

DEUTSCHE GEODÄTISCHE KOMMISSION
bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Reihe C : Dissertationen - Heft Nr. 141

Genauigkeitsuntersuchung zur
photogrammetrischen Sternkoordinatenbestimmung
durch geschlossene Blockausgleichung

Von der
Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

Vorgelegt von
Diplom-Ingenieur Heinrich Ebner
geboren zu Wien

München 1969

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:

DEUTSCHE GEODÄTISCHE KOMMISSION

8 München 22, Marstallplatz 8

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. F. Ackermann

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. K. Linkwitz

Tag der Einreichung: 13. September 1968

Tag der mündlichen Prüfung: 28. Januar 1969

Copyright 1969 by Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet, die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

Druck Gebr. Brunner, München

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	4
1.1. Bisherige Anwendung der Blockausgleichung im Vermessungswesen	4
1.2. Die Methode der astronomischen Positionsbestimmung durch geschlossene Blockausgleichung	5
2. Aufgabenstellung	8
3. Mathematische Grundlagen	9
3.1. Definition der Koordinatensysteme und der Freiheitsgrade für die äußere Orientierung	9
3.2. Verwendete Modelle	11
3.3. Herleitung der linearisierten Verbesserungsgleichungen	14
4. Umfang und praktische Durchführung der fehlertheoretischen Studien	17
4.1. Übersicht der einzelnen Untersuchungen	17
4.1.1. Einfluß des Bündelöffnungswinkels	17
4.1.2. Einfluß der Anzahl der Verknüpfungssterne pro Aufnahme	19
4.1.3. Einfluß der Bündelform bei gleichem Öffnungswinkel	19
4.1.4. Einfluß des funktionellen Modells	21
4.1.5. Paßpunkte - keine Paßpunkte	22
4.1.6. Vergleich der Fehlerfortpflanzung in einem geschlossenen und in einem offenen Block	23
4.1.7. Genauigkeit nachträglich bestimmter Sterne	23
4.1.8. Übersicht der behandelten Blöcke	24
4.2. Bemerkungen zu den Berechnungen	24
4.3. Struktur der Verbesserungsgleichungsmatrix und der Normalgleichungsmatrix für zwei Fälle als Beispiele	28
4.3.1. Dodekaeder-Block ohne Paßpunkte	28
4.3.2. 92-Flächen-Block mit 10 Paßpunkten	32
5. Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse der durchgerechneten Blöcke	36
5.1. Übersicht der mittleren und maximalen Streuungen der Sternkoordinaten	36
5.2. Verteilung der Genauigkeit innerhalb der Blöcke	39
6. Ergebnisse der einzelnen Untersuchungen und Diskussion	53
6.1. Gegenüberstellung der verschiedenen großen Blöcke	53
6.2. Genauigkeitsvergleich zwischen den Varianten E und E+S (Verknüpfungssterne nur in den Bildecken bzw. in den Ecken und Seiten-Mitten)	58
6.3. Vergleich der Leistungsfähigkeit der Dodekaeder- und Ikosaeder-Blöcke	60
6.4. Gegenüberstellung der mit verschiedenen funktionellen Modellen erzielten Ergebnisse	61
6.5. Genauigkeitsvergleich zwischen "freien Blöcken" und solchen mit Paßpunkten	65
6.6. Gegenüberstellung der Ergebnisse des offenen und des geschlossenen 32-Flächen-Blocks	68
6.7. Koordinatengenauigkeit nicht in die Ausgleichung einbezogener Sterne	70
6.8. Kritischer Vergleich der Ergebnisse mit der theoretischen Anblockgenauigkeit	70
7. Ein Zahlenbeispiel mit "gewürfelten Beobachtungen"	75
8. Überlegungen zu einer praktischen Anwendung	78
8.1. Bildformat und mittlerer Gewichtseinheitsfehler	78
8.2. Genauigkeitssteigerung durch Anwendung mehrerer Bildverbände	79
8.3. Blockgröße	80
8.4. Block-Ausgleichung	84
9. Zusammenfassung und Schlußfolgerung	86
Literaturverzeichnis	89

1. E i n l e i t u n g

1.1. Bisherige Anwendung der Blockausgleichung im Vermessungswesen

Die Methode der simultanen Ausgleichung blockartiger Verbände, die aus einer größeren Anzahl von Einzelementen bestehen, hat in jüngster Zeit eine starke Anwendung im Vermessungswesen gefunden. Maßgebend für die Einführung dieser Verfahren war einerseits die Entwicklung sehr leistungsfähiger elektronischer Rechenanlagen und andererseits das außerordentlich günstige Genauigkeitsverhalten solcher Blöcke, das in mehreren theoretischen Arbeiten der letzten Jahre, z. B. [1], [2], [3] festgestellt wurde. Die einzelnen Elemente dieser Verbände sind in [1] die Richtungsätze geodätischer Netze, in [2] und [3] photogrammetrische Modelle, deren Höhen-bzw. Lagekoordinaten behandelt werden. Auf die Ausgleichung photogrammetrischer Lageblöcke nach dem sogenannten Anblockverfahren und ihre Genauigkeitseigenschaften, die in [3], [4] und [5] ausführlich untersucht wurden, soll hier etwas näher eingegangen werden, da ein engerer Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit besteht.

Dem Anblockverfahren liegen als Einzelemente hinreichend genau horizontierte photogrammetrische Modelle zugrunde. Bei der Blockbildung wird an jedem Modell eine ebene Ähnlichkeitstransformation zugelassen. Die auftretenden Spannungen an den Verknüpfungspunkten - Punkte, die in mehreren Modellen vorkommen - werden durch Einführung von Verbesserungen und Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate gelöst. Die Genauigkeit der ausgeglichenen Lagekoordinaten des Blocks wird durch den mittleren Gewichtseinheitsfehler - die Lagegenauigkeit im Einzelmodell - und durch die Fehlerfortpflanzung innerhalb des Blocks bestimmt. Der mittlere Gewichtseinheitsfehler - bezogen auf das Gelände - nimmt in erster Näherung direkt proportional zur Maßstabszahl zu. Die auf die Bildebene bezogene Genauigkeit ergibt sich somit als praktisch konstant. Die Fehlerfortpflanzung ist nach [3], [4] und [5] bei guter Absicherung des Blockrandes mit Paßpunkten - Punkte, deren terrestrische Lagekoordinaten bekannt sind - gering und steigt vor allem bei wachsender Anzahl der Einzelmodelle nur sehr gering an. Bei einem Block von 10 Streifen mit je 20 Modellen beträgt die

maximale Streuung einer Lagekoordinate erst das 1,2-fache des mittleren Gewichtseinheitsfehlers.

Bei gegebener Fläche des zu vermessenden Gebietes kann somit die Lagegenauigkeit durch Verkleinerung der Einzelmodelle - wodurch der mittlere Gewichtseinheitsfehler abnimmt - und eine damit verbundene Erhöhung der Modellanzahl - welche die Fehlerfortpflanzung nur sehr gering verschlechtert - praktisch beliebig erhöht werden.

.2. Die Methode der astronomischen Positionsbestimmung durch geschlossene Blockausgleichung

In gewisser Analogie zum Anblockverfahren läßt sich die Blockausgleichung auf das Problem der Sternkoordinatenbestimmung aus photographischen Bildern anwenden. Einem zweidimensionalen ebenen Koordinatensystem bei der photogrammetrischen Lageblockausgleichung steht nun ein ebenfalls zweidimensionales Kugelkoordinatensystem gegenüber. Der "astronomische Block" wird aus einer Anzahl einander teilweise überlappender Strahlenbündel aufgebaut, die aus den photographischen Aufnahmen und den zugehörigen Projektionszentren gebildet werden, wobei die innere Orientierung - Bildhauptpunkt, Kammerkonstante und Verzeichnung der Aufnahmekammer - entweder als bekannt vorausgesetzt oder im Zuge der anschließenden Ausgleichung mitbestimmt wird. Zur Messung der ebenen Koordinaten der abgebildeten Sterne werden Komparatoren verwendet. Der Zusammenhang zwischen den Strahlenbündeln wird durch Verknüpfungssterne - Sterne, die in verschiedenen Aufnahmen abgebildet sind - erreicht. Die einzelnen Bündel werden einer gemeinsamen Blockausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate unterworfen, welche die gemessenen Bildkoordinaten als Beobachtungen auffaßt und als Ergebnis die Orientierung der einzelnen Aufnahmen sowie die ausgeglichenen Koordinaten der zu bestimmenden Sterne liefert. Bei dichter Besetzung des Randes des astronomischen Blockes mit Paßpunktsternen - Sterne, deren astronomische Koordinaten bekannt sind - ist eine ähnlich günstige Fehlerfortpflanzung wie beim Anblockverfahren zu erwarten.

Über die Analogie zum Anblock hinaus aber bietet sich beim astronomischen Block die Möglichkeit, den gesamten Himmel mit Bildbündeln zu überdecken und somit einen in sich geschlossenen Block zu

bilden. Die Geschlossenheit läßt selbst bei Verwendung von nur wenigen Paßpunktsternen und sogar bei völligem Verzicht auf Paßpunkte erwarten, daß die Fehlerfortpflanzung in der gleichen Größenordnung liegt wie beim Anblockverfahren und dichter Paßpunktbesetzung des Blockrandes. Nach den Erfahrungen mit photogrammetrischen Aufnahmekammern [6] kann der mittlere Gewichtseinheitsfehler - hier definiert als Genauigkeit in der Bildebene - bei gleichem Bildformat in erster Näherung als unabhängig von der Kammerkonstante angesehen werden, was bedeutet, daß die Winkelgenauigkeit im Einzelbild umso mehr zunimmt, je schmaler der Aufnahme Winkel ist.

Durch Verkleinerung der Öffnungswinkel der einzelnen Bündel - was eine Erhöhung der Winkelgenauigkeit bedingt - und eine damit verbundene Erhöhung der Aufnahmeanzahl - wodurch die Fehlerfortpflanzung nur gering verschlechtert wird - dürfte sich also auch bei diesem geschlossenen astronomischen Block die erreichbare Sternkoordinatengenauigkeit praktisch beliebig steigern lassen.

Die vorhandenen Sternkataloge kommen in Bezug auf Genauigkeit und Sterndichte den praktischen Anforderungen insbesondere der Satellitengeodäsie nicht mehr in wünschenswertem Maße nach. Der derzeit genaueste Katalog FK 4, der jedoch nur 1535 Sterne umfaßt, weist erhebliche Genauigkeitsunterschiede auf. Nach den Angaben in diesem Katalog [7] schwanken die Streuungen $\sigma_{\alpha} \cos \delta$ bzw. σ_{δ} zwischen $0''05$ und ca. $0''2$. Sie sind auf die Epoche 1968 bezogen und setzen sich aus systematischen und individuellen Fehleranteilen zusammen. Verschiedentlich werden für den FK 4 auch größere Streuungen angenommen, am Südhimmel sogar bis zu $0''5$. Neben der ungleichen Genauigkeit besteht ein weiterer Nachteil des FK 4 in der ungleichen Sterndichte, die besonders am Südhimmel klein ist.

Die größte Anzahl von Sternen - ca. 260 000 - umfaßt der Sternkatalog des Smithsonian-Instituts [8], dessen Genauigkeit aber wesentlich geringer ist als die des FK 4. Er gibt für die Epoche 1963,5 eine mittlere Streuung der Positionen von $0''5$ an.

Zur Verdichtung der vorhandenen Kataloge wird seit mehreren Jahren die "Plate Overlap Technique" [9], [10], [11] erfolgreich angewendet. Mit dieser Methode, der als Einzelelemente einander überlappende photographische Aufnahmen sehr schmalwinkliger astronomischer Fernrohrzugrundeliegen, die gemeinsam ausgeglichen werden, hat die Blockausgleichung - allerdings unter anderem Namen - Eingang in die praktische Astrometrie gefunden. Jeder Block überdeckt bisher nur einen kleinen Teil des Himmels und ist in mehrere Paßpunktsterne eingehängt. Allerdings wird schon in der ersten Arbeit zu diesem Thema [12] auf die prinzipielle Möglichkeit hingewiesen, den gesamten Himmel mit Aufnahmen zu überdecken.

