, bei 8 bzw. 12 Punkten sind es maximal 5. Der Umfang N der Stichproben, wie er aus Tab. 8 zu entnehmen ist, hängt von der Zahl der Lagefehler und der Punktverwechslungen ab, und ist so gewählt, daß eine hohe Fehlerzahl einen großen Stichprobenumfang zur Folge hat.

Tab. 8 Stichprobenumfang bei kleinen Punktgruppen (Helmertransforma-tion, Voruntersuchung)

Lage- fehler	Punkt- verwechs- lungen	Zahl der Punkte	
		n=8 n=12	n=6
1	0	4	4
2	0	16	16
3	0	64	64
0	1	4	4
1	1	16	14
2	1	64	-
0	2	16	-
1	2	64	-
		248	102

Das Ergebnis der ca. 2400 Fälle ist in Tab. 9 zusammengestellt. Es gibt für den statistischen und den einfachen Test die Zahl V x N, der Fehlschläge und zusätzlich die Zahl der Fälle an, in denen fälschlicherweise Punkte eliminiert wurden,

Tab. 9 Wirksamkeit W des einfachen und des statistischen Tests bei kleinen Punktgruppen (Helmertransforma-tion, Voruntersuchung)

Zahl d. Punkte	Zahl der Fehlschläge				Zahl der Fälle mit zu- viel gef. Punkte				Stich- proben- umfang
	T ₁ ⁰		T ₁ ¹		T ₁ ⁰		T ₁ ¹		
	A	B	A	B	A	B	A	B	
12	2	2	0	0	1	0	1	0	992
8	7	49	5	2	2	0	3	1	992
6	17	33	1	3	0	0	0	1	408
	26	84	6	5	3	0	4	2	2392
	110 = 5 %		11 = 0.5%						

A: ohne isolierten Punkt B: mit isoliertem Punkt

Die erwartete Abhängigkeit beider Verfahren von der Zahl der Punkte ist offensichtlich. Bemerkenswert ist, daß bei 12 Punkten mit dem einfachen Test nur in 4 Fällen, das sind 0.8 %, die Fehler nicht gefunden wurden. Die Schwäche dieses Verfahren wird allerdings durch die Gegenüberstellung mit dem statistischen Test, vor allem bei den Punktgruppen B6 und B8, deutlich. Beim statistischen Test, der die Geometrie des Punkthaufens berücksichtigt, ist die Zahl der

Fehlschläge mit 0.5 % etwa 10-mal so gering wie bei dem üblichen Verfahren.

Die Zahl der Fälle, bei denen fälschlicherweise Punkte eliminiert wurden, ist bei beiden Verfahren in derselben Größenordnung. Die Untersuchung der 11 fehlgeschlagenen Tests T_1^1 zeigt, daß in allen Fällen zwei der Fehler etwa die gleiche Größe haben und bis auf eine Ausnahme gleich gerichtet sind. Dies nehmen wir als Grundlage für die in Abschnitt 4.2.2 geplante Detailuntersuchung.

Im ganzen zeigt die Untersuchung mit kleinen Punktgruppen, daß der statistische Test dem einfachen weit überlegen ist und immerhin 98.5 % aller Fälle erfaßt sind. Da die Fehlerhäufung extrem war, ist bei nur zwei falschen Punkten mit einer größeren Wirksamkeit zu rechnen. Sie reicht aber nicht zur Prüfung der Verknüpfungen von großen Blöcken aus.

4.1.2 Die Wirksamkeit des statistischen Tests bei großen Punktgruppen

Die Untersuchung des statistischen Tests bei kleinen Punktgruppen läßt vermuten, daß die Wirksamkeit mit zunehmender Punktzahl wächst. Bestätigt wird dies durch eine Prüfung mit je 50 Punkten, die, wie beschrieben, aus einem Rechteck zufällig ausgesucht werden und bei denen bis zu 20 Punkten verfälscht werden. Im einzelnen sind 4,7 und 10 Lagefehler und \emptyset , 2 und 5 Punktverwechslungen in allen Kombinationen vorgesehen. Die jeweilige Zahl der Fälle ist in Tab. 10 zusammengestellt. In den 572 untersuchten Fällen wurden sämtliche Fehler gefunden, maximal 3 Punkte wurden fälschlicherweise eliminiert. Hohe Fehlerquoten bieten demnach bei großen Punktgruppen keine Schwierigkeit.

Tab. 10 Stichprobenumfang bei Punktgruppen mit 50 Punkten (Helmerttransformation, Voruntersuchung)

		Punktverwechslungen			
		0	2	5	
Lage- fehler	4	7	8	11	
	7	27	32	67	
	10	110	133	177	
					572

4.2 Detailuntersuchung kleiner Punktgruppen

4.2.1 Die Wirksamkeit von T_1^1

4.2.1.1 Die Auswahl grober Fehler

Da der statistische Test bei mehr als acht Punkten hinreichend gut ist, wählen wir für die Detailuntersuchung Punktgruppen mit 5 bis 8 Punkten. Die Koordinaten suchen wir wieder aus einem Rechteck zufällig aus und versehen sie mit normalverteilten Fehlern. An je zwei Punkten bringen wir Lagefehler an; ihre Richtung suchen wir aus 16 gleichmäßig über den Horizont verteilten Richtungen aus, ihr Größenverhältnis variieren wir von 1 abwärts stufenweise, im vorliegenden Fall bis 0,17 in 20 Stufen, die deshalb so eng gewählt sind, weil das Größenverhältnis zwischen den groben Fehlern mehr Einfluß als der Winkel

auf das Testergebnis hat. Pro Punktzahl und Größenverhältnis untersuchen wir 500, insgesamt 40 000 Fälle. Weniger umfangreiche Stichproben ergeben keine signifikanten Aussagen, da es sich um die Enden der Wahrscheinlichkeitsverteilungen handelt.

Die Ergebnisse sind in den Fig. 23 - 28 und den Tabellen 11 und 12 zusammengestellt.

4.2.1.2 Der Einfluß der Punktzahl

Aus Fig. 23 kann man den Einfluß der Punktzahl auf die Zahl der Fehlschläge entnehmen. Es bestätigt sich, daß die Güte des Tests mit der Zahl der Punkte stark zunimmt: schon von 7 Punkten an ist die Wirksamkeit des statistischen Tests höher als 99.5 %, bei 8 Punkten sind es sogar 99.95 %! Fig. 24 zeigt zwei ungelöste Fälle mit 8 Punkten. Man erkennt deutlich, wie ausgesucht Punktanzahl und Fehlerverteilung sind. Die linke Darstellung zeigt die Lage der Punkte vor, die rechte Darstellung die Lage nach der Helmertransforma-tion. In beiden Fällen sind je drei Punkte isoliert und zwei von ihnen in der gleichen Weise verfälscht, so daß der dritte Punkt die größte Restverbesserung erhält. Da die Berücksichtigung der Q_{VV} wegen der gleichen Entfernung vom Schwerpunkt keinen Vorteil gegenüber dem üblichen Test hat, wird auch hier der Punkt zuerst eliminiert, der eigentlich die anderen beiden kontrollieren könnte. Er ist ihnen gegenüber zu schwach. Auf diese Weise können die beiden Fehler mit diesem Test nicht entdeckt werden.

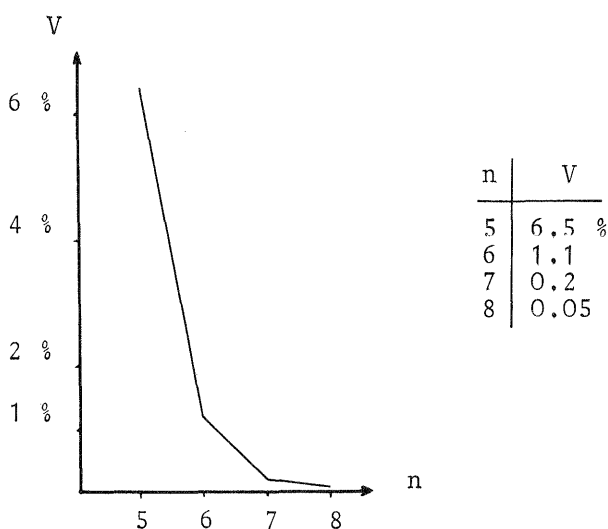


Fig. 23 Einfluß der Punktzahl n auf die Wirksamkeit des statistischen Tests bei zwei groben Fehlern: Prozentualer Anteil V der Fehlschläge bei je 10 000 Fällen. $V=V(n)$

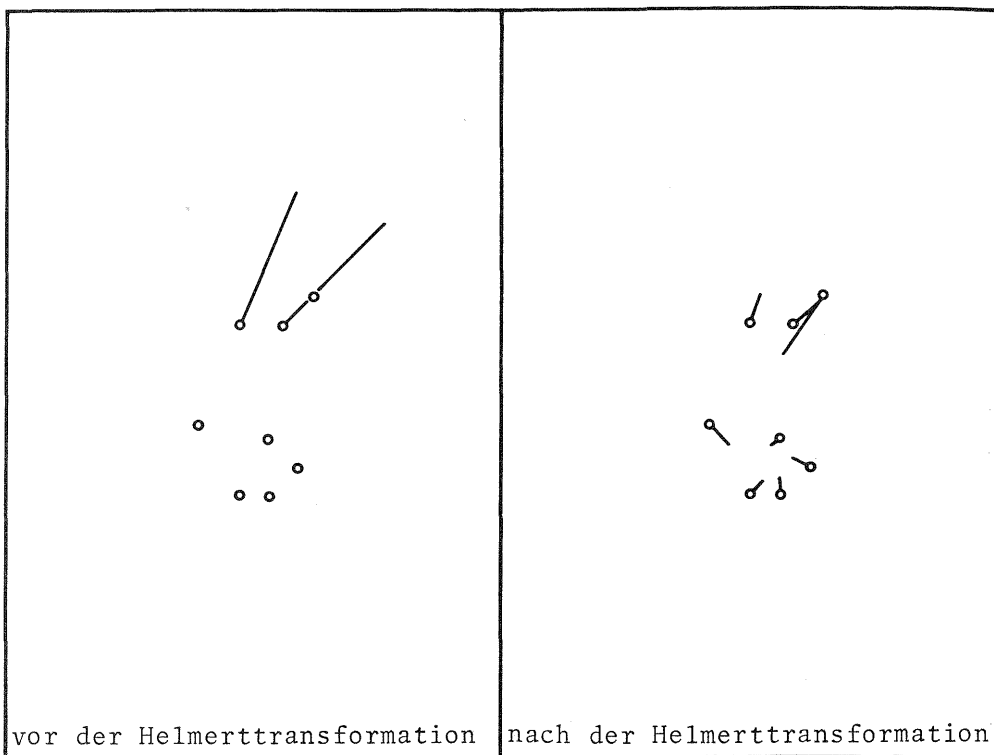
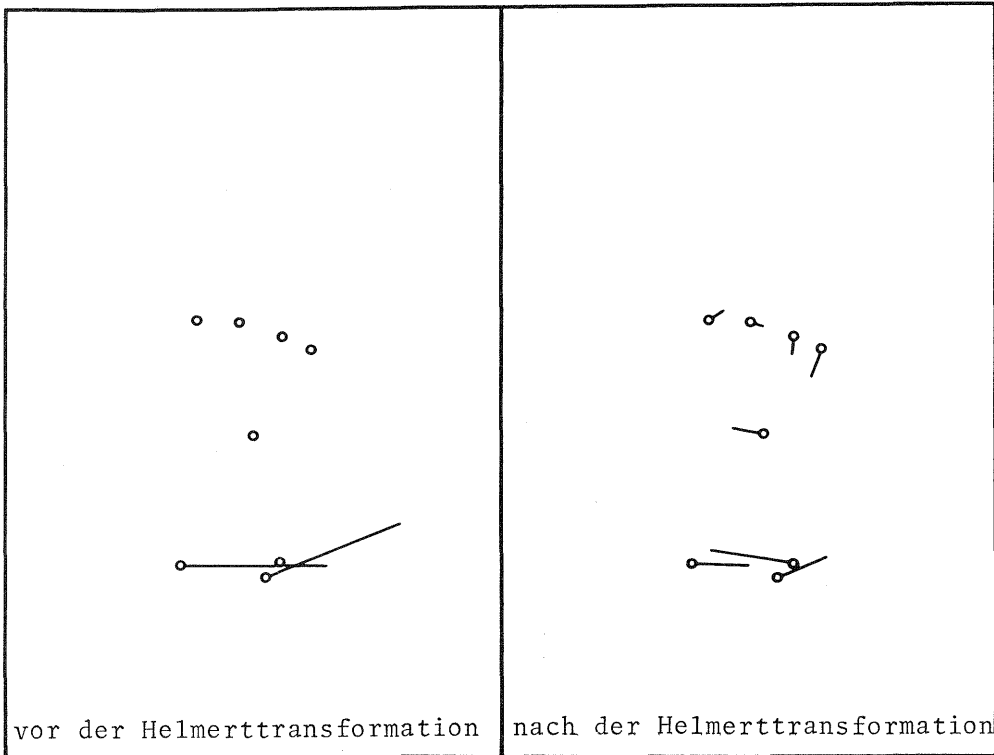
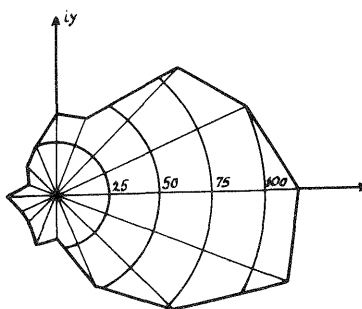


Fig. 24 Helmerttransformation mit zwei groben Fehlern ($n = 8$, $|c| = 1$):
mit T_1^1 Fehler nicht gefunden

4.2.1.3 Der Einfluß des Winkels zwischen den groben Fehlern

Die Abhängigkeit der Zahl der Fehlschläge vom Winkel zwischen den jeweiligen Fehlern ist aus Tab. 11 zu entnehmen und in Fig. 25 veranschaulicht. Es erweist sich erwartungsgemäß, daß Fehler mit gleicher Richtung am schwierigsten zu lokalisieren sind, der Abfall vom Maximum ist jedoch sehr schwach, V erreicht bei entgegengesetzt gerichteten Fehlern das Minimum, das immerhin noch 1/10 des Maximums beträgt.

Winkel (g)	Zahl der Fehlschläge
25	121
50	79
75	49
100	21
125	26
150	16
175	18
200	24
-175	13
-150	19
-125	24
-100	37
- 75	36
- 50	85
- 25	100
0	117



Tab. 11

Einfluß des Winkels $\arg(c)$ zwischen zwei groben Fehlern auf die Wirksamkeit des statistischen Tests bei der Helmerttransformation: Anzahl der Fehlschläge $V \times N$ bei 40 000 untersuchten Fällen

Fig. 25

Einfluß des Winkels $\arg(c)$ zwischen zwei groben Fehlern auf die Wirksamkeit des statistischen Tests (vgl. Tab. 11)
 $V = \bar{V}(\arg(c))$

4.2.1.4 Der Einfluß des Größenverhältnisses der groben Fehler

Wie man der Tabelle 12 und der Fig. 26 entnehmen kann, bestätigt der Einfluß des Größenverhältnisses der Fehler in hohem Maße die Vermutung, daß gleichgroße Fehler die höchste Zahl von Fehlschlägen verursachen. Ab $|c| = 0.5$ bzw. $|c| = 2$ ist der Abfall vom Maximum nicht mehr stark, doch immer noch größer als beim Einfluß des Winkels. Es gibt demnach Fälle mit $|c| \leq 0.2$, bei denen der statistische Test versagt (vgl. II. 3.2 und II. 4.4). In Fig. 27 ist ein Fall mit $|c| = 0.10$ dargestellt, der auch veranschaulicht, wie sich beide Fehler durch die Helmerttransformation verteilen.

Einfluß des Größenverhältnisses $|c|$ von zwei groben Fehlern auf die Wirksamkeit des statistischen Tests: Prozentualer Anteil V der Fehlschläge bei je 500 Fällen $V = V(|c|)$

Tab. 12

Fig. 26

$ c $	n=5	n=6	n=7	n=8
1.00	23.0	4.6	1.4	-
0.91	18.6	4.8	0.6	0.4
0.83	17.8	4.0	0.6	0.4
0.76	13.6	3.4	0.6	0.2
0.69	10.8	1.6	-	-
0.63	7.6	2.2	0.2	-
0.58	7.8	1.0	0.2	-
0.52	6.2	0.6	0.2	-
0.48	5.0	0.4	0.2	-
0.44	5.6	-	0.2	-
0.40	3.0	-	-	-
0.36	1.4	-	-	-
0.33	1.6	-	-	-
0.30	1.0	0.2	-	-
0.28	1.4	-	-	-
0.25	1.2	-	-	-
0.23	1.4	0.2	-	-
0.21	0.8	-	-	-
0.19	0.4	-	-	-
0.17	0.6	-	-	-

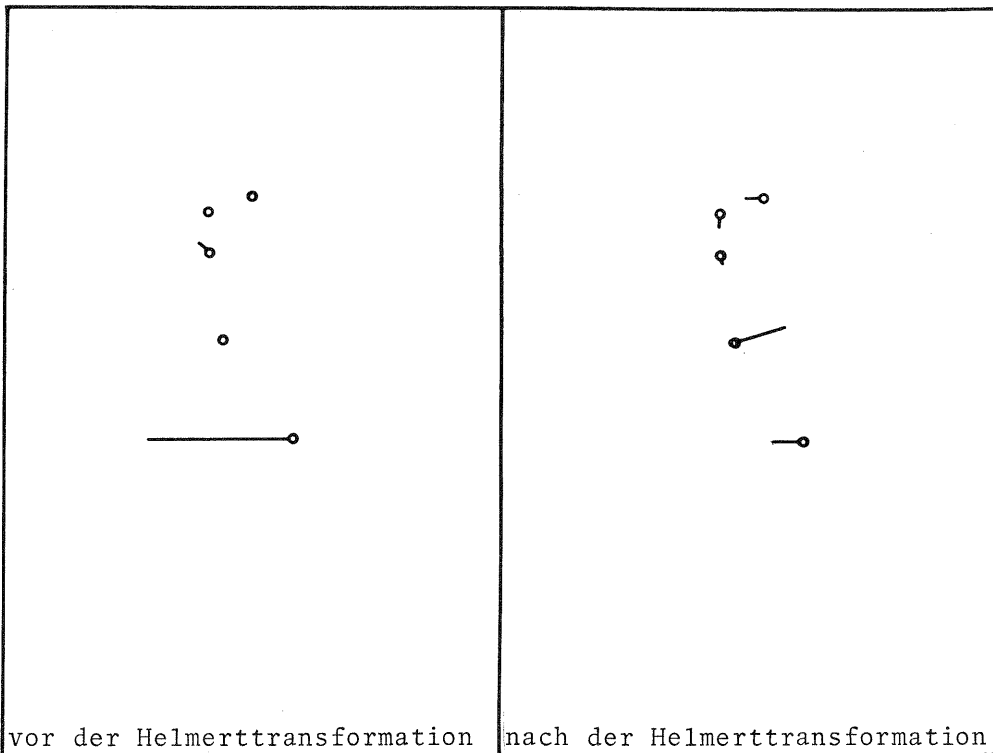
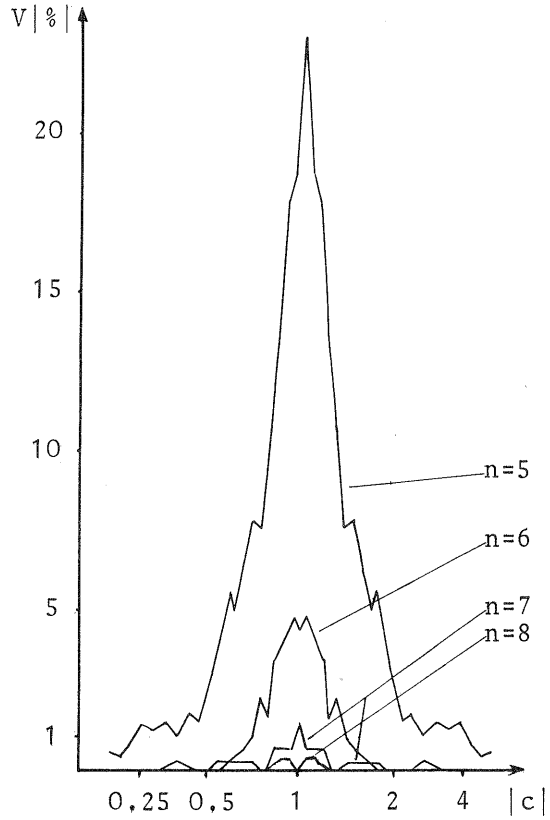


Fig. 27 Helmertransformation mit zwei groben Fehlern ($n = 5, |c| = 0.1$): mit T_1 Fehler nicht gefunden

Fig. 28 stellt die Abhängigkeit der Wirksamkeit des Tests T_1^1 von der Größe und der Richtung des 2. groben Fehlers dar. Der 1. grobe Fehler wurde entsprechend der Alternativhypothese H_{a_2} (vgl. Gl. (49), S. 31) mit $(1,0)$ angenommen. Die Zahl der Fehlschläge ist dann von dem Vektor c abhängig, der die Größe und die Richtung des zweiten groben Fehlers relativ zum ersten bestimmt. Der unterschiedliche Einfluß beider Anteile wird durch diese Darstellung besonders deutlich.