Der geschlossene astronomische Block liefert durch die Verwendung von nur wenigen, sehr sicher bestimmten Paßpunktsternen bzw. durch den völligen Verzicht auf Paßpunkte ein von den vorhandenen Katalogen unabhängiges System von Sternkoordinaten und bietet damit die Möglichkeit, die Kataloge zu überprüfen bzw. zu verbessern. Die Genauigkeit und die Sterndichte sind als praktisch konstant über den gesamten Himmel zu erwarten.

Aus den Genauigkeitsangaben für die zuvor genannten Sternkataloge kann nun gefolgert werden, daß der geschlossene Block eine mittlere Streuung von $0''2$ gewährleisten müßte, um mit den vorhandenen Katalogen konkurrieren zu können. Soll dagegen die Genauigkeit des FK 4 auch am Nordhimmel sicher erreicht werden, ist eine Positionsgenauigkeit von $0''05$ notwendig. Dank der zu erwartenden geringen Fehlerfortpflanzung selbst in Blöcken, die aus sehr vielen Einzelbündeln bestehen, dürften jedoch diese Genauigkeiten bei Verwendung entsprechend langbrennweitiger photogrammetrischer Aufnahmekammern bzw. astronomischer Fernrohre auch praktisch erreichbar sein. Es ist daher zu erwarten, daß diese Methode der Positionsbestimmung Sternkoordinaten ergibt, welche den heute an sie gestellten Anforderungen gerecht werden.

Geschlossene Blöcke haben in allerjüngster Zeit durch einen Aufsatz [13], in welchem eine Methode zur simultanen Triangulation und Ausgleichung der gesamten Mondoberfläche vorgestellt wird, Bedeutung erlangt. Der Autor kündigte darüberhinaus eine Anwendung auf die Sternkoordinatenbestimmung an.

2. Aufgabenstellung

Die vorliegende Arbeit untersucht die in der Einleitung vorgestellte Methode der astronomischen Positionsbestimmung durch photographische Aufnahmen und geschlossene Blockausgleichung in Bezug auf die erreichbare theoretische Sternkoordinaten-Genauigkeit und prüft die Möglichkeiten einer praktischen Anwendung. Für die einzelnen Bildbündel, die zusammen den gesamten Himmel überdecken, werden schematische Formen angenommen. Diese Vereinfachung erscheint für die theoretische Untersuchung als zulässig, da erwartet werden kann, daß die Genauigkeitsergebnisse durch eine Abweichung der Bildbündel von der schematischen Form praktisch nicht beeinflußt werden.

Der Hauptteil der Arbeit (Kapitel 4. bis 6.) gilt der Untersuchung der Fehlerfortpflanzung in solchen geschlossenen astronomischen Blöcken. Das Schwergewicht wird dabei auf die Erfassung des Einflusses des Bündelöffnungswinkels gelegt. Es soll damit die Erwartung bestätigt werden, daß die Fehlerfortpflanzung durch eine Verkleinerung des Aufnahmewinkels und eine daraus resultierende Erhöhung der Bündelanzahl nur in sehr geringem Ausmaß ungünstiger wird. Für mehrere, verschieden große Blöcke werden dazu die Gewichtskoeffizienten der ausgeglichenen Sternkoordinaten berechnet. Die notwendigen Inversionen der teilweise sehr großen Normalgleichungsmatrizen werden elektronisch durchgeführt. Darüberhinaus wird untersucht, in welchem Maße die Gewichtskoeffizienten der bestimmten Sternkoordinaten durch die folgenden Faktoren beeinflußt werden:

- Die Anzahl der Verknüpfungssterne, die pro Aufnahme in die Ausgleichung einbezogen werden.
- Die Form der einzelnen Bildbündel bei gleichem Öffnungswinkel.
- Die verschiedenen Funktionellen Modelle.

Schließlich sollen die Blöcke, die in einige wenige Paßpunkte eingehängt sind, in Bezug auf die Fehlerfortpflanzung solchen Blöcken gegenübergestellt werden, die durch Ansetzen von 3 Bedingungen zwischen den Sternkoordinaten einen völligen Verzicht auf Paßpunkte ermöglichen.

Im letzten Teil der Arbeit (Kapitel 8.) werden Annahmen über die Größe des mittleren Gewichtseinheitsfehlers getroffen. Aus diesen Werten für σ_0 und den berechneten Gewichtskoeffizienten der Sternkoordinaten wird sodann unter Zugrundelegung verschiedener Genauigkeitsforderungen die notwendige Größe praktischer Blöcke und der numerische Aufwand der Ausgleichung abgeschätzt. Es wird damit der grundsätzliche Nachweis erbracht, daß bei Verwendung entsprechend vieler, schmalwinkliger Einzelbündel die erreichbare Sternkoordinatengenauigkeit so interessant ist, daß sich die Positionsastonomie dieser Methode bedienen sollte. Einer praktischen Realisierung müßten natürlich weitere Untersuchungen vorangehen, auf die jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen werden soll.

3. Mathematische Grundlagen

Die theoretische Genauigkeitsuntersuchung unterstellt photographische Aufnahmen des gesamten Himmels, in denen die zu bestimmenden Sterne sichtbar sind. Ihre in Komparatoren meßbaren ebenen Bildkoordinaten werden als Beobachtungen aufgefaßt. Als Unbekannte treten die Orientierungsparameter der einzelnen Aufnahmen und die astronomischen Koordinaten der abgebildeten Sterne auf.

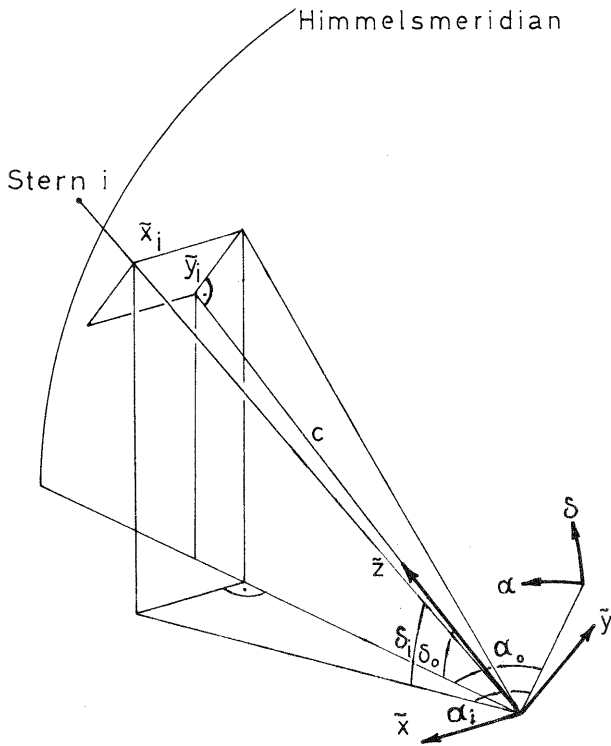
Zuerst werden die benötigten Koordinatensysteme und Freiheitsgrade der äußeren Orientierung definiert. Dann wird das gewählte stochastische Modell vorgestellt sowie die zugrundegelegten funktionalen Modelle. Anschließend werden die mathematischen Beziehungen zwischen den gegebenen und den gesuchten Größen abgeleitet, zuerst streng und dann in Form linearisierter Verbesserungsgleichungen.

3.1. Definition der Koordinatensysteme und der Freiheitsgrade für die äußere Orientierung

Als Sternkoordinatensystem wird das astronomische System von Rektaszension α und Deklination δ verwendet (Figur 1, Seite 10). Unter der Aufnahmeachse wird das Lot auf die Bildebene durch das Projektionszentrum verstanden, unter Bildhauptpunkt der Durchstoßpunkt der Aufnahmeachse mit der Bildebene und unter der Kammerkonstante c der Normalabstand zwischen Projektionszentrum und Bildebene.

Koordinatensysteme

(zu 3.1. Seite 9)

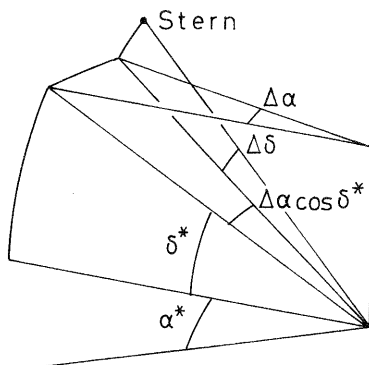


- α, δ astronomisches Koordinatensystem
- $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ festes räumlich-rechtwinkelig-kartesisches Bezugssystem
- c Kammerkonstante
- α_0, δ_0 astronomische Koordinaten der genähert bekannten Aufnahmerichtung
- α_i, δ_i astronomische Koordinaten des Sternes i
- \bar{x}_i, \bar{y}_i, c Koordinaten des Sternes i im System $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$

Figur 1

Näherungswerte und Sternkoordinaten-Korrekturen

(zu 3.3. Seite 15)



- α^*, δ^* Näherungswerte der Stern-Koordinaten
- $\Delta\alpha \cos\delta^*, \Delta\delta$ Korrekturen der Näherungswerte

Figur 2

Für jedes Aufnahmebündel werden zwei räumliche rechtwinklig kartesische Koordinatensysteme mit dem Projektionszentrum als Ursprung definiert. Das System \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} (Figur 1, Seite 10) wird fest gegenüber dem Sternkoordinatensystem angenommen. Die \tilde{z} -Achse fällt mit der Näherungsrichtung der Aufnahmeachse zusammen, deren Koordinaten α_0 und δ_0 bekannt vorausgesetzt werden. Die \tilde{y} -Achse liegt in der Himmelsmeridianebene. Am Nordhimmel weisen die Achsen $+\tilde{x}$ und $+\tilde{y}$ in die Richtungen $+\alpha$ und $+\delta$, am Südhimmel in die Richtungen $-\alpha$ und $-\delta$.

Der Bildhauptpunkt jeder Aufnahme wird bekannt angenommen. Die z-Achse des Bildkoordinatensystems x , y , z wird in die tatsächliche Aufnahmeachse gelegt. Von den Achsen $+x$ und $+y$ wird angenommen, daß sie annähernd in die Richtungen der Achsen $+\tilde{x}$ und $+\tilde{y}$ weisen. Die hauptpunktbezogenen Bildkoordinaten x_i , y_i des Sternes i werden durch Transformation der im Komparator gemessenen Koordinaten auf das System x , y gewonnen. Die z-Koordinaten aller abgebildeten Sterne sind gleich der bekannt angenommenen Kammerkonstante c .

Das Bildkoordinatensystem ist gegenüber dem System \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} um die Beträge ϕ , ω und κ verdreht. Für diese Freiheitsgrade der äußeren Orientierung wird definiert, daß $+\phi$ in Richtung $+x$, $+\omega$ in Richtung $+y$ und $+\kappa$ von der x - zur y -Achse dreht. Da die äußere Orientierung aber erst durch die Blockausgleichung bestimmt werden soll, wird das Bildkoordinatensystem vorerst mit dem System \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} zusammenfallen gelassen.

3.2. Verwendete Modelle

Von den einer Ausgleichung zugrundegelegten Modellen - Funktionalmodell und stochastisches Modell - wird gefordert, daß sie die gesuchten Parameter - hier die Sternkoordinaten - mit möglichst hoher Genauigkeit bestimmen.

Um diese Forderung in gewünschtem Maße zu erfüllen, können zwei Wege beschritten werden. Der eine Weg geht von einem Fehlermodell aus, das die zu erwartenden Genauigkeitseigenschaften der stochastischen Größen in bestimmtem Umfang berücksichtigt und begnügt sich mit einem relativ groben Funktionalmodell. Der andere Weg besteht darin, ein einfaches stochastisches Modell zu wählen und dessen Vernachlässigungen durch ein entsprechend komplizierteres funktionelles Modell zu kompensieren.