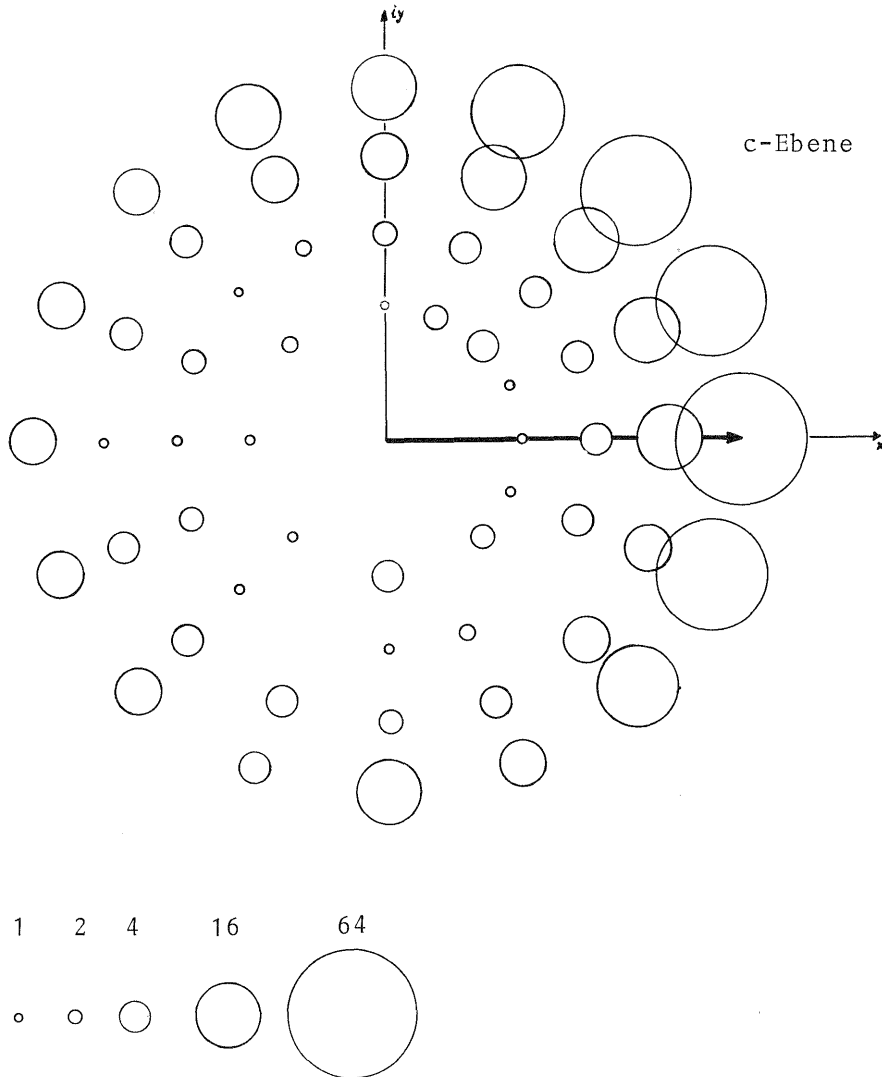


Fig. 28 Gemeinsamer Einfluß von Richtung und Größe des zweiten groben Fehlers c auf die Wirksamkeit des statistischen Tests: Anzahl der Fehlschläge bei insgesamt 40 000 Fällen, $V = V(c)$

4.2.2 Erweiterung und Modifizierung der Tests

4.2.2.1 Formulierung der erweiterten statistischen Tests T_2^2

Die Detailuntersuchungen zeigen, daß die Helmertransforma-tion ein sehr starres System darstellt, so daß der statistische Test unter H_{a_2} schon eine relativ hohe Wirksamkeit erreicht. Da aber auch außerhalb der Maxima die Wirksamkeit noch nicht groß genug ist, kommt man mit einer einzigen Alternative in H_{a_2} nicht aus. Wir wählen für den erweiterten statistischen Test T_2^2 die folgenden Alternativen, weil schon bei einem Größenverhältnis von $|c| = 0.5 V$ sehr kleine Werte annimmt, dagegen der Winkel auf V keinen großen Einfluß ausübt. Schreiben wir das Verhältnis der Fehler in der Form

$$c = e^{j\alpha_i} \quad (i = 1, \dots; j^2 = -1),$$

können wir H_{a_2} mittels α_i variieren:

$$H_{a_2} \quad (2) : \alpha_1 = \pi, \alpha_2 = 0$$

$$H_{a_2} \quad (4) : \alpha_1 = \pi, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -\alpha_4 = 3\pi/16$$

$$H_{a_2} \quad (6) : \alpha_1 = \pi, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -\alpha_4 = \pi/8, \\ \alpha_5 = -\alpha_6 = 5\pi/16.$$

$\alpha = \pi$ ist in allen Fällen Bestandteil der Alternativhypothese, um Punktverwechslungen in den Test miteinzubeziehen.

Um im Großteil der Fälle die Rechenzeit klein zu halten, prüfen wir nur dann die Restverbesserungen mit dem erweiterten statistischen Test T_2^2 , wenn T_1^1 nicht zum Ziel geführt hat.

Neben den erweiterten statistischen Tests T_2^2 untersuchen wir zusätzlich den einfachen und den statistischen Test in einer modifizierten Form: Statt eines Punktes eliminieren wir in jedem Iterationsschritt jeweils zwei, nämlich die beiden am meisten verfälschten. Dies soll dazu dienen, die Zahl der Iterationen zu verringern. Wir bezeichnen die Tests mit T_2^0 und T_2^1 (vgl. I. 3.2).

4.2.2.2 Auswahl der groben Fehler

Um den Stichprobenumfang zu begrenzen, variieren wir nun das Größenverhältnis nur in fünf Stufen zwischen $|c| = 1.$ und $|c| = 0.23.$ Die Zahl der Fälle reduzieren wir bei den weniger wirksamen Tests T_1^0 auf 250 pro Parameterkombination, erhöhen sie dagegen in den übrigen Fällen auf 1000. Zusätzlich variieren wir die absolute Größe der groben Fehler, um festzustellen, ob sie die Wirksamkeit der Tests beeinflusst. Wir wählen drei Größenordnungen:

- (1) 2300 bis 10000 σ
- (2) 23 bis 100 σ
- (3) 9 bis 40 $\sigma.$

Nach den Ausführungen im Teil II kann man sicher nicht alle Fehler der 3. Größenordnung feststellen. Wir betrachten die Fehlersuche dann als gelöst, wenn der größere von beiden gefunden ist und der Globaltest die Nullhypothese bestätigt. Eine Angabe der unteren Grenzwerte für erkennbare Fehler ist auch hier mit Gl. (23) möglich.

Tab. 13 und Fig. 29 stellt die V-Werte der Tests dar, die aus über 300 000 Fällen abgeleitet sind, und zwar in Abhängigkeit;

- von der Punktzahl (Zeilen)
- von der Größe der Fehler (innerhalb der Spalten) und
- von dem Größenverhältnis (innerhalb der einzelnen Teilfigur).

Tab. 13 Wirksamkeit verschiedener Tests in Abhängigkeit von der Punktzahl, von der Größe und dem Größenverhältnis zweier grober Fehler bei der Helmertransformations (Prozentualer Anteil der Fehlschläge an der Zahl (250, 1000) der jeweils untersuchten Fälle)

n	c	T ₂ ⁰			T ₁ ⁰			T ₁ ¹			T ₂ ¹			T ₂ ² (2)			T ₂ ² (4)			T ₂ ² (6)		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
5	1.00	53.6	36.4	37.2	45.2	49.6	43.2	22.0	20.4	16.4	50.4	36.4	36.8	12.0	11.2	16.0	1.6	2.8	3.2	1.2	0.8	0.8
	.69	56.4	47.6	45.6	40.0	44.4	40.0	9.6	10.4	8.4	50.4	45.2	42.8	6.4	7.2	8.4	4.0	4.8	3.6	2.8	4.0	2.8
	.48	61.4	54.0	50.4	32.0	31.2	22.0	4.4	5.2	6.0	60.4	55.2	50.8	6.0	4.4	6.0	6.8	6.8	5.2	8.0	6.8	4.0
	.33	68.0	53.2	46.4	27.6	20.4	10.8	0.4	1.2	2.4	67.6	58.0	47.2	1.6	2.8	2.4	2.0	4.0	4.4	2.8	4.0	4.0
	.23	78.0	60.4	40.0	29.6	24.0	11.2	-	0.8	2.8	76.4	63.6	41.2	0.4	1.6	2.8	0.4	1.6	2.2	0.8	1.6	3.2
M1	63.5	50.3	45.9	34.8	33.9	25.4	7.3	7.4	7.2	61.0	51.7	43.7	5.3	5.4	7.2	3.0	4.0	3.7	3.1	3.4	3.0	
M2		<u>53.2</u>			<u>31.4</u>				<u>7.3</u>		<u>52.1</u>			<u>6.3</u>			<u>3.6</u>			<u>3.2</u>		
6	1.00	10.0	15.6	13.2	14.8	20.0	14.4	5.7	3.6	2.8	0.2	0.3	0.1	0.5	0.3	0.4	0.1	-	-	0.1	-	-
	.69	7.6	10.8	8.4	14.8	13.2	9.6	2.6	2.1	0.8	0.3	0.2	0.3	0.7	0.2	0.2	0.3	0.1	0.2	0.2	-	0.2
	.48	6.8	8.8	4.4	12.0	8.4	5.6	0.3	0.4	0.1	-	-	-	-	-	-	0.1	-	-	0.1	0.2	-
	.33	6.8	8.8	2.4	9.2	9.2	0.8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.1	-	-	0.1
	.23	4.4	6.8	1.6	12.0	10.4	3.2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
M1	7.1	10.0	6.0	12.6	12.2	7.0	1.7	1.2	0.7	0.1	0.1	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	-	0.1	0.1	0.1	-
M2		<u>7.7</u>			<u>10.6</u>				<u>1.2</u>		<u>0.1</u>			<u>0.1</u>			<u>0.1</u>		<u>0.1</u>		<u>-</u>	
7	1.00	2.0	2.0	1.2	5.6	4.8	2.0	2.0	0.9	0.7	0.1	-	-	0.2	-	-	0.2	-	-	-	-	-
	.69	3.2	3.6	2.0	5.6	5.2	1.6	0.2	0.6	0.1	-	-	-	-	0.1	0.1	-	0.1	0.1	-	-	-
	.48	0.8	1.6	1.2	1.2	2.8	0.8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	.33	2.4	2.4	-	1.6	2.4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	.23	2.4	4.4	0.4	1.6	5.6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
M1	2.2	2.8	1.0	3.1	4.1	0.9	0.4	0.3	0.2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
M2		<u>2.0</u>			<u>2.7</u>			<u>0.3</u>			<u>0.3</u>			<u>-</u>			<u>-</u>		<u>-</u>		<u>-</u>	
8	1.00	0.4	0.8	0.4	1.6	1.2	0.4	0.1	-	-	n Anzahl der Punkte 1: 2300 $\sigma < c < 10000 \sigma$ c Größenverhältnis 2: 23 $\sigma < c < 100 \sigma$ der groben Fehler 3: 9 $\sigma < c < 40 \sigma$ Angaben (1-W) 100 % M1 Mittel über c M2 Gesamtmittel											
	.69	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	-	0.1	-	-												
	.48	-	-	-	1.2	0.4	-	-	-	-												
	.33	-	0.8	-	-	0.8	-	-	-	-												
	.23	0.8	2.0	-	0.4	2.4	-	-	-	-												
M1	0.3	0.8	0.2	0.7	1.0	0.1	-	-	-													
M2		<u>0.4</u>			<u>0.6</u>			<u>-</u>														

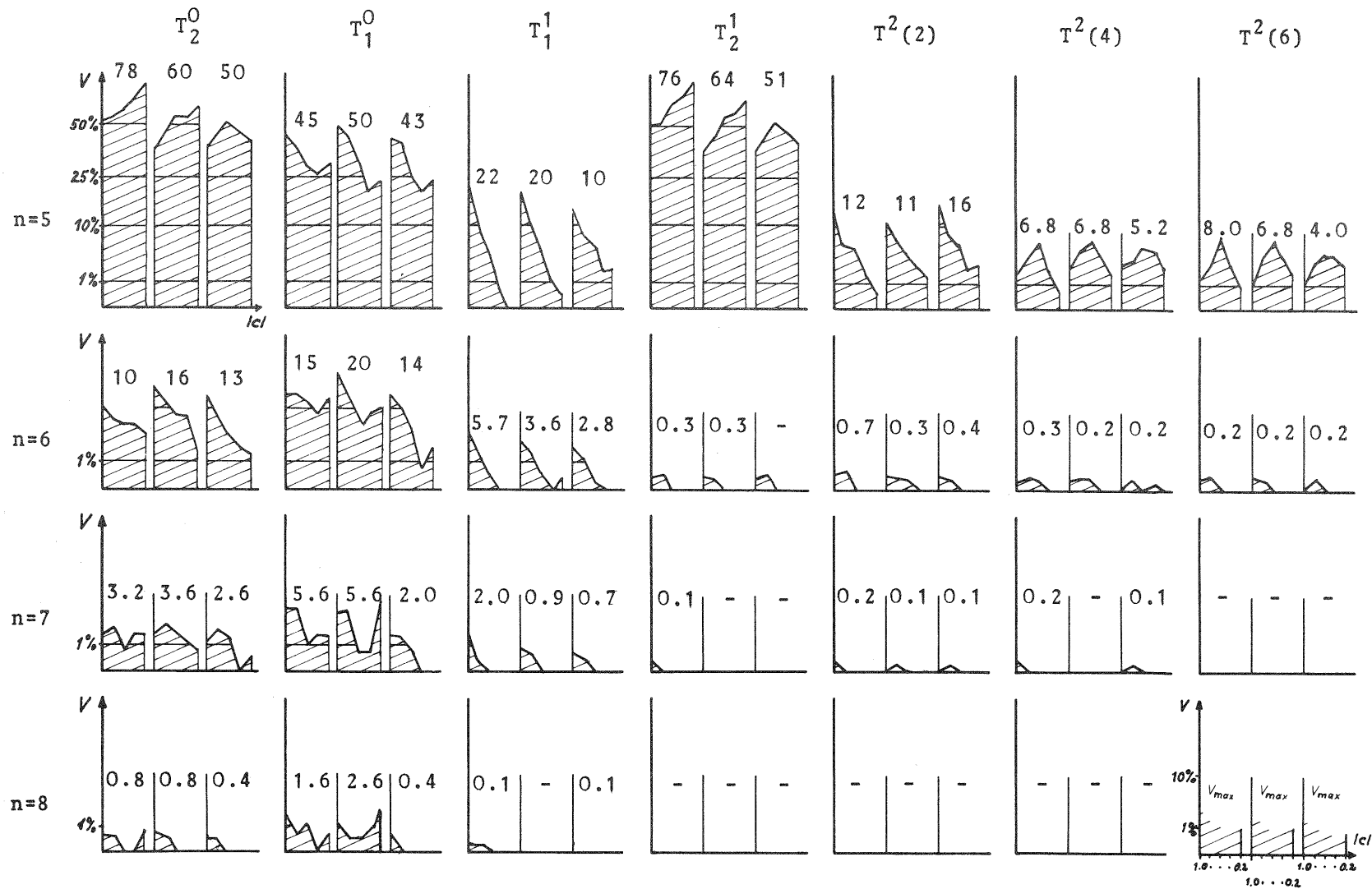


Fig. 29 Wirksamkeit verschiedener Tests in Abhängigkeit von der Punktzahl, von der Größe und dem Größenverhältnis zweier grober Fehler bei der Helmertransformaion (vgl. Tab. 13)

4.2.2.3 Der Einfluß der Punktzahl auf die Wirksamkeit der Tests

Der Vergleich der Zeilen zeigt, daß die Testverfahren sehr unterschiedlich auf die Zahl der Punkte reagieren. Bei den einfachen Tests T_1^0 und T_2^0 nimmt die Wirksamkeit mit der Punktzahl nur langsam zu. Beide Testverfahren unterscheiden sich wenig. Der statistische Test T_1^1 , das "data-snooping", und die erweiterten statistischen Tests sind bei 6 Punkten mit $V > 98\%$ schon wesentlich effektiver als bei 5 Punkten. Am deutlichsten ist der Einfluß der Punktzahl bei T_2^1 . Während T_2^1 bei Punkthaufen mit fünf Punkten am wirksamsten ist, findet man mit diesem Verfahren ab sechs Punkten die Fehler mit $V > 99.5\%$ genauso sicher wie mit $T_2^2(6)$.

4.2.2.4 Der Einfluß der Größe und des Größenverhältnisses auf die Wirksamkeit der Tests

Der Vergleich der Spalten 3 mit den Spalten 5 bis 7 zeigt, wie die Erweiterung der Tests die Abhängigkeit vom Größenverhältnis der Fehler beeinflusst. Die Tests komplizierter Alternativhypothesen führen offenbar nicht zu dem erwünschten Ziel: z.T. werden Fälle mit dem Test $T_2^2(4)$ gelöst, die mit $T_2^2(6)$ nicht gelöst werden. Dies liegt an der mangelnden Dominanz der Tests.

Der Einfluß der Größe der Fehler ist in allen Fällen unbedeutend. Mit den Tests lassen sich sehr große Fehler ebenso sicher finden wie kleine.

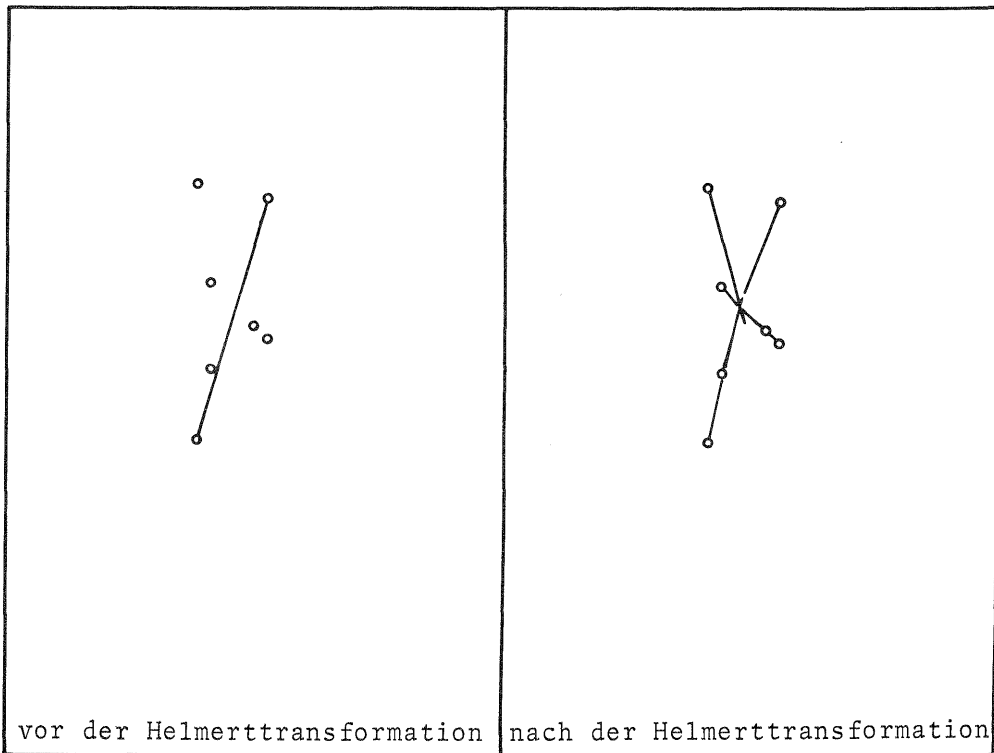
4.2.2.5 Punktverwechslungen

Bei Punktverwechslungen handelt es sich um zwei grobe Fehler, die stark korreliert und deswegen besonders leicht zu finden sind. Die Wirksamkeit einzelner Testverfahren bezüglich von Punktverwechslungen ist in der Tab. 14 dargestellt. Erwartungsgemäß werden alle Punktverwechslungen mit dem erweiterten Test gefunden. Von den übrigen Tests ist - für Punktgruppen ab sechs Punkten - der modifizierte statistische Test optimal. Mit diesem Test wurden unter 5000 Fällen mit je einer Punktverwechslung nur zwei, das sind 0.04% , nicht gelöst. Einer davon ist in Fig. 30 dargestellt.