Der vorliegenden Genauigkeitsuntersuchung wird - wie in vergleichbaren Fällen fast immer - ein einfaches stochastisches Modell zugrundegelegt. Dieses faßt die Bildkoordinaten x_i, y_i der Sterne i als unkorrelierte Beobachtungen auf und definiert sie in Anbetracht der kleinen Bündelöffnungswinkel zusätzlich als gleich genau. Die verwendeten Paßpunkte werden als fehlerfrei angenommen.

Das funktionelle Modell wird variiert. Die einfachste Variante nimmt nur die Orientierungsparameter der einzelnen Aufnahmebündel - ϕ, ω und κ - und die Koordinaten der Verknüpfungsterne als unbekannt an. Als Alternativen zu diesem Modell, das sich in Kombination mit dem groben stochastischen Modell als zu wenig leistungsfähig erweisen könnte, werden sechs weitere funktionelle Modelle angenommen, die zusätzlich noch gewisse Korrekturen der Bildbündel ermöglichen. Sie bedienen sich hierfür jeweils einer Gruppe der unten aufgeführten Parameter, die als freie Unbekannte in die Ausgleichung eingeführt und mitbestimmt werden:

- eine Korrektur des Bündelöffnungswinkels, hier beschrieben als Maßstabsänderung m des Bildes bei fester Kammerkonstante
- eine affine Maßstabs-Korrektur m_a der Bildkoordinaten
- eine affine Scherungskorrektur κ_a der Bildkoordinaten
- zwei Bildverschiebungen Δx und Δy
- eine radiale quadratische Verzeichnungskorrektur r_v .

Die Wirkung dieser Korrekturen auf die Bildkoordinaten x, y wird in den Formeln (1) und (2), Seite 14, gezeigt werden.

Die Einführung einer Bündelöffnungs-Korrektur erscheint dann begründet, wenn die Kammerkonstante nicht hinreichend genau erfaßt werden kann. Die Korrekturen m_a und κ_a sind in der Lage, die entsprechenden Affin-Fehler der Aufnahmen und des Komparators zu kompensieren. Durch Δx und Δy kann eine Unsicherheit in der Erfassung des Bildhauptpunktes aufgefangen werden. Die Korrektur r_v erscheint angebracht, wenn Verzeichnung mit quadratischem Verlauf erwartet wird, deren Größe aber nicht bekannt ist und die somit nicht vorweg beseitigt werden kann.

Die sieben gewählten Funktional-Modelle sollen nun vorgestellt werden:

- Modell A : An jedem Bildbündel wird nur die äußere Orientierung zugelassen.
- Modell A + 1 : Zusätzlich zur äußeren Orientierung wird eine mehreren Aufnahmen gemeinsame Maßstabskorrektur ermöglicht.
- Modell A + 5 : Neben der äußeren Orientierung werden 5 mehreren Aufnahmen gemeinsame Bündelkorrektur-Parameter m , m_a , κ_a , Δx und Δy als unbekannt angenommen.
- Modell A + M : An jedem Bildbündel wird neben der äußeren Orientierung eine Maßstabskorrektur m zugelassen.
- Modell A + M + 4 : Zusätzlich zur äußeren Orientierung und einer Maßstabskorrektur an jedem Bündel werden 4 mehreren Aufnahmen gemeinsame Parameter m_a , κ_a , Δx und Δy bestimmt.
- Modell A + M + 5 : Außer den Korrekturen des Funktional-Modells A + M + 4 wird ein mehreren Aufnahmen gemeinsamer Verzeichnungsparameter r_v eingeführt.
- Modell A + I : Die äußere und die innere Orientierung (ohne Verzeichnungskorrektur) einer jeden Aufnahme wird als unbekannt angenommen. Es werden somit die Korrekturen m , Δx und Δy für jedes Bild bestimmt.

Die Einführung gleicher Korrektur-Parameter für mehrere Bilder beruht auf der Erwartung, daß sich die Aufnahmebedingungen mehrerer Bündel jeweils nur geringfügig unterscheiden und die entsprechenden Bündeldeformationen somit annähernd gleich sind. Wievielen Aufnahmen die Korrekturparameter der Funktionalmodelle A+1, A+5, A+M+4 und A+M+5 gemeinsam sind, wird in 5.1., Seite 39, angeführt.

Durch die oben eingeführten Parameter für die Korrektur der Bildbündel und die 3 Parameter für die äußere Orientierung werden die Bildkoordinaten x_i, y_i, z_i in die Koordinaten $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i$ übergeführt. Der mathematische Zusammenhang ergibt sich in linearisierter Form als:

$$\tilde{x}_i = x_i + \frac{c^2 + x_i^2}{c} \phi + \frac{x_i y_i}{c} \omega - y_i \kappa + x_i m + x_i \mu + y_i \kappa a + \Delta x + x_i \sqrt{x_i^2 + y_i^2} r v \quad (1)$$

$$\tilde{y}_i = y_i + \frac{x_i y_i}{c} \phi + \frac{c^2 + y_i^2}{c} \omega + x_i \kappa + y_i m - y_i \mu + x_i \kappa a + \Delta y + y_i \sqrt{x_i^2 + y_i^2} r v \quad (2)$$

$$\tilde{z}_i = z_i = c \quad (3)$$

3. Herleitung der linearisierten Verbesserungsgleichungen

Aus Figur 1, Seite 10, lassen sich die Transformationsformeln für die Überführung der astronomischen Koordinaten α_i, δ_i des Sternes i in die Koordinaten \tilde{x}_i, \tilde{y}_i streng ableiten.

$$\tan \bar{\delta}_i = \frac{\tan \delta_i}{\cos(\alpha_i - \alpha_0)}$$

$$\tilde{y}_i = c \tan(\bar{\delta}_i - \delta_0) = c \frac{\tan \bar{\delta}_i - \tan \delta_0}{1 + \tan \bar{\delta}_i \tan \delta_0}$$

$$\tilde{y}_i = c \frac{\tan \delta_i - \tan \delta_0 \cos(\alpha_i - \alpha_0)}{\cos(\alpha_i - \alpha_0) + \tan \delta_i \tan \delta_0} \quad (4)$$

$$\tilde{x}_i = (c \cos \delta_0 - \tilde{y}_i \sin \delta_0) \tan(\alpha_i - \alpha_0)$$

$$\tilde{x}_i = c \tan(\alpha_i - \alpha_0) \left(\cos \delta_0 - \sin \delta_0 \frac{\tan \delta_i - \tan \delta_0 \cos(\alpha_i - \alpha_0)}{\cos(\alpha_i - \alpha_0) + \tan \delta_i \tan \delta_0} \right) \quad (5)$$

Die hergeleiteten Beziehungen (1) bis (5) sind den Transformationsformeln äquivalent, die in der Astronomie Anwendung finden. Die ausgleichungstechnische Behandlung erfolgt nach Standardproblem II: Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen. Um die benötigten Verbesserungsgleichungen zu erhalten, werden die Koordinaten \tilde{x}_i, \tilde{y}_i nach den Formeln (1) und (2) in die Bildkoordinaten x_i, y_i übergeführt und die rechten Seiten der Formeln (4) und (5) linearisiert. Dazu ist eine Aufspaltung der astronomischen Koordinaten α_i, δ_i in die bekannt angenommenen Näherungswerte α_i^*, δ_i^* und die zu bestimmenden Korrekturen $\Delta\alpha_i \cos \delta_i^*, \Delta\delta_i$ nötig (Figur 2, Seite 10).

$$\alpha_i = \alpha_i^* + \frac{(\Delta\alpha_i \cos \delta_i^*)}{\cos \delta_i^*} \quad (6)$$

$$\delta_i = \delta_i^* + \Delta\delta_i \quad (7)$$

Durch die Wahl von $\Delta\alpha \cos \delta$ statt $\Delta\alpha$ wirken beide Korrekturen über denselben Radius, und ihre Genauigkeiten sind daher in der gleichen Größenordnung zu erwarten.

Werden an den Beobachtungen x_i, y_i schließlich noch Verbesserungen v_{x_i}, v_{y_i} zugelassen, so ergeben sich die vollständigen Verbesserungsgleichungen in linearisierter Form als :

$$\begin{aligned} v_{x_i} = & c \tan(\alpha_i^* - \alpha_0) \left(\cos \delta_0 - \sin \delta_0 \frac{\tan \delta_i^* - \tan \delta_0 \cos(\alpha_i^* - \alpha_0)}{\cos(\alpha_i^* - \alpha_0) + \tan \delta_i^* \tan \delta_0} \right) - x_i \quad (8) \\ & + \frac{\sqrt{c^2 + x_i^2 + y_i^2} \left((c^2 + x_i^2 + y_i^2) \cos \delta_0 - y_i (c \sin \delta_0 + y_i \cos \delta_0) \right)}{c \sqrt{(c \cos \delta_0 - y_i \sin \delta_0)^2 + x_i^2}} \Delta\alpha_i \cos \delta_i^* \\ & - \frac{x_i \sin \delta_0 (c^2 + x_i^2 + y_i^2)}{c \sqrt{(c \cos \delta_0 - y_i \sin \delta_0)^2 + x_i^2}} \Delta\delta_i \\ & - \frac{c^2 + x_i^2}{c} \phi - \frac{x_i y_i}{c} \omega + y_i^k - x_i^m - x_i^m a - y_i^k a - \Delta x - x_i \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \quad rv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{y_i} = & c \frac{\tan \delta_i^* - \tan \delta_0 \cos(\alpha_i^* - \alpha_0)}{\cos(\alpha_i^* - \alpha_0) + \tan \delta_i^* \tan \delta_0} - y_i \\
& + \frac{x_i \sqrt{c^2 + x_i^2 + y_i^2} (c \sin \delta_0 + y_i \cos \delta_0)}{c \sqrt{(c \cos \delta_0 - y_i \sin \delta_0)^2 + x_i^2}} \Delta \alpha_i \cos \delta_i^* \\
& + \frac{(c^2 + x_i^2 + y_i^2)(c \cos \delta_0 - y_i \sin \delta_0)}{c \sqrt{(c \cos \delta_0 - y_i \sin \delta_0)^2 + x_i^2}} \Delta \delta_i \\
& - \frac{x_i y_i}{c} \phi - \frac{c^2 + y_i^2}{c} \omega - x_i \kappa - y_i m + y_i m a - x_i \kappa a - \Delta y - y_i \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \quad r v
\end{aligned} \tag{9}$$

Die Formeln versagen für $\delta^* = \pm 90^\circ$. In diesen singulären Punkten des astronomischen Koordinatensystems ist $\Delta \alpha_i \cos \delta_i$ nicht mehr definiert. Sie sind als Verknüpfungspunkte jedoch leicht vermeidbar. Die Näherungswerte α^* , δ^* für die Sternkoordinaten können direkt den vorhandenen Katalogen entnommen werden. Die Näherungswerte für die äußere Orientierung der Bildbündel α_0 , δ_0 sowie die Näherungsrichtung der x-Achse sind aus den mit den Bildkoordinaten korrespondierenden Näherungs-Sternkoordinaten berechenbar. Dadurch ergeben sich die Unbekannten so klein, daß eine einzige Ausgleichung schon zu endgültigen Ergebnissen führt.

In Matrizeschreibweise nehmen die Verbesserungsgleichungen die Gestalt

$$v = Ap - f \tag{10}$$

an, wobei v der Vektor der Verbesserungen v_{x_i} und v_{y_i} ,
 A die Matrix der Koeffizienten der Verbesserungsgleichungen,
 p der Vektor der unbekanntem Orientierungsparameter und Sternkoordinaten-Korrekturen und
 f der Absolutvektor ist.