Tab. 14 Wirksamkeit von Tests bei einer Punktverwechslung (Helmerttransformation, je 1000 Fälle):
Prozentualer Anteil V der Fehlschläge

n	T_2^0	T_1^0	T_1^1	T_2^1	$T_2^2(2)$
5	4.9	18.0	8.9	9.0	-
6	1.2	5.2	1.2	-	-
7	0.3	1.7	0.2	-	-
8	-	0.2	-	-	-

Fig. 30 Helmerttransformation mit einer Punktverwechslung (n = 7):
mit T_1^1 Fehler nicht gefunden



4.3 Drei und mehr Fehler

Um die Wirksamkeit der Tests bei mehr als zwei groben Fehlern zu bestimmen, wurden für Punkthaufen mit 6, 7, 8 und 10 bzw. 7, 8 und 10 Punkten je 1000 Fälle mit einer Punktverwechslung und einem bzw. zwei zusätzlichen Fehlern untersucht. Die Ergebnisse sind in den Tab. 15 und 16 zusammengestellt. Die Schwäche des einfachen Tests ist deutlich. Das modifizierte "data-snooping" ist dem erweiterten Test nur bei 4 falschen von 7 Punkten spürbar unterlegen.

Tab. 15 Wirksamkeit von Tests bei einer Punktverwechslung und einem groben Fehler (Helmerttransformation, je 1000 Fälle): Prozentualer Anteil V der Fehlschläge

n	T_2^0	T_1^0	T_1^1	T_2^1	$T_2^2(2)$
6	13.6	35.7	19.7	8.3	9.8
7	3.3	10.4	3.8	3.5	1.7
8	0.8	3.4	0.5	0.1	-
10	0.1	0.3	-	-	-

Tab. 16 Wirksamkeit von Tests bei einer Punktverwechslung und zwei groben Fehlern (Helmerttransformation, je 1000 Fälle): Prozentualer Anteil V der Fehlschläge

n	T_2^0	T_1^0	T_1^1	T_2^1	$T_2^2(2)$
7	43.5	49.9	35.9	42.9	26.5
8	11.9	18.0	9.4	1.7	3.3
10	0.9	1.9	0.6	0.1	0.1
12	-	0.1	-	-	-

5. BESTES TESTVERFAHREN BEI DER HELMERTTRANSFORMATION

Die Ergebnisse zeigen einerseits, daß keiner der behandelten Tests die andern immer übertrifft, eine Kombination verschiedener Tests abhängig von der Punktzahl ist am günstigsten. Andererseits wird eine Analyse der Gewichtskoeffizienten von Teil II bestätigt. Damit ist die Wirksamkeit der Tests vorhersagbar, allerdings mit der Einschränkung, daß es nicht möglich ist, die beste Testkombination festzulegen; lediglich die Anwendungsbereiche der Tests T^0 und T^1 kann man gegeneinander abgrenzen. Es fällt auf, daß die erweiterten Tests wesentlich empfindlicher auf Abweichungen von der zugrundegelegten Alternativhypothese reagieren als der statistische Test.

Folgendes Testverfahren bietet sich daher für die Helmerttransformation an:

1. Punkthaufen mit mehr als 10 Punkten genügt der einfache Test T_1^0 , solange kein Punkt isoliert liegt. Der kritische Wert ist analog zu Gl. (37) an r anzupassen.
2. Für Punkthaufen mit 6 bis 10 Punkten ist das modifizierte "data-snooping" am günstigsten. Es berücksichtigt die Q_{VV} und eliminiert jeweils zwei Punkte. Fälschlicherweise eliminierte Punkte können anschließend wieder einbezogen werden.
3. Für Punkthaufen mit fünf oder weniger Punkten ist der statistische Test nur dann erfolgreich, wenn nur ein Punkt grob falsch ist. Wegen Punktverwechslungen empfiehlt sich (bei fünf Punkten) der erweiterte Test $T_2^1(2)$ mit einer Alternativhypothese $c = -1$. Muß man aber bei fünf Punkten mit zwei groben Fehlern rechnen, ist es sicherer, die richtigen Punkte durch Prüfung von Dreiecken zu suchen.

SCHLUSSFOLGERUNGEN

Die vorliegende Arbeit hat sich zur Aufgabe gestellt, die Voraussetzungen und Möglichkeiten für die automatisierte Suche grober Fehler in photogrammetrischen Lageblöcken zu untersuchen. Insbesondere wurde der Einfluß von Meßanordnung und Testverfahren auf die Kontrollierbarkeit der in die Ausgleichung eingehenden Daten ermittelt. Grundlage hierfür bilden einmal die unteren Grenzwerte für erkennbare grobe Fehler, die theoretisch bzw. durch Computersimulation bestimmt werden (Teil II). Außerdem wurde die Wirksamkeit verschiedener statistischer und nichtstatistischer Tests unter der Annahme von Fehlerhäufungen verglichen (Teil III).

In Teil I wird eine Klasseneinteilung der Beobachtungen vorgenommen, die auf die charakteristischen Zahlen der Redundanz führt. Sie hängen wesentlich von dem maximal zulässigen Beobachtungsfehler v_{\max} ab, der nicht als grob falsch gelten soll. Die damit verbundene Definition des Begriffs "grober Fehler" ermöglicht im Gegensatz zu anderen Definitionen die Beurteilung von Meßsystemen und Testverfahren.

Besonderes Gewicht liegt auf der Darstellung der Unterschiede des statistischen Tests, des "data-snoopings", und des einfachen Tests, bei dem der Einfluß der Meßanordnung auf die Restfehler unberücksichtigt bleibt.

Eine zentrale Bedeutung kommt dabei der Gewichtskoeffizientenmatrix Q_{VV} der Verbesserungen V in Gl. (14) zu:

$$V = - Q_{VV} P_{11} L .$$

Die Gleichung bildet die Grundlage für die Bestimmung der Gewichtskoeffizienten auf dem Wege der Computersimulation. Diese Art der Berechnung bietet sich für Untersuchungen großer Ausgleichungssysteme an, bei denen in der Regel die Inverse der Normalgleichungsmatrix nicht zur Verfügung steht. Die Gewichtskoeffizientenmatrix Q_{VV} läßt Aussagen über die Wirksamkeit des einfachen Tests und des statistischen Tests zu (I.3.2) und kann zur Begründung gebräuchlicher Strategien bei der Suche grober Fehler herangezogen werden. Die Grenzwerte für erkennbare grobe Fehler sind der Quadratwurzel der $Q_{v_i v_i}$ umgekehrt proportional (I.1). Damit kleine grobe Fehler festgestellt werden können, müssen daher die $Q_{v_i v_i}$ möglichst groß sein. Dies kann man durch entsprechende Anordnung der Messung erreichen.

Die Untersuchung der Gewichtskoeffizienten bei den einzelnen Stufen einer Lageblockausgleichung in Teil II gibt dafür klare Hinweise.

Die übliche Modellbildung aus zwei Bildern ist nicht geeignet, die Bildkoordinaten zu kontrollieren, wenn nur sechs Gruberpunkte für die relative Orientierung benutzt werden. Die Messung von Doppelpunkten ermöglicht dagegen eine einfache und sichere Prüfung aller großen groben Fehler. Doch können grob falsche Messungen ebenso wie bei der Helmerttransformation nicht lokalisiert werden. Dies ist erst im Blockverband möglich. Unabhängig von der Fluganordnung sind hier Doppelbefliegungen immer besser für die Fehlersuche geeignet als

Doppelpunkte oder gar Doppelmessungen. Einerseits bleibt die Zahl der Punkte erhalten, andererseits wirken sich systematische Fehler nicht störend auf die Suche grober Fehler aus. Zu hoher Aufwand für Doppelbefliegungen legt bei Einfachbefliegungen eine Veränderung der Punktanordnung nahe: Mit nur geringem Mehraufwand bewirken acht Punkte (vier Doppelpunkte) eine deutlich höhere Kontrollierbarkeit als sechs Punkte im Modell. Um die Zahl der Punktübertragungen zwischen den Streifen zu verringern, kann man noch einen Schritt weitergehen und nur am Rand des Blockes Doppelpunkte vorsehen. Gerade der Blockrand muß gegen grobe Fehler abgesichert sein, da hier die Paßpunkte liegen sollten.

Für die Fehlersuche selbst bieten sich kleine Subblöcke an, bei denen man die für den statistischen Test notwendigen Gewichtskoeffizienten der Verbesserungen ohne große Mühe nach Gl. (13) bestimmen kann. Eine Überlappung der Subblöcke ist für die Lokalisierung auch kleiner grober Fehler notwendig.

Wie die Untersuchung in Teil III für die Helmerttransformation zeigt, ist der statistische Test auch für die Lokalisierung großer grober Fehler geeignet. Der Vergleich verschiedener Testverfahren verdeutlicht die Überlegenheit des statistischen Tests gegenüber dem einfachen Test. Jedoch führt eine Erweiterung der dem Test zugrunde liegenden Alternativhypothese gegenüber der Modifizierung des statistischen Tests zu keiner nennenswerten Erhöhung der Wirksamkeit. Lediglich die Prüfung auf Punktverwechslungen läßt sich bei kleinen Punktgruppen in Hinblick auf den Aufwand vertreten.

Die Ergebnisse gelten streng genommen nur für die Helmerttransformation. Eine ähnliche Untersuchung erscheint jedoch nur für Lageblöcke mit vier Punkten pro Modell notwendig, wenn regelmäßig mit Fehlerhäufungen, vor allem Punktverwechslungen, zu rechnen ist.

Es war nicht Ziel der Arbeit, ein vollständiges Konzept für ein automatisiertes Fehlersuchsystem zu entwickeln. Für die Realisierung eines Editingsystems könnte man aber folgende Schlüsse verwerten:

1. In kleinen Blöcken mit dichter Paßpunktbesetzung ist die gemeinsame Prüfung aller Daten mit statistischen Tests am günstigsten. In allen anderen Fällen führt die getrennte Kontrolle von Paß- und Verknüpfungspunkten zu einer besseren Lokalisierung der groben Fehler.
2. Bei Blöcken mittlerer Größe (50 - 200 Modelle) können alle photogrammetrischen Beobachtungen rasterförmig durch kleine Subblöcke geprüft werden. Dieses "Abscannen" des Blocks ist bei unregelmäßigen Blockformen oder wechselnder Verknüpfungsstärke notwendig.
3. Bei sehr großen Blöcken empfiehlt sich dagegen eine Vorprüfung mit der Fehlerkreismethode von Osaikhuiwu [1972] und damit eine genäherte Lokalisierung der groben Fehler. Voraussetzung hierfür ist die gleichmäßige Kontrollierbarkeit aller photogrammetrischen Daten. Daran schließt sich die Fehlersuche mit Subblöcken an.