Primäres Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Berechnung der Gewichtskoeffizientenmatrix G^{pp} der Unbekannten, die bei ver-

mittelnden Beobachtungen bekanntlich gleich der Inversen der Normalgleichungsmatrix N ist. Da die Bildkoordinaten als gleich genau und unkorreliert angenommen werden, ergibt sich somit:

$$N = A'A \quad (11)$$

$$G^{PP} = N^{-1} \quad (12)$$

4. Umfang und praktische Durchführung der fehlertheoretischen Studien

4.1. Übersicht der einzelnen Untersuchungen

4.1.1. Einfluß des Bündelöffnungswinkels

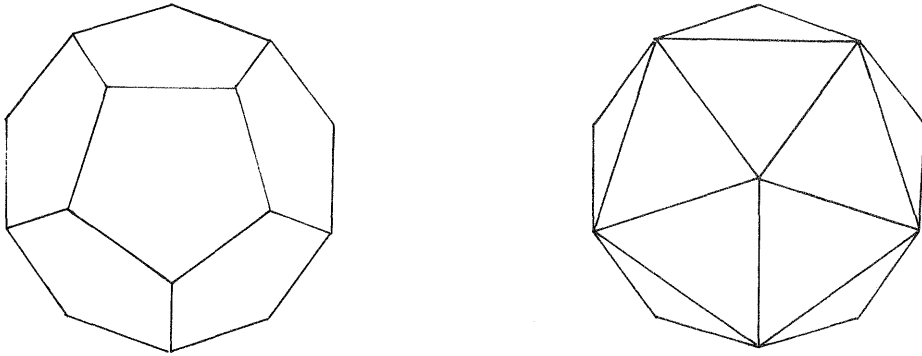
In diesem Hauptteil der Untersuchung werden vier schematische, verschieden große, geschlossene Blöcke behandelt, um die Genauigkeit der ausgeglichenen Sternkoordinaten in Abhängigkeit von der Aufnahmeanzahl verfolgen und extrapolieren zu können. Bei den beiden kleineren Blöcken sitzen die "Verknüpfungssterne" in den Ecken eines Würfels bzw. eines Dodekaeders (Figur 3, Seite 18) und die Aufnahmeachsen gehen durch die Polyederflächen-Mitteln hindurch.

Die Verknüpfungssterne des nächstgrößeren Blockes werden in den Ecken eines 32-Flächers angenommen, der aus dem Dodekaeder hervorgeht, indem in jede seiner 12 regelmäßigen 5-Eck-Flächen ein um $\pi/5$ verdrehtes regelmäßiges 5-Eck solcher Größe eingeschaltet wird, daß die freien Seiten je dreier 5-Ecke ein regelmäßiges 6-Eck aufspannen (Figur 4, Seite 18). Die Aufnahmeachsen gehen wieder durch die Flächenmitten hindurch. Die Anzahl der Bilder dieses Blockes ist somit gleich der Summe der Bildanzahl und der Anzahl der Verknüpfungssterne des Dodekaeders, also $12 + 20 = 32$.

Die 180 Verknüpfungssterne des größten behandelten Blockes werden in den Ecken eines 92-Flächers angenommen, dessen Ableitung aus dem 32-Flächer analog zu der des 32-Flächers aus dem Dodekaeder ist und in Figur 4, Seite 18, dargestellt wird.

Dodekaeder-Block , Ikosaeder-Block

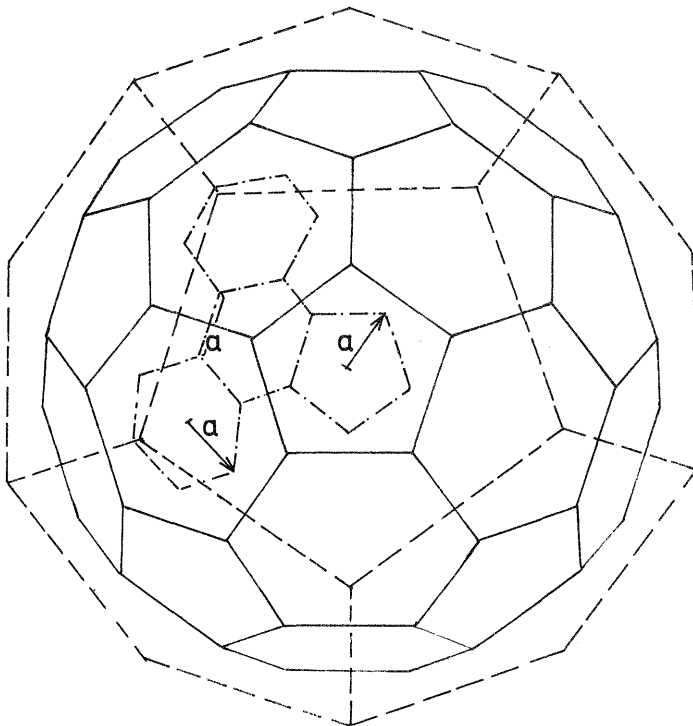
(zu 4.1.1. Seite 17 und 4.1.3. Seite 19)



Figur 3

Zusammenhang zwischen Dodekaeder-, 32-Flächen-und 92-Flächen-Block

(zu 4.1.1. Seite 17)



Figur 4

In Tabelle 1, Seite 20, sind diese 4 Blockformen zusammengestellt. Sie haben gemeinsam, daß jeder in einer Polyeder-Ecke sitzende Verknüpfungstern in 3 Aufnahmen abgebildet wird. Der Grund für die Wahl solcher schematischer Blöcke liegt darin, daß sie bei gleichem Bündelöffnungswinkel mit weniger Aufnahmen auskommen als Blöcke mit 4- oder mehrfach bestimmten Ecken-Sternen.

4.1.2. Einfluß der Anzahl der Verknüpfungsterne pro Aufnahme

Hier werden 2 Varianten untersucht :

Variante E : Nur die in den Ecken einer jeden Aufnahme abgebildeten Sterne werden in die Ausgleichung einbezogen.

Variante E+S : Die in den Bild-Ecken und -Seitenmitten abgebildeten Verknüpfungsterne werden behandelt.

Es soll festgestellt werden, wie hoch der Genauigkeitsgewinn der Variante E+S gegenüber dem Fall E ist.

4.1.3. Einfluß der Bündelform bei gleichem Öffnungswinkel

Den Dodekaeder-Blöcken wird eine Blockform gegenübergestellt, bei der die Verknüpfungsterne in den Ecken eines Ikosaeders (Figur 3, Seite 18; Tabelle 1, Seite 20) sitzen und die Aufnahmeachsen durch die Mitten der 20 gleichseitigen Dreiecke dieses Polyeders hindurchgehen. Während die Ecken-Verknüpfungsterne beim Dodekaeder-Block dreifach bestimmt sind, ist beim Isokaeder-Block jeder in 5 Aufnahmen abgebildet. Die beiden Blöcke sollen in Bezug auf die Fehlerfortpflanzung miteinander verglichen werden.

Daten der behandelten Blöcke

(zu 4.1.1. Seite 19
und 4.1.3. Seite 19)

	Anzahl und Form der Flächen	Anzahl der Ecken	max. Bündelwinkel
Würfel	6 Quadrate	8	ca. 110°
Dodekaeder	12 regelmässige 5-Ecke	20	ca. 75°
Ikosaeder	20 gleichseitige Dreiecke	12	ca. 75°
32 Flächen	12 regelmässige 5-Ecke und 20 regelmässige 6-Ecke	60	ca. 48°
92 Flächen	12 regelmässige 5-Ecke und 20 regelmässige 6-Ecke und 60 unregelmässige, aber untereinander gleiche, 6-Ecke	180	ca. 28°

Tabelle 1

4.1.4. Einfluß des funktionellen Modells

Ein Modell, das neben den Unbekannten für die äußere Orientierung der Aufnahmen noch freie Parameter enthält, die eine Kompensation entsprechender systematischer Fehler der Bildkoordinaten ermöglichen, ergibt grundsätzlich größere Gewichtskoeffizienten der ausgeglichenen Sternkoordinaten als das einfache Funktionalmodell ohne freie Parameter. Andererseits wird bei Vorhandensein solcher Koordinatenfehler mit dem erweiterten Modell ein kleinerer mittlerer Gewichtseinheitsfehler

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{v'v}{r}} \quad r = \text{Redundanz des Systems} \quad (13)$$

erzielt als mit dem einfachen Modell, das diese Fehler nicht eliminiert. Die Streuungen der Sternkoordinaten

$$\sigma_k = \frac{\sigma_0}{c} \sqrt{g_{kk}} \quad (14)$$

werden nur dann kleiner, wenn die systematischen Koordinatenfehler so groß sind, daß σ_0 um mehr abnimmt als $\sqrt{g_{kk}}$ anwächst. Nur wenn eine solche Genauigkeitssteigerung erwartet werden kann, ist eine Verallgemeinerung des Funktionalmodells zweckmäßig.

Es sei in diesem Zusammenhang noch festgestellt, daß sich bei Verwendung zu einfacher Modelle unrealistische Streuungen ergeben können; ein Gesichtspunkt, der in den obigen Überlegungen nicht berücksichtigt ist. Diesbezügliche Erfahrungen bei der photogrammetrischen Anwendung der Blockausgleichung lassen jedoch erwarten, daß die erhaltenen Streuungen hinreichend repräsentativ für die tatsächliche Genauigkeit sind.

Die vorliegende Untersuchung stellt sich primär zur Aufgabe, den Einfluß verschiedener, angenommener funktioneller Modelle auf die Gewichtskoeffizienten der Sternkoordinaten zu bestimmen. Die einzelnen Blöcke werden dazu mit den in 3.2., Seite 13, vorgestellten Modellen durchgerechnet. Da die Fehlereigenschaften der Bildkoordinaten zunächst nicht bekannt sind, kann im Rahmen dieser Arbeit nicht definitiv entschieden werden, welches Funktionalmodell das zweckmäßigste ist. Es besteht aber die Möglichkeit, aus der Größe der erhaltenen Gewichtskoeffizienten die zu erwartende Zweckmäßigkeit der einzelnen Modelle abzuschätzen (siehe 6.4., Seite 63 und 8.3., Seite 82).

4.1.5. Paßpunkte - keine Paßpunkte

Als Paßpunktsterne werden für den Würfel- und den Dodekaederblock 4, für den Ikosaeder- und den 32-Flächen-Block 6 und für den Block mit 92 Aufnahmen 10 Sterne, möglichst gleichmäßig über den Himmel verteilt, angenommen. Dieser Variante "mit Paßpunkten" wird eine Variante "ohne Paßpunkte" gegenübergestellt, bei der die einzelnen Blöcke frei gerechnet werden. Damit die Systeme geometrisch bestimmt und damit rechnerisch lösbar sind, ist es hier notwendig, drei beliebig wählbare unabhängige Bedingungen zwischen den gesuchten Parametern anzusetzen. Um annähernd gleich große Streuungen der einzelnen bestimmten Sternkoordinaten zu erhalten, wird für die drei Bedingungen definiert, daß die Summen der den Korrekturen $\Delta\alpha\cos\delta^*$ und $\Delta\delta$ entsprechenden Drehungen um 3 zueinander senkrechte Achsen = 0 sind. Als Achsen werden die 3 Richtungen $\alpha = 0$ und $\delta = 0$, $\alpha = \pi/2$ und $\delta = 0$, $\alpha =$ beliebig und $\delta = \pi/2$ gewählt.

Bei der ausgleichungstechnischen Behandlung tritt in diesem Falle das Standardproblem III: Vermittelnde Beobachtungen mit abhängigen Parametern auf.

$$\begin{aligned} v &= A_p - f \\ B_p &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

B ist die dreizeilige Matrix der Bedingungen zwischen den Sternkoordinaten-Korrekturen.

Die Normalgleichungsmatrix N bekommt die Gestalt

$$N = \begin{bmatrix} A'A & B' \\ B & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

wobei $A'A$ singular ist. Die Matrix N ist damit nicht mehr positiv definit, wohl aber regulär.