Ähnliche Untersuchungen für die räumliche Anblockausgleichung sowie für die Bündelausgleichung stehen noch aus. Die Ergebnisse der Modellbildung geben zu Bedenken Anlaß, ob die Kontrollierbarkeit der Beobachtungen bei Einbeziehung der Höhen ähnlichen Gesetzen wie bei der Lageblockausgleichung folgt.

Literatur

- | 1 | Ackermann, F.: On the Theoretical Accuracy of Planimetric Blocktriangulation, *Photogrammetria*, 21, 1966, S. 145-170
- | 2 | Ackermann, F.: Ergebnisse einer Programmentwicklung zur Blockausgleichung großräumiger Polaraufnahmen, Vortrag auf dem Oberkochener Geoinstrumentenkurs 1972, Sammlung Wichmann, Heft 19
- | 3 | Ackermann, F.: Photogrammetric Densification of Trigonometric Networks, *The Project Appenweier*, BuL 1974, Heft 6, S. 189
- | 4 | Ackermann, F., Ebner, H., Klein, H.: Ein Programmpaket für die Aero-triangulation mit unabhängigen Modellen, BuL 1970, Heft 4, S. 218-224
- | 5 | Alimoradi, H.: Automatic Detection and Elimination of Gross Errors in Height in Aerial Triangulation Block Adjustment, Thesis ITC, 1973, Enschede
- | 6 | Baarda, W.: A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks, Netherlands Geodetic Commission, Vol. 2, No. 5, 1968
- | 7 | Baarda, W.: Statistical Concepts in Geodesy, Netherlands Geodetic Commission, Vol. 2, No. 4, 1967
- | 8 | Baumann, E.: Die Anwendung Statistischer Methoden bei der Untersuchung geodätischer Netze, Reihe DGK, C 175, München 1972
- | 9 | Baumann, E.: Stellungnahme zu den Bemerkungen von Herrn Ir. J. van Mierlo, AVN 1974, Heft 10, S. 398-399
- | 10 | Böhm, J.: Zur Frage des größten zulässigen Fehlers, *Verm. Technik* 1958, S. 80 ff
- | 11 | Konzett, R.: Moderne Methoden der Vermessung, Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik, 1970, Heft 5, S. 101-109
- | 12 | Czuber, E.: Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig, 1891
- | 13 | Davis, R.G.: Automatische Datenprüfung in großen photogrammetrischen Simultanausgleichungen, Symposium on Computational Photogrammetry at Maryland, Gaithersburg, 1967
- | 14 | Davis, R.G.: Advanced Techniques for the Rigorous Analytical Adjustment of Large Photogrammetric Nets, *Photogrammetria* 22, 1967, S. 191-205
- | 15 | Dorrer, E.: Complex Numbers for Blockadjustment, *Photogrammetric Engineering* 1971, S. 85-98
- | 16 | Ebner, H. und Schneider, W.: Simultaneous Compensation of Systematic Errors with Block Adjustment by Independent Models, BuL 1974, Heft 6, S. 198
- | 17 | Fanta, A.: On-line Acquisition, Verification and Editing of Data for Adjustment in Numerical Aero-triangulation, Thesis ITC, 1973, Enschede
- | 18 | Förstner, G.: Verteilung von Lagefehler, BuL 1942, S. 18 ff
- | 19 | Gabriel, F.: Durch Höchstfehler begrenzte Fehlerverteilungen, *Z.f. angewandte Mechanik*, Bd. 28 Nr. 7/8, 1948, S. 244
- | 20 | Gleinsvik, P.: Experimentelle Prüfung von Auswertemethoden in der Meßtechnik durch Simulation, *ZfV* 1970, Heft 10, S. 417
- | 21 | Grafarend, E. und Schaffrin, B.: Unbiased Free Net Adjustment, *Survey Review*, 1974, No. 171, Vol. XXII
- | 22 | Gotthardt, E.: Beiträge zur Frage der Genauigkeit der gegenseitigen Ortung von Senkrechtbildpaaren, BuL 1940, Heft 1, S. 2
- | 23 | Großmann, W.: Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung, Stuttgart 1964
- | 24 | Köhler, H.: Verfeinerung der automatischen Fehlersuche zur blockweisen Bearbeitung großräumiger Polaraufnahmen, Selbständige geodätische Arbeit, 1974, Universität Stuttgart, Institut für Photogrammetrie
- | 25 | Kraus, K.: Verschiedene Transformationen und Indikatoren zur Elimination grober Datenfehler, AVN 1975, Heft 1, S. 23

- | 26 | Kraus, K., Krack, K.: Detailprobleme und Erfahrungen bei der Bearbeitung großräumiger Polaraufnahmen, Vortrag auf dem Oberkochener Geo-Instrumentenkurs 1972, Sammlung Wichmann, Heft 19
- | 27 | Linkwitz, K.: Über die Systematik verschiedener Ausgleichsformen, ZfV, 1960, Heft 5, S. 156 ff
- | 28 | van Mierlo, Ir.I.: Bemerkungen zu "Untersuchung von Höhennetzen nach einem statistischen Verfahren" von Dr.-Ing. E. Baumann, AVN 1974, Heft 10, S. 394-397
- | 29 | Mikhail, E.M.: Use of Triplets for Analytical Aerotriangulation, Photogrammetric Engineering, 28, S. 625-632, 1962
- | 30 | Mikhail, E.M.: A New Approach to Analytic Aerotriangulation: Two Directional Triplets in Subblocks, Cornell University, Ithaca, N.Y. 1963
- | 31 | Osaikhuiwu, O.E.: Automatic Detection and Elimination of Gross Errors in Block Adjustment for Planimetry, Thesis ITC 1972, Enschede
- | 32 | Pearson, E.S. und Sekhar, C. Chandra: The Efficiency of Statistical Tools and A Criterion for the Rejection of Outlying Observations, Biometrika Vol. XXVIII, Parts I and II, June 1938
- | 33 | Pelzer, H.: Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen, Habilitationsschrift 1971, DGK C 164
- | 34 | Pelzer, H.: Zur Behandlung singulärer Ausgleichsaufgaben, ZfV 1974, Heft 5 und 11
- | 35 | Pelzer, H.: Neuere Ergebnisse bei der statistischen Prüfung von Deformationsmessungen, Paper 608.3, FIG Kongress Washington 1974
- | 36 | Reicheneder, K.: Die Sicherheit einer Punkteinschaltung, ein Beitrag zur Fehlertheorie, ZfV 1941, S. 386-395
- | 36a | Reinhart, E.: Exakte Abschätzung von Maximalfehlern aus vorgegebenen Toleranzen der Beobachtungsgrößen, DGK, Reihe C, Heft 211, 1975
- | 37 | Rider, P.R.: Criteria for Rejection of Observations Washington University Studies Science and Technology, No. 8, 1933
- | 38 | Rosenfield, H.G.: Automatic Data Verification, Symposium on Computational Photogrammetry, Gaithersbury, Maryland, 1967
- | 39 | Sachs, L.: Statistische Auswertemethoden, Berlin 1971
- | 40 | Salmenperä, H.: Efficiency of the Extended Mathematical Model in Bundle Adjustment, BuL 1974, Heft 6, S. 229
- | 41 | Shut, G.H.: Development of Programs for Strip- and Blockadjustment at the National Research Council of Canada, Photogrammetric Engineering 1964, S. 283
- | 42 | Stark, E.: Die Genauigkeitsstruktur im photogrammetrischen Einzelmodell, DGK, Reihe C, Heft 193, München 1973
- | 43 | Thomas, J.: Variation der Bildflughanordnung, ihre Auswirkung auf die Bündelausgleichung bei Vorliegen zufälliger und systematischer Bildfehler, Dissertation Bonn, erscheint demnächst
- | 44 | Wolf, H.: Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Bonn 1968
- | 45 | Förstner, W. und Wrobel, B.: Reelle oder komplexe Numerik für die Lageblockausgleichung, ZfV Juni 1976, S. 232
- | 46 | Anweisung für das Verfahren bei den Fortführungsvermessungen in Rheinland-Pfalz, 1973
- | 47 | Richtlinien des Landesvermessungsamtes Nordrhein-Westfalen für die Durchführung von örtlichen Arbeiten zur Erhaltung des TP-Feldes, 1974
- | 48 | Brown, D.C.: Bundle Adjustment with additional parameters, BuL 1974, Heft 6, S. 210
- | 49 | Heister, H. und Welsch, W.: Erzeugung und Test normalverteilter Zufallszahlen, ZfV 1972, Heft 10, S. 446

ANHANG

Die Gewichtskoeffizientenmatrix Q_{VV} bei der Modellbildung

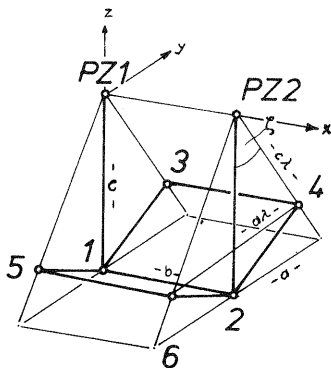
Im folgenden wollen wir die Gewichtskoeffizienten Q_{VV} bei der Modellbildung für zwei Fälle bestimmen. Die Punktanordnung ist speziell gewählt, jedoch allgemein genug, daß man für die Praxis wichtige Folgerungen ziehen kann. Der von Gotthardt |1940| angewandte Ansatz ist auch hier von Vorteil, da sich die Inverse Q_{XX} allgemein angeben läßt.

Dort entnimmt man die Fehlergleichungen der y-Parallaxen bei der Modellbildung (Bezeichnungen siehe Figur):

$$p_{y_i} + v + x_i \Delta\kappa_I + (b-x_i) \Delta\kappa_{II} + \frac{x_i y_i}{z_i} \Delta\phi_I + \frac{(b-x_i) y_i}{z_i} \Delta\phi_{II} - \left(z_i + \frac{y_i^2}{z_i}\right) \Delta\omega = 0$$

$\Delta\kappa_I$, $\Delta\kappa_{II}$, $\Delta\phi_I$, $\Delta\phi_{II}$ sind die Drehungen der beiden Bilder I und II um die y- und die z-Achse, $\Delta\omega$ ist die gemeinsame Drehung der Bilder um die x-Achse.