Die Gewichtskoeffizientenmatrix G^{pp} der Parameter p ist eine Submatrix von N^{-1} .

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} G^{pp} & \dots \\ \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Die frei gerechneten Blöcke sollen den durch Paßpunkte gestützten Blöcken in Bezug auf die Fehlerfortpflanzung gegenübergestellt werden. Die Genauigkeit der Variante "ohne Paßpunkte" ist ein gutes Maß für die Leistungsfähigkeit des geschlossenen Blockes selbst. Ein solcher astronomischer Block ist von Paßpunktfehlern völlig unabhängig. Die ausgeglichenen Koordinaten sind zunächst noch nicht in das gewünschte Bezugssystem eingehängt. Ihre Eindrechung in dieses muß anschließend erfolgen.

4.1.6. Vergleich der Fehlerfortpflanzung in einem geschlossenen und in einem offenen Block

Um den Genauigkeitsgewinn durch die Geschlossenheit der Blöcke zumindest anhand eines Beispiels zu demonstrieren, wird der 32-Flächen (Figur 4, Seite 18) auch als offener Block behandelt. Anstelle der 32 Aufnahmen werden dabei nur die 16 Bilder des nördlichen Himmels verwendet.

4.1.7. Genauigkeit nachträglich bestimmter Sterne

Die in der Ausgleichung verwendeten Sterne bilden einen Rahmen, der aus den vorhandenen Aufnahmen und den Ausgleichungs-Ergebnissen nachträglich in gewünschtem Maße verdichtet werden kann. Die Koordinaten solcher nachträglich zu bestimmender Sterne können dabei aus ihren Bildkoordinaten und den von der Ausgleichung gelieferten Orientierungs- und Korrektur-Parametern ihrer Bildbündel berechnet werden.

Für die Ableitung der Formeln kann von den für solche Bildpunkte aufgestellten Verbesserungsgleichungen $v = Ap - f$ (10), Seite 16, ausgegangen werden. Bei Aufgliederung der Matrix A in

zwei Submatrizen A_1 und A_2 für die Koordinaten (k) und die Orientierungs- bzw. Korrektur-Parameter (o) ergibt sich

$$v = A_1 k + A_2 o - f = A_1 k - s \quad (18)$$

mit

$$s = f - A_2 o \quad (19)$$

Die Normalgleichungs- und die Gewichtskoeffizienten-Matrix der nachträglich bestimmten Sternkoordinaten bekommen damit die Gestalt

$$N = A_1' (G^{ss})^{-1} A_1 \quad (20)$$

$$G^{kk} = N^{-1} \quad (21)$$

Die Gewichtskoeffizientenmatrix G^{ss} ergibt sich durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf die Formel (19). Eine Korrelation zwischen den Vektoren f und o wird nicht angenommen. G^{ff} ist mit der Gewichtskoeffizientenmatrix G^{bb} der Bildkoordinaten identisch.

$$G^{ss} = G^{bb} + A_2 G^{oo} A_2' \quad (22)$$

4.1.8. Übersicht der behandelten Blöcke

Zur Durchführung der in 4.1.1. bis 4.1.6. umrissenen einzelnen Untersuchungen werden die in den Tabellen 2 bis 5, Seite 37 und 38 eingetragenen Blöcke durchgerechnet. Auf die in jenen beiden Tabellen enthaltenen Ergebnisse wird im Kapitel 5 eingegangen.

4.2. Bemerkungen zu den Berechnungen

Die Bearbeitung der einzelnen Blöcke begann mit der Aufstellung der einzelnen Submatrizen der Verbesserungsgleichungs-Matrix A (z. B. Figur 6, Seite 30), an die sich dann die Berechnung der

Submatrizen der Normalgleichungsmatrix N (z. B. Figur 7, Seite 31) anschloß, wobei die Multiplikationen mit Nullmatrizen aber nicht durchgeführt wurden. Auf einen direkten Aufbau der Normalgleichungsmatrizen verzichtete der Verfasser, da die Matrizen A viele voneinander verschiedene Koeffizienten enthalten, was an der Kugelform der Blöcke liegt. Die etwas größeren Rechenzeiten wurden somit einem höheren Programmieraufwand vorgezogen. Die anschließende Inversion erfolgte in den meisten Fällen unter Beschränkung auf die Berechnung jener Submatrix von N^{-1} , welche die Gewichtskoeffizienten der gesuchten Sternkoordinaten enthielten.

Die Normalgleichungsmatrizen der Blöcke bis zum 32-Flächen wurden getrennt nach Koordinaten-Korrekturen k und Orientierungs- bzw. Korrektur-Parametern o aufgebaut (siehe Figur 7, Seite 31).

$$N = \begin{bmatrix} N^{oo} & N^{ok} \\ N^{ko} & N^{kk} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Eine direkte Inversion von N war an der Anlage TR 4 möglich, solange die Anzahl der Parameter 127 nicht überschritt. Die gesuchte Gewichtskoeffizientenmatrix G^{kk} ergab sich in diesen Fällen als Submatrix von N^{-1} .

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} G^{oo} & G^{ok} \\ G^{ok} & G^{kk} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Bei mehr als 127 Parametern wurde die Submatrix G^{kk} der Inversen N^{-1} allein berechnet. Dabei wurde zuerst die reduzierte Normalgleichungsmatrix N_{Red} gebildet und dann diese invertiert.

$$\begin{array}{l}
 N^{ko} (N^{oo})^{-1} \mid N^{oo} \quad G^{ok} + N^{ok} \cdot G^{kk} = 0 \\
 N^{ko} \quad G^{ok} + N^{kk} \cdot G^{kk} = E \\
 \hline
 (N^{kk} - N^{ko} (N^{oo})^{-1} N^{ok}) G^{kk} = E \\
 N^{kk} - N^{ko} (N^{oo})^{-1} N^{ok} = N_{\text{Red}} \quad (25) \\
 G^{kk} = N_{\text{Red}}^{-1} \quad (26)
 \end{array}$$

Die elektronischen Berechnungen für die Blöcke bis einschließlich des 32-Flächers führte der Verfasser an der Telefunken-Anlage TR 4 des Recheninstituts der Universität Stuttgart selbst durch.

Die Verbesserungsgleichungs-Matrizen der 92-Flächen-Blöcke wurden als Bandmatrizen aus einzelnen Submatrizen aufgebaut (Figur 9, Seite 34). Die Berechnung der Normalgleichungs-Matrizen (Figur 12, Seite 34), die ebenfalls Bandstruktur aufwiesen, erfolgte an der Anlage Univac 1107 des Instituts für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen. Für die Inversionen dieser Bandmatrizen stand an demselben Institut ein sehr effektives Programm zur Verfügung, das eine Berechnung der vollen Inversen N^{-1} in etwa 20 Minuten ermöglichte. Herrn Professor Argyris, der diese elektronischen Rechnungen an seinem Institut ermöglichte, und den Herren Brönlund und Grieger, welche die Multiplikationen und Inversionen durchführten, möchte der Verfasser an dieser Stelle herzlich danken.

Der kleinste Block wies 48 Beobachtungen und 26 Parameter auf. Beim größten behandelten Block traten 1080 Bildkoordinaten und 646 Unbekannte auf.

Bei der Aufstellung der Verbesserungsgleichungs-Matrix A und der anschließenden Berechnung der Gewichtskoeffizienten-Matrix der ausgeglichenen Koordinaten-Korrekturen wurde die Kammerkonstante $c = 1$ gesetzt, wodurch sich die einzelnen Streuungen

$\sigma_{\Delta\alpha\cos\delta}$ und $\sigma_{\Delta\delta}$ aus den Gewichtungskoeffizienten

$g_{\Delta\alpha\cos\delta}$ $\Delta\alpha\cos\delta$ und $g_{\Delta\delta\Delta\delta}$ als

$$\sigma_{\Delta\alpha\cos\delta} = \frac{\sigma_0}{c} \sqrt{g_{\Delta\alpha\cos\delta} \Delta\alpha\cos\delta} \quad (27)$$

$$\sigma_{\Delta\delta} = \frac{\sigma_0}{c} \sqrt{g_{\Delta\delta\Delta\delta}} \quad (28)$$

ergeben.

Von eigentlichem Interesse sind aber nicht die Streuungen der Koordinaten-Korrekturen, sondern der Sternkoordinaten selbst. Die Streuung der Deklination σ_δ ergibt sich aus

$$\delta = \delta^* + \Delta\delta \quad (7) \text{ Seite 15,}$$

unmittelbar als

$$\sigma_\delta = \sigma_{\Delta\delta}, \quad (29)$$

da δ^* ja fehlerfrei ist.

Wenn die Streuung der Rektaszension in der, in der Astrometrie üblichen Form $\sigma_\alpha \cos\delta$ angegeben wird, besteht auch hier der einfache Zusammenhang:

$$\alpha = \alpha^* + \frac{(\Delta\alpha \cos \delta^*)}{\cos \delta^*} \quad (6) \text{ Seite 15,}$$

$$\sigma_\alpha \cos \delta^* = \sigma_{\Delta\alpha \cos \delta^*} \quad (30)$$

Im weiteren Teil der Arbeit wird nur mehr von den Streuungen der Sternkoordinaten selbst $\sigma_\alpha \cos\delta$ und σ_δ - gesprochen werden.

4.3. Struktur der Verbesserungsgleichungs-Matrix und der Normalgleichungs-Matrix für zwei Fälle als Beispiele

4.3.1. Dodekaeder-Block ohne Paßpunkte

In Figur 5, Seite 29, sind die Stern- und Bildnummern für den Fall E+S (Verknüpfungsterne in den Bild-Ecken und -Seitenmitten) eingetragen.

Figur 6, Seite 30, stellt die Struktur der Verbesserungsgleichungs-Matrix, Figur 7, Seite 31, die der Normalgleichungs-Matrix der Variante A+M (äußere Orientierung und Maßstabskorrektur pro Aufnahmebündel) dar.

Die Struktur dieser Verbesserungsgleichungs-Matrix A (Figur 6) soll kurz erläutert werden:

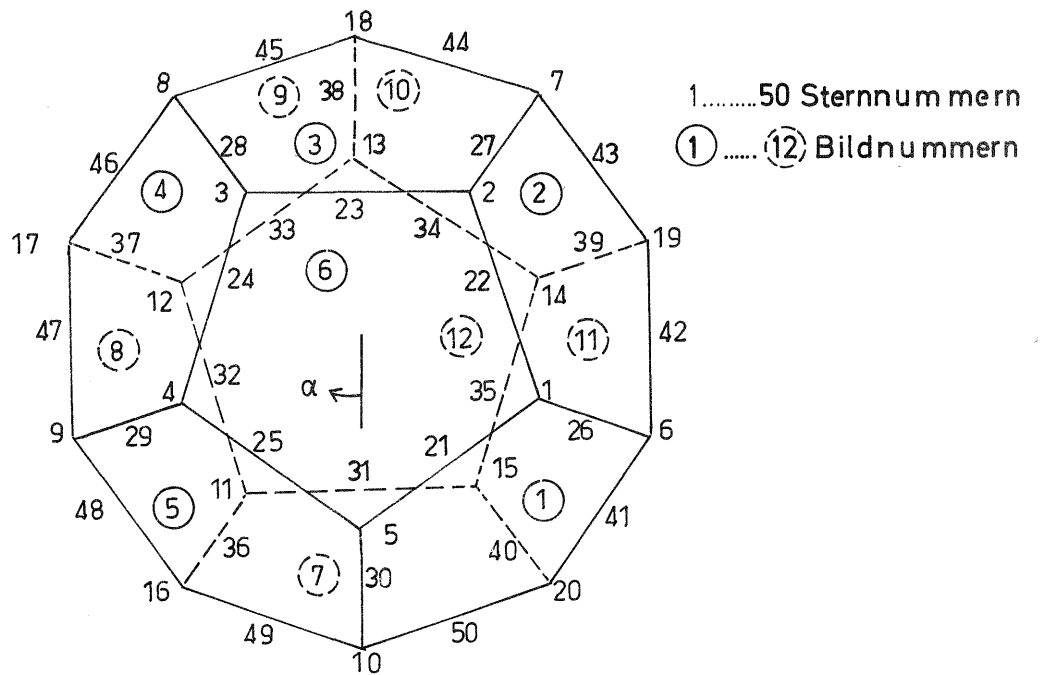
Die ersten 40 Spalten enthalten die Koeffizienten der Koordinaten-Korrekturen für die Ecken-Sterne 1 bis 20 (siehe Figur 5), die Spalten 41 bis 100 jene für die Seitenmitten-Sterne 21 bis 50 (Figur 5). In den Spalten 101 bis 148 sind die Koeffizienten für die Orientierungs- und Korrekturparameter ϕ , ω , κ und m eingetragen.

Die ersten 120 Zeilen behandeln die Verbesserungsgleichungen für die in den Aufnahmen 1 bis 12 abgebildeten Ecken-Sterne, die Zeilen 121 bis 240 jene für die Seitenmitten-Sterne.

In den ersten beiden Zeilen der Matrix A stehen die Koeffizienten der Verbesserungsgleichungen Formel (8) und (9), Seite 15 und 16, für den in der Aufnahme 1 abgebildeten Stern 5. Dementsprechend sind die Spalten für $\Delta\alpha_5 \cos \delta_5^*$, $\Delta\delta_5$ sowie für ϕ_1 , ω_1 , κ_1 und m_1 besetzt. In den Zeilen 3 und 4 sind die Koeffizienten für den ebenfalls in Aufnahme 1 abgebildeten Stern 1 eingetragen. Daher sind hier die Spalten für $\Delta\alpha_1 \cos \delta_1^*$, $\Delta\delta_5$ und wieder für ϕ_1 , ω_1 , κ_1 und m_1 besetzt.

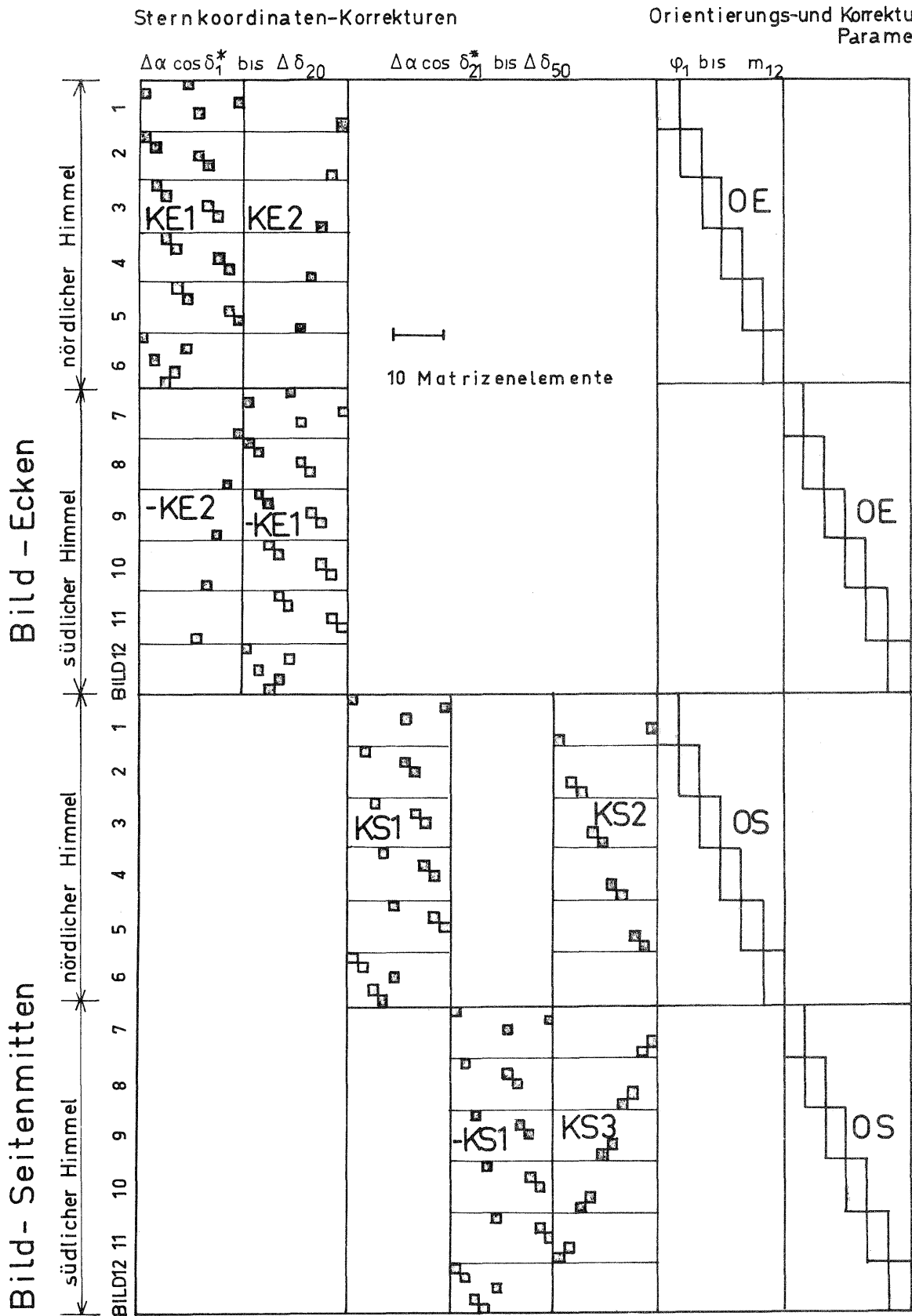
Schema der Numerierung: Dodekaeder ohne Passpunkte

(zu 4.3.1. Seite 28)



Figur 5

Struktur der Verbesserungsgleichungsmatrix zu Figur 5

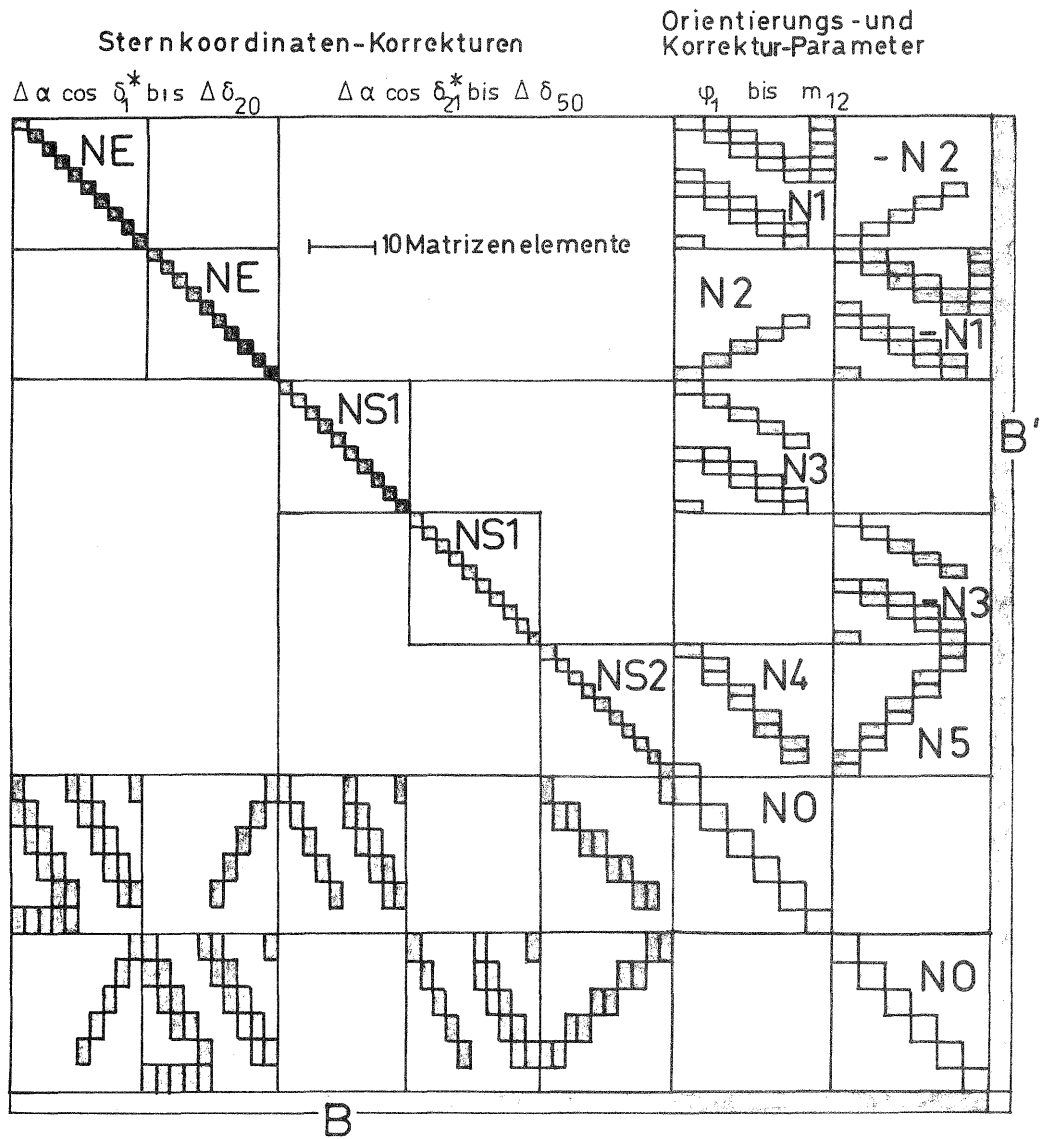


Figur 6

(zu 4.3.1. Seite 28)

Struktur der Normalgleichungsmatrix zu Figur 5

(zu 4.3.1. Seite 28)



Figur 7

Da jeder Stern in drei Aufnahmen abgebildet ist, beinhaltet jedes zu einem Stern gehörige Spaltenpaar drei 2×2 Matrizen, deren Koeffizienten von den Bildkoordinaten und von δ_0 abhängig sind, wie aus den Verbesserungsgleichungen, Formeln (8) und (9), Seite 15 und 16, ersichtlich ist.

Die Normalgleichungs-Matrix (Figur 7, Seite 31) besteht aus der Matrix $A'A$ mit der Größe 148×148 , den Bedingungsgleichungsmatrizen B und B' sowie einer 3×3 Nullmatrix (siehe Formel 16, Seite 22).