1. Wir wählen die folgende Punktanordnung (vgl. Figur):



- Punkte PZ1 und PZ2 gleiche Höhe
- Punkte 1 und 2 gleiche Höhe
- Punkte 3 bis 6 gleiche Höhe
- Punkte 3 bis 6 gleichen Abstand von der x-Achse
- Ebenen (513 PZ1) \parallel (624 PZ2) \perp Basis (12)

Die Punkte lassen sich so durch drei Parameter beschreiben:

- Höhe von 1 und 2
- Höhe von 3 bis 6
- Öffnungswinkel ζ

Der Maßstab wird durch $b = 1$ festgelegt.

Die Koordinaten und die Fehlergleichungsmatrix der sechs Punkte sind aus der Tabelle zu entnehmen:

	x	y	z	$\Delta\kappa_I$	$\Delta\kappa_{II}$	$\Delta\phi_I$	$\Delta\phi_{II}$	$\Delta\omega$
1	0	0	-c	0	1	0	0	c
2	1	0	-c	1	0	0	0	c
3	0	a λ	-c λ	0	1	0	-a/c	$c\lambda(1+\frac{a^2}{c^2}) = cu$
4	1	a λ	-c λ	1	0	-a/c	0	" = cu
5	0	-a λ	-c λ	0	1	0	a/c	" = cu
6	1	-a λ	-c λ	1	0	a/c	0	" = cu

Die zugehörige Normalgleichungsmatrix lautet ($P = E$):

$$A'A = N = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & c(1/2u) \\ 0 & 3 & 0 & 0 & c(1+2u) \\ 0 & 0 & 2(a/c)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(a/c)^2 & 0 \\ c(1+2u) & c(1+2u) & 0 & 0 & 2c^2(1+2u^2) \end{pmatrix}$$

Die Inverse $(A'A)^{-1} = Q_{xx}$ lautet

$$N^{-1} = Q_{xx} = \frac{1}{DET} (Q_{ij}) = \frac{1}{DET} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & Q_{15} \\ & Q_{22} & 0 & 0 & Q_{25} \\ & & Q_{33} & 0 & 0 \\ & & & Q_{44} & 0 \\ \text{symmetrisch} & & & & Q_{55} \end{pmatrix}$$

mit:

$$k = 2 (a/c)^2$$

$$DET = k^2 12c^2 (1-u)^2$$

$$Q_{11} = k^2 (5c^2 + 4c^2 (2u^2 - u))$$

$$Q_{22} = Q_{11}$$

$$Q_{33} = 12c^2 (1-u)^2 k$$

$$Q_{44} = Q_{33}$$

$$Q_{55} = 9k^2$$

$$Q_{12} = k^2 (-c^2 - 4c^2u - 4c^2u^2)$$

$$Q_{15} = k^2 (-3c) (1+2u)$$

$$Q_{25} = Q_{15}$$

$$Q_{13} = Q_{14} = Q_{23} = Q_{24} = Q_{34} = Q_{35} = Q_{45} = 0$$

Die Gewichtskoeffizienten der ausgeglichenen Beobachtungen erhält man aus:

$$Q_{\hat{1}\hat{1}} = (D_{ij}) = A Q_{xx} A' = \frac{1}{DET} A (Q_{ij}) A' = \frac{1}{DET} (G_{ij})$$

Es gilt z.B.:

$$\begin{aligned} G_{11} &= (1 \quad c) \begin{pmatrix} Q_{22} & Q_{25} \\ Q_{52} & Q_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \\ &= Q_{22} + c (Q_{52} + Q_{25}) + c^2 Q_{55} \\ &= 8 k^2 c^2 (1 - u)^2 \end{aligned}$$

$$D_{11} = 2/3$$

$$\begin{aligned}
 G_{12} &= (1 \quad c) \begin{pmatrix} Q_{21} & Q_{25} \\ Q_{51} & Q_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \\
 &= Q_{21} + c (Q_{51} + Q_{25}) + c^2 Q_{55} \\
 &= 4 k^2 c^2 (1 - u)^2 \qquad D_{12} = 1/3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{13} &= (1 \quad c) \begin{pmatrix} Q_{22} & Q_{24} & Q_{25} \\ Q_{52} & Q_{54} & Q_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -a/c \\ cu \end{pmatrix} \\
 &= Q_{22} + c Q_{52} - a (Q_{24} + Q_{54}) + cu Q_{25} + c^2 u Q_{55} \\
 &= 2 k^2 c^2 (1 - u)^2 \qquad D_{13} = 1/6
 \end{aligned}$$

Die übrigen Werte der G_{ij} und D_{ij} kann man auf die gleiche Weise bestimmen. Daraus ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
 Q_{vv} &= E - Q_{\hat{1}\hat{1}} = E - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 11 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 11 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & 11 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Mißt man zusätzlich zu den sechs Gruberpunkten 1 bis 6 Beipunkte 1' bis 6', die hier der Einfachheit halber dieselben Koordinaten erhalten, so ergibt sich folgendes Fehlergleichungssystem:

$$\bar{v} = \bar{A}x - \bar{l} = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} x - \bar{l}$$

mit A aus der Tabelle (S. 96). Daraus erhält man die Normalgleichungsmatrix:

$$\bar{N} = \bar{A}'\bar{A} = (A' A') \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} = 2 A' A = 2 N$$

Die Inverse lautet

$$\bar{Q}_{xx} = \frac{1}{2} Q_{xx}$$

Damit folgt:

$$\bar{Q}_{11}^{\hat{\hat{}}} = \bar{A} \bar{Q}_{xx} \bar{A}' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} Q_{xx} (A' A') = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q_{11}^{\hat{\hat{}}} & Q_{11}^{\hat{\hat{}}} \\ Q_{11}^{\hat{\hat{}}} & Q_{11}^{\hat{\hat{}}} \end{pmatrix}$$

woraus sich schließlich

$$\bar{Q}_{vv} = E - \bar{Q}_{11}^{\hat{\hat{}}} = E - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q_{11}^{\hat{\hat{}}} & Q_{11}^{\hat{\hat{}}} \\ Q_{11}^{\hat{\hat{}}} & Q_{11}^{\hat{\hat{}}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 16 & -8 & -4 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ -8 & 16 & & & & & \\ & -4 & 16 & -8 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & & 2 & -\frac{13}{11} & -\frac{11}{13} & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -\frac{13}{11} & -\frac{11}{13} & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & -\frac{13}{11} & -\frac{11}{13} & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -1 & -1 & -\frac{13}{11} & -\frac{11}{13} \end{pmatrix}$$

ergibt, mit $1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ und $4 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

```

SUBROUTINE BAHT
DIMENSION IP(50)
LOGICAL ZA,ZB
LOGICAL Z,Z1,Z2
COMPLEX DEK
COMPLEX XU,YU,XO,YO,DA,DB
COMPLEX X,Y,DX,DY,XQ,YQ
COMMON /ANZ/ NN,NF,NFU,MF(50),NP(200)
COMMON /CER/ X(50),Y(50),DX(50),DY(50),XQ(50),YQ(50),SP,P(50),TX,
* TY,FSX,FSY,RED,SD,SO
COMMON /CUS/ BLX(50),BLY(50),FAK,FAL,A,B
COMMON /HEF/ IA,IB,IRA,IRB,GA,GB,DEK(16),KGR
COMMON /KAF/ NH
COMMON /LEG/ Z,Z1,Z2
COMMON /NEK/ KE,KENFAL,KENBER,KSU
COMMON /OOK/ XU(50),YU(50),XO,YO,DA,DB
4 FORMAT(1H ,I4,4(2F10.3,2X),F5.0,2F10.3)
FAL=SO*SQRT(10.8)
FAK=SO*SQRT(10.8)
ZA=.FALSE.
ZB=ZA
KIT=0
KU=KE
KW=0
100 DO 101 I=1,NN
DY(I)=(0.,0.)
P(I)=1.
X(I)=XU(I)
101 Y(I)=YU(I)
NF=0
NFU=0
102 IRE=(NN-NF)*2-4
IF(IRE.GT.1) GOTO 107
IF(Z) WRITE(6,2)
2 FORMAT(1H ,13HREDUNDANZ =0 )
IF(KE.NE.4) GOTO 190
KW=1
KE=3
GOTO 100
107 CALL RECH
DA=C
DB=D
DO 113 I=1,NN
RR=CABS(XQ(I))
TT=CABS(YQ(I))
113 IF(Z) WRITE(6,4) I,X(I),Y(I),DX(I),DY(I),P(I),RR,TT
IF(IRE.EQ.2) GOTO 109
GOTO 111
109 IF(KE.EQ.4) GOTO 160
CALL FISH(IRE)
IF(NH.LT.3) GOTO 190
IFA=0
DO 183 I=1,NN
IF(P(I).LT.1E-2) GOTO 183
IFA=IFA+1
IP(IFA)=I
183 CONTINUE
IF(Z) WRITE(6,3) (IP(I),I=1,IFA)