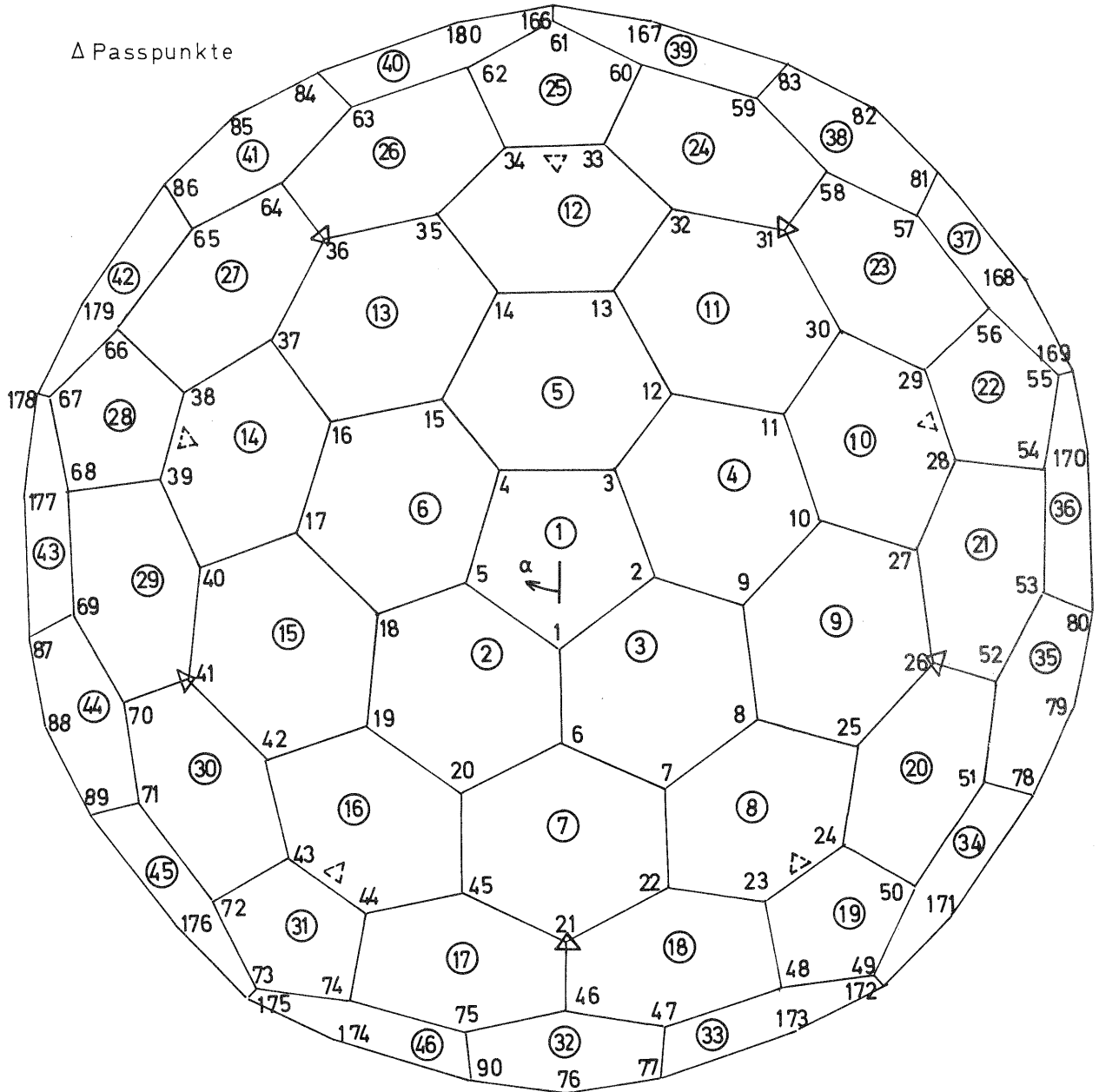
4.3.2. 92-Flächen-Block mit 10 Paßpunkten

Figur 8, Seite 33, gibt eine Übersicht der Stern- und Bildnummern für den Fall E (Verknüpfungssterne nur in den Bildecken). In Figur 9, Seite 34, ist die Verbesserungsgleichungs-Matrix der Variante A+5 (siehe 3.2., Seite 13) dargestellt. Die Submatrizen, in denen nur Koeffizienten der Koordinaten-Korrekturen vorkommen, sind mit K bezeichnet, jene, in denen nur Koeffizienten der Orientierungs- und Korrektur-Parameter vorkommen, mit O . Die Figuren 10 und 11, Seite 35, zeigen die Struktur der Submatrizen $K1$ und $O1$. Die Struktur der Normalgleichungs-Matrix, welche hier wegen des geringeren Inversionsaufwandes als Bandmatrix aufgebaut wurde, ist aus Figur 12, Seite 34, ersichtlich.

Auf die Darstellung der Matrizenstrukturen weiterer behandelte Blöcke wird verzichtet, da der Aufbau ganz analog erfolgte.

Numerierungs-Schema : 92-Flächen, 10 Passpunkte

(zu 4.3.2. Seite 32)

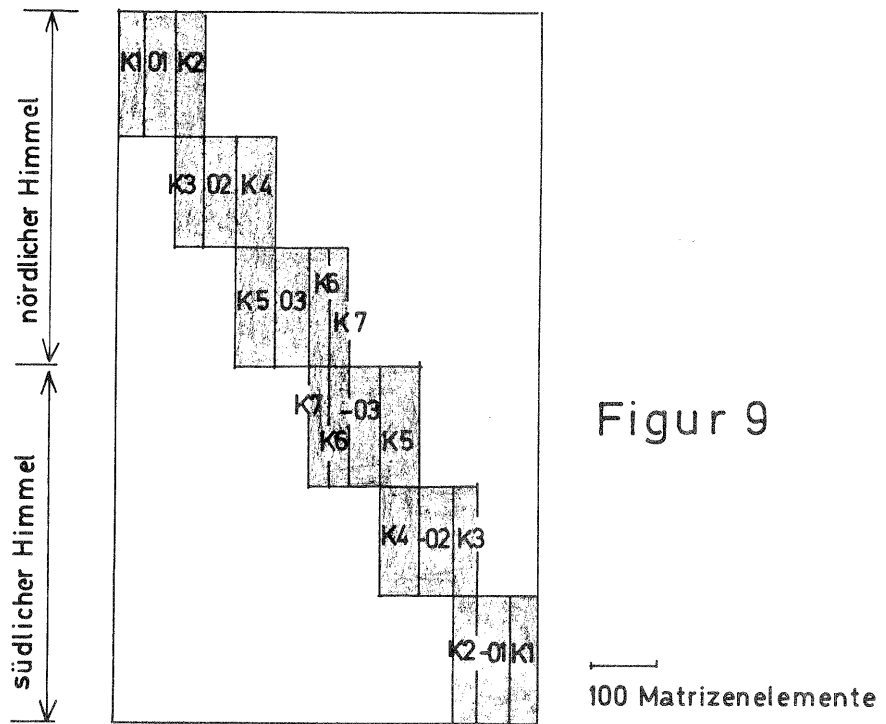


Figur 8

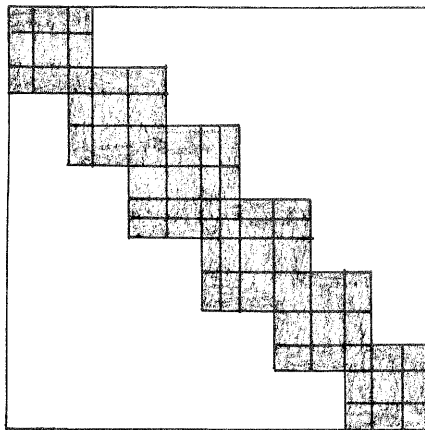
1 180 Sternnummern

① ④⑥ Bildnummern

Struktur der Verbesserungsgleichungs-
Matrix für den Block der Figur 8



Struktur der Normalgleichungs-
Matrix für den Block der Figur 8

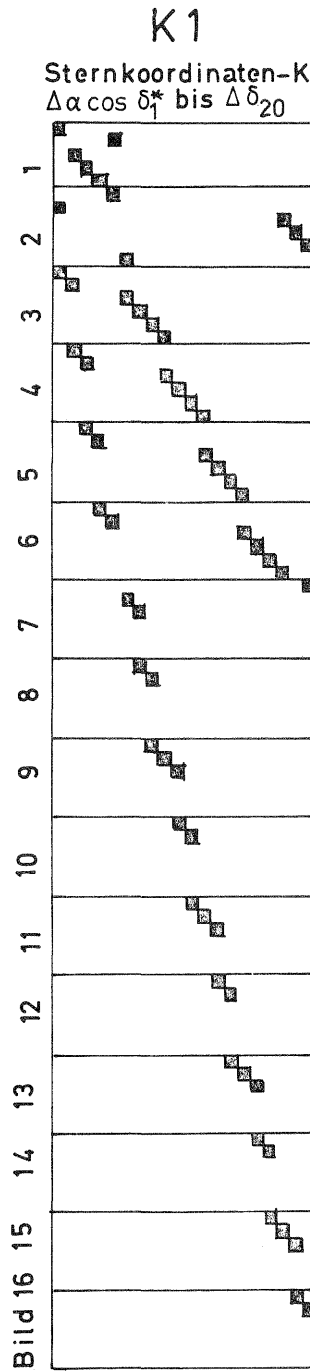


Figur 12

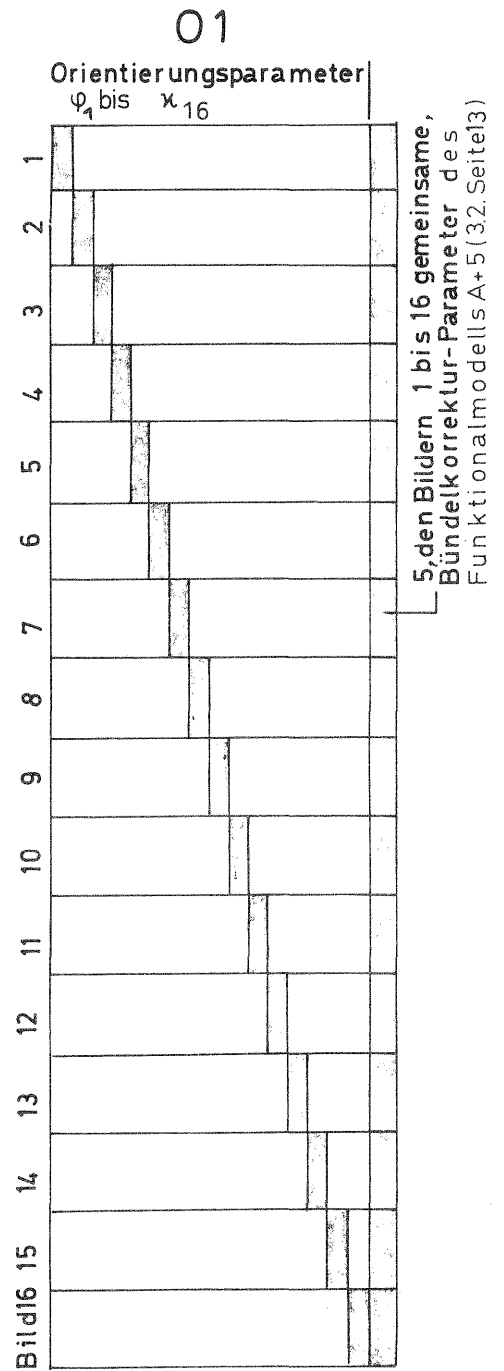
(zu 4.3.2. Seite 32)

Struktur der Submatrizen K1 und O1 in Figur 9

(zu 4.3.2. Seite 32)



Figur 10



Figur 11

5. Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse der gerechneten Blöcke

5.1. Übersicht der mittleren und maximalen Streuungen der Sternkoordinaten

In die Tabellen 2 bis 5, Seite 37 und 38, sind die gerechneten Blöcke und deren wichtigste Genauigkeits-Ergebnisse unter Zugrundelegung von $\sigma_0 = 1$ und $c = 1$ eingetragen. Zur Bedeutung der Abkürzungen siehe 3.2, Seite 13, und 4.1.2, Seite 19. Ausgewiesen sind jeweils die Streuungen σ_{mittel} , $\sigma_{p \text{ max}}$ und σ_{max} . Die tatsächlichen Streuungen ergeben sich aus diesen Werten durch Multiplikation mit σ_0/c . Die Streuung σ_{mittel} ist als

$$\sigma_{\text{mittel}} = \sqrt{\frac{\sigma' \sigma}{n}} \quad (31)$$

definiert, wobei n die Anzahl der ausgeglichenen Sternkoordinaten ist.

Unter der Streuung $\sigma_{p \text{ max}}$ wird der maximale Wert der Streuungen σ_p innerhalb des ganzen Blocks verstanden, wobei σ_p als

$$\sigma_p = \sqrt{(\sigma_{\Delta \alpha \cos \delta}^2 + \sigma_{\Delta \delta}^2)/2} \quad (32)$$

definiert ist. Die Streuung σ_p wurde eingeführt, um die Genauigkeit eines Sterns mit einer einzigen Angabe beschreiben zu können. Dies erscheint ausreichend, da sich $\sigma_{\Delta \alpha \cos \delta}^*$ und $\sigma_{\Delta \delta}$ nur geringfügig unterscheiden.