```

```

3 FORMAT(1H ,6HPUNKTE ,4I4,20H NICHT IN ORDNUNG )
GOTO 190
111 IF(KE.EQ.0) GOTO 150
IF(KW.EQ.1) GOTO 160
CALL SUCH
IF(IA.EQ.0) GOTO 103
P(IABS(IA))=0.
NF=NF+1
NFU=NFU+1
MF(NF)=IA
IF(IB.EQ.0.OR.IABS(KE).EQ.1.OR.IABS(KE).EQ.4) GOTO 102
P(IABS(IB))=0.
NF=NF+1
NFU=NFU+1
MF(NF)=IB
GOTO 102
103 IF(NF.EQ.0) GOTO 151
KW=1
GOTO 102
150 IF(KW.EQ.1) GOTO 151
KW=1
IF(KWI.LT.0) GOTO 151
GOTO 102
151 CALL FISH(IRE)
GOTO 190
160 CALL FISH(IRE)
IF(NH.LT.3.OR.KU.NE.4) GOTO 190
IF(KW.EQ.1.AND.KE.EQ.3) GOTO 190
KE=3
IF(Z) WRITE(6,1)
1 FORMAT(1H ,44HEIN-PUNKT-SUCHEN HAT NICHT ZUM ZIEL GEFUEHRT )
GOTO 100
190 CONTINUE
IF(.NOT.Z) GOTO 199
IF(NH.GT.3) WRITE(6,5)
IF(NH.EQ.3) WRITE(6,6)
IF(NH.EQ.2) WRITE(6,7)
IF(NH.EQ.1) WRITE(6,8)
5 FORMAT(1H , 'HYPOTHESE MIT 99.9% ABGELEHNT')
6 FORMAT(1H , 'HYPOTHESE MIT 99% ABGELEHNT')
7 FORMAT(1H , 'HYPOTHESE MIT 95% ABGELEHNT')
8 FORMAT(1H , 'HYPOTHESE MIT 95% ANGENOMMEN')
WRITE(6,9) IRE,DA,DB,SV,SAV
9 FORMAT(1H , 'REDUNDANZ',I10,/,1H , 'TRANSFORMATIONS KONSTANTEN A,0,DX
*,DY',/,1H ,10X,4F10.5,/,1H , 'KONTROLLE',4F10.5)
WRITE(6,10) (MF(I),I=1,NFU)
10 FORMAT(1H , 'REIHENFOLGE DER ELIMINATION;',/,1H , 'PUNKTE MIT NEGATI
*VEM VORZEICHEN SPAETER ALS RICHTIG ERKANNT',/,1H ,30I4)
199 CONTINUE
11 FORMAT(1H+,35X,I5,F7.3,15I5)
NFV=14
IF(NFV.GT.NN) NFV=NN
IF(Z1) WRITE(6,11) NF,TX,(MF(I),I=1,NFV),NH,KSU
114 FORMAT(1H+,20X,1H*)
115 FORMAT(1H+,30X,1H*)
550 FORMAT(1H , 'IC=',I5, ' ID=',I5, ' IE=',I5)
RETURN
END

```

(auszugsweise) Protokoll des Programms zur Suche grober Fehler bei der Helmerltransformation


```

SUBROUTINE RECH
COMPLEX XX,YY,XC,YC,SX,SY,SXY,SXX,SYY,XNEN,      XV,SV,SAV,SVVX,
*          SVVY
COMPLEX XO,YO
LOGICAL Z,Z1,Z2
COMPLEX XU,YU,XO,YO,DA,DB
COMPLEX X,Y,DX,DY,XQ,YQ
COMMON /ANZ/ NN,NF,NFU,MF(50),NP(200)
COMMON /CER/ X(50),Y(50),DX(50),DY(50),XQ(50),YQ(50),SP,P(50),TX,
*          TY,FSX,FSY,RED,SO,SO
COMMON /LEG/ Z,Z1,Z2
COMMON /DOK/ XU(50),YU(50),XO,YO,DA,DB
SX=(0.,0.)
SP=SX
SY=SX
SXX=SX
SYY=SX
SXY=SX
SV=SX
SAV=SX
SVVX=SX
SVVY=SX
DO 100 I=1,NN
XX=X(I)
YY=Y(I)
XC=CONJG(XX)
YC=CONJG(YY)
PP=P(I)
SX=SX+XX*PP
SY=SY+YY*PP
SXX=SXX+XX*XC*PP
SYY=SYY+YY*YC*PP
SXY=SXY+XC*YY*PP
100 SP=SP+PP
2  FORMAT(1H ,10F12.3)
XO=SX/SP
XO=XO
YO=SY/SP
DO 101 I=1,NN
XQ(I)=X(I)-XO
101 YQ(I)=Y(I)-YO
XQ=CONJG(SX)*SX
YO=CONJG(SY)*SY
FSX=SXX-XO/SP
FSY=SYY-YO/SP
IF(Z) WRITE(6,500) FSX,FSY
500  FORMAT(1H ,'FSX = ',F10.1,' FSY = ',F10.1)
XNEN=SP*SXX-XO
DA=(SP*SXY-CONJG(SX)*SY)/XNEN
DB=(-SX*SXY+SXX*SY)/XNEN
DO 102 I=1,NN
XV=DA*X(I)+DB-Y(I)
PP=P(I)
SV=SV+XV*PP
SAV=SAV+CONJG(X(I))*XV*PP
SVVX=SVVX+XV*CONJG(XV)*PP
102 DX(I)=XV
C=DA

```

```

D=DB
IF(Z) WRITE(6,1) SV,SAV
IF(.NOT.Z2) GOTO 104
SV=(0.,0.)
SAV=SV
1  FORMAT(1H , 9HKONTROLLE ,4F10.5)
XNEN=SP*SYY-YO
DA=(SP*CONJG(SXY)-CONJG(SY)*SX)/XNEN
DB=(-SY*CONJG(SXY)+SYY*SX)/XNEN
DO 103 I=1,NN
XV=DA*X(I)+DB-X(I)
PP=P(I)
SV=XV*PP+SV
SVVY=SVVY+XV*CONJG(XV)*PP
SAV=SAV+ CONJG(Y(I))*XV*PP
103 DY(I)=XV
IF(Z) WRITE(6,1) SV,SAV
104 CONTINUE
DA=C
DB=D
RED=2.*SP-4.
TY=SQRT(CABS(SVVY)/RED)
TX=SQRT(CABS(SVVX)/RED)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SUCHH1
LOGICAL Z,Z1,Z2
COMPLEX DEK
COMPLEX X,Y,DX,DY,XQ,YQ
COMMON /ANZ/ NN,NF,NFU,MF(50),NP(200)
COMMON /CER/ X(50),Y(50),DX(50),DY(50),XQ(50),YQ(50),SP,P(50),TX,
*          TY,FSX,FSY,RED,SO,SO
COMMON /CUS/ BLX(50),BLY(50),FAK,FAL,A,B
COMMON /LEG/ Z,Z1,Z2
COMMON /HEF/ IA,IB,IRA,IRB,GA,GB,DEK(16),KGR
DO 100 I=1,NN
BX=BLX(I)
BY=BLY(I)
PP=P(I)
IF(PP.LT.0.5.OR.BX.LT.0..OR.BY.LT.0.) GOTO 100
QX=CABS(DX(I))/BX
IF(QX.LT.1.) GOTO 101
CALL MAX(I,J,QX,IA,IB)
101 IF(.NOT.Z2) GOTO 100
QX=CABS(DY(I))/BY
IF(QX.LT.1.) GOTO 100
CALL MAX(I,J,QX,IA,IB)
100 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SUCH
LOGICAL Z,Z1,Z2
COMPLEX XX,YY
COMPLEX DEK
COMPLEX X,Y,DX,DY,XQ,YQ
COMMON /ANZ/ NN,NF,NFU,MF(50),NP(200)
COMMON /CER/ X(50),Y(50),DX(50),DY(50),XQ(50),YQ(50),SP,P(50),TX,
* TY,FSX,FSY,RED,SO,SO
COMMON /CUS/ BLX(50),BLY(50),FAK,FAL,A,B
COMMON /HEF/ IA,IB,IRA,IRB,GA,GB,DEK(16),KGR
COMMON /LEG/ Z,Z1,Z2
COMMON /NEK/ KE,KENFAL,KENBER,KSU
DO 100 I=1,NN
IF(Z2) BLY(I)=FAL
100 BLX(I)=FAK
IF(KE.LT.0) GOTO 101
DO 102 I=1,NN
XX=XQ(I)
IF(Z2) YY=YQ(I)
IF(Z2)
*BLY(I)=FAL*SQRT((CABS(1.-1./SP-YY*CONJG(YY)/FSY))
102 BLX(I)=FAK*SQRT((CABS(1.-1./SP-XX*CONJG(XX)/FSX))
101 A=0.
B=0.
IA=0
IB=0
KSU=1
CALL SUCHH1
IF(KE.EQ.3) IB=0
IRE=(NN-NF)*2-4
IF(KE.NE.3.OR.IRE.LE.4) GOTO 180
KSU=2
CALL SUCHH2
180 CONTINUE
RETURN
END

REAL FUNCTION QVV(C,D,A,FX,NN)
COMPLEX C,D,A,CC,DD,AA,QWW
CC=CONJG(C)
DD=CONJG(D)
AA=CONJG(A)
F=1./FLOAT(NN)
QWW=1.+A*AA-F*(1.+A)*(1.+AA)-(C+A*D)*(CC+AA*DD)/FX
QVV=CABS(QWW)
QVV=1./CABS(QWW)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SUCHH2
LOGICAL Z,Z1,Z2
COMPLEX C1,C2
COMPLEX AL(6)
COMPLEX ALKKK
COMPLEX DEK
COMPLEX X,Y,DX,DY,XQ,YQ
COMMON /ANZ/ NN,NF,NFU,MF(50),NP(200)
COMMON /CER/ X(50),Y(50),DX(50),DY(50),XQ(50),YQ(50),SP,P(50),TX,
* TY,FSX,FSY,RED,SO,SO
COMMON /CUS/ BLX(50),BLY(50),FAK,FAL,A,B
COMMON /LEG/ Z,Z1,Z2
COMMON /HEF/ IA,IB,IRA,IRB,GA,GB,DEK(16),KGR
COMMON /NEK/ KE,KENFAL,KENBER,KSU
COMMON /ZEK/ K1,K2,K3,K4,K5,K6,K7
N1=NN-1
KENB=KENBER
GOTO (15,15,12,13,14,13),KENBER
12 AL(1)=DEK(15)
AL(3)=DEK(1)
GOTO 16
13 AL(3)=DEK(14)
AL(4)=DEK(2)
IF(KENBER.EQ.6) GOTO 18
GOTO 17
14 AL(3)=DEK(13)
AL(4)=DEK(3)
KENB=4
GOTO 17
18 AL(5)=DEK(5)
AL(6)=DEK(11)
GOTO 17
15 KENB=2
17 AL(1)=DEK(16)
16 AL(2)=(-1.,0.)
DO 105 K=1,KENB
DO 101 I=1,N1
IF(P(I).LT.0.5) GOTO 101
II=I+1
DO 102 J=II,NN
IF(P(J).LT.0.5) GOTO 102
Q=QVV(XQ(I),XQ(J),AL(K),FSX,NN)
QX=CABS(DX(I)+DX(J)*AL(K))*SQRT(Q/10.8)/SO
IF(QX.LT.1.) GOTO 100
IU=I
CALL MAX(I,J,QX,IA,IB)
IF(IU.NE.I) K5=K
100 IF(.NOT.Z2) GOTO 102
Q=QVV(YQ(I),YQ(J),AL(K),FSY,NN)
QX=CABS(DY(I)+DY(J)*AL(K))*SQRT(Q/10.8)/SO
IF(QX.LT.1.) GOTO 102
IU=I
CALL MAX(I,J,QX,IA,IB)
IF(IU.NE.I) K5=K
102 CONTINUE
101 CONTINUE
105 CONTINUE
RETURN
END

```