Wie der mittlere Punktlagefehler, der sich aus σ_p durch Multiplikation mit $\sqrt{2}$ ergibt, besitzt auch die Streuung σ_p den Vorteil der Unabhängigkeit vom Koordinatensystem.

Die Streuung σ_{max} ist die maximale Streuung aller $\sigma_{\Delta \alpha \cos \delta}^*$ und $\sigma_{\Delta \delta}$ innerhalb des ganzen Blocks.

Der Grund für die Singularität der Normalgleichungsmatrix N des Dodekaeder-Falles E, A+I ohne Paßpunkte in Tabelle 2, Seite 37, liegt darin, daß der Block durch geeignete Wahl der zugelassenen

$\sigma_0=1$ $c=1$	funkt. Modell	Würfel			Dodekaeder		
		σ_{mittel}	σ_{pmax}	σ_{max}	σ_{mittel}	σ_{pmax}	σ_{max}
E ohne Passpunkte	A	0.26	0.26	0.26	0.51	0.51	0.53
	A+1	0.26	0.26	0.26	0.51	0.51	0.53
	A+5	0.33	0.33	0.35	0.62	0.72	0.85
	A+M	0.42	0.42	0.42	0.77	0.78	0.79
	A+M+4	0.91	0.95	1.13	0.97	1.25	1.30
	A+I	N singular			N singular		
E 4 Passpunkte	A	0.37	0.37	0.37	0.57	0.58	0.59
	A+1	0.37	0.37	0.37	0.57	0.58	0.59
	A+5	0.38	0.38	0.38	0.61	0.65	0.73
	A+M	0.40	0.40	0.40	0.68	0.73	0.73
	A+M+4	0.44	0.45	0.46	0.76	0.82	0.87
	A+I	0.60	0.60	0.60	0.81	0.84	0.84
E+S 4 Passpunkte	A	0.34	0.34	0.34	0.54	0.55	0.56
	A+M	0.37	0.37	0.37	0.64	0.67	0.67
	A+M+5	0.41	0.41	0.41	0.70	0.77	0.80
	A+I	0.50	0.50	0.50	0.73	0.75	0.75

Tabelle 2

Mittlere und maximale Streuungen der Würfel-,Dodekaeder-und Ikosaeder-Blöcke

(zu 5.1.Seite 36)

Varianten E und E+S: siehe 4.1.2. Seite 19
funktionelle Modelle: siehe 3.2. Seite 13

$\sigma_0=1$ $c=1$	funkt. Modell	Ikosaeder		
		σ_{mittel}	σ_{pmax}	σ_{max}
E 6 Passpunkte	A	0.49	0.49	0.54
	A+1	0.49	0.49	0.54
	A+5	N singular		
	A+M	0.62	0.62	0.64
	A+M+4	N singular		
	A+I	N singular		
E+S 6 Passpunkte	A	0.47	0.47	0.51
	A+M	0.58	0.58	0.59
	A+M+5	0.70	0.75	0.75
	A+I	1.08	1.08	1.15

Tabelle 3

$\sigma_0 = 1$ $c = 1$	funkt. Modell	32 - Flächen		
		σ_{mittel}	σ_{pmax}	σ_{max}
E ohne Passpunkte	A	0.71	0.72	0.73
	A+1	0.79	0.85	0.97
	A+5	0.99	1.04	1.19
E 6 Pa sspunkte	A	0.74	0.76	0.77
	A+1	0.74	0.76	0.80
	A+5	0.81	0.89	1.00
halber Block 3 Pa sspunkte	A	0.94	1.15	1.18
	A+1	0.98	1.23	1.32
	A+5	1.12	1.33	1.49

Tabelle 4

Mittlere und maximale Streuungen
der 32-Flächen- und 92-Flächen-Blöcke

(zu 5.1. Seite 36)

$\sigma_0 = 1$ $c = 1$	funkt. Modell	92 - Flächen		
		σ_{mittel}	σ_{pmax}	σ_{max}
E 10 Pa sspunkte	A	0.82	0.86	0.87
	A+1	0.84	0.89	0.91
	A+5	1.25	1.73	1.77

Tabelle 5

Variante E: siehe 4.1.2. Seite 19

funktionelle Modelle: siehe 3.2.

Seite 13

Parameter, z. B. der Maßstabskorrekturen m und Bildverschiebungen Δy nicht nur auf eine Art, sondern auf unendlich viele Arten gebildet werden kann (Figur 13, Seite 40).

Das Auftreten singulärer Normalgleichungsmatrizen bei der Würfel-Variante E, A+I ohne Paßpunkte in Tabelle 2, Seite 37, und bei der Ikosaeder-Variante E, A+I mit 6 Paßpunkten in Tabelle 3, Seite 37 liegt darin, daß mehr Parameter gesucht werden, als Beobachtungen gegeben sind.

Die Ikosaeder-Fälle E, A+5 und E, A+M+4 in Tabelle 3, Seite 37, sind nicht eindeutig lösbar, weil sie pro Bild insgesamt 8 Transformationsparameter zulassen, obwohl nur 3 Punkte gegeben sind.

Die in den funktionellen Modellen A+1, A+5, A+M+4 und A+M+5 auftretenden zusätzlichen Korrektur-Parameter sind bei den regelmäßigen Polyedern allen Bündeln gemeinsam, beim 32-Flächen und 92-Flächen jeweils 15 bzw. 16-Aufnahme-Bündeln.

Da bei den regelmäßigen Polyedern eine allen Bildern gemeinsame Maßstabskorrektur die ausgeglichene Sternlage nicht verändert (Figur 14, Seite 40), sind die Streuungen der Fälle A und A+1 in den Tabellen 2 und 3 gleich groß.

Die in den Fällen E+S, A+M+5 (Tabellen 2 und 3) zugelassene Verzeichnungskorrektur wurde in den Varianten E, A+M+4 (Tabellen 2 und 3) nicht eingeführt, weil diese wegen der Regelmäßigkeit der Bilder in der Wirkung nicht von einer Maßstabskorrektur zu unterscheiden gewesen wäre.

5.2. Verteilung der Genauigkeit innerhalb der Blöcke

In den Figuren 15, Seite 43, bis 25, Seite 52, ist für die wichtigsten behandelten Blöcke die Genauigkeit der einzelnen Verknüpfungssysteme dargestellt. Auf Seite 41 werden alle Figuren gemeinsam erläutert.

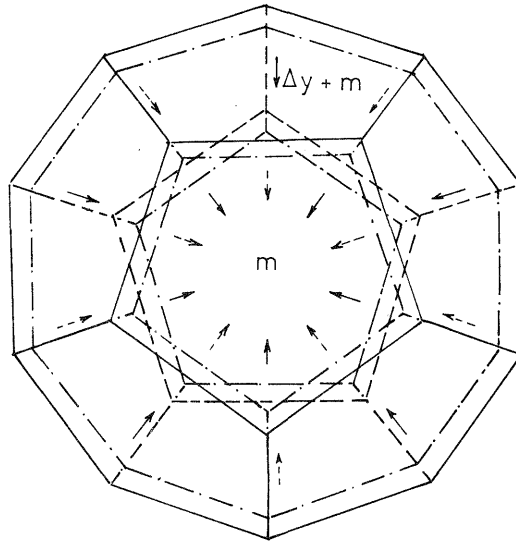
Der Grund für die asymmetrische Genauigkeitsverteilung der Variante A+5 ohne Paßpunkte in Figur 17, Seite 44, liegt darin, daß

Zur Singularität der freien Dodekaeder-Variante E, A+1

(zu 5.1. Seite 39)

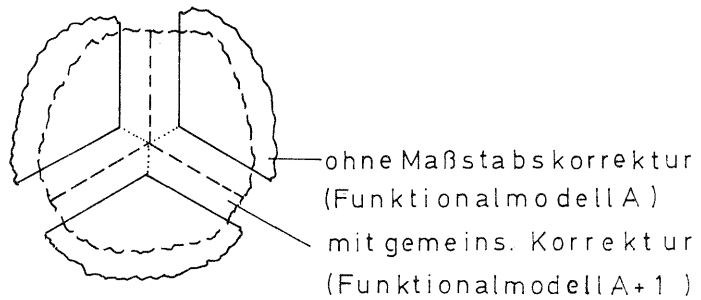
Variante E: siehe 4.1.2. Seite 19

funktionelles Modell A+1: siehe
3.2. Seite 13



Figur 13

Zur Gleichgenauigkeit der Funktional-Modelle A und A+1 bei regelmäßigen Einzelbildern



Figur 14

(zu 5.1. Seite 39)

beim Dodekaeder die Koordinatensysteme des obersten und des untersten Bildes gegenüber den Drehachsen für die Bedingungen verkantet waren. Beim 32-Flächer ohne Paßpunkte, Figur 20, Seite 47, war dies nicht der Fall.

Für den 32-Flächer und den 92-Flächer werden jeweils nur Genauigkeitsbilder des nördlichen Himmels geboten, da durch geeignete Paßpunktverteilung sowie Indizierung der Sterne und Bilder Gleichheit der Genauigkeitsbilder des nördlichen und des südlichen Himmels erreicht wurde.

Der 32-Flächer wurde auch als offener Block gerechnet. Die Ergebnisse sind am Ende der Tabelle 4, Seite 38, und in Figur 22, Seite 49, dargestellt.

Erläuterungen zu den Figuren 15, Seite 43, bis 25, Seite 52

Zur Darstellung gelangt die Verteilung der auf $\sigma_0 = 1$ und $c = 1$ bezogenen Streuung σ_p in den wichtigsten durchgerechneten Blöcken.

$$\sigma_p = \sqrt{(\sigma_{\Delta\alpha\cos\delta}^2 + \sigma_{\Delta\delta}^2)/2} \quad (32) \text{ Seite 36}$$

Die einzelnen ausgewiesenen Streuungen bedeuten:

- σ_{mittel} : quadratischer Mittelwert aller Streuungen $\sigma_{\Delta\alpha\cos\delta}^*$
- $\sigma_{p \text{ max}}$: maximaler Wert aller Streuungen σ_p | und $\sigma_{\Delta\delta}$
- σ_{max} : maximaler Wert aller Streuungen $\sigma_{\Delta\alpha\cos\delta}^*$ und $\sigma_{\Delta\delta}$

Allen dargestellten Blöcken ist die Variante E (Verknüpfungssterne nur in den Bild-Ecken) zugrundegelegt.

Unter A, A+1 und A+5 werden die folgenden funktionellen Modelle verstanden:

- A : Nur die äußere Orientierung eines jeden Aufnahmebündels wird zugelassen.
- A+1 : Zusätzlich zu den Parametern des Modells A wird eine mehreren Bildern gemeinsame Maßstabskorrektur ermöglicht.
- A+5 : Zusätzlich zu den Parametern des Modells A werden 5, mehreren Aufnahmen gemeinsame Parameter für eine Bündelkorrektur bestimmt (näheres siehe 3.2, Seite 13).

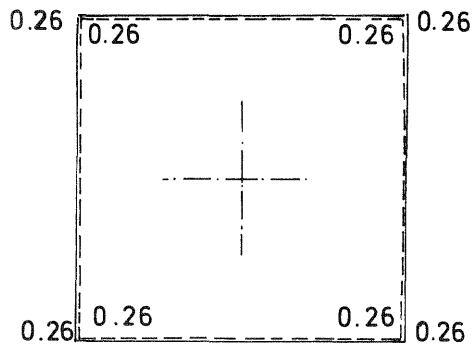
Die zusätzlichen Parameter der Modelle A+1 und A+5 sind bei den Würfel- und Dodekaeder-Blöcken allen, beim 32-Flächen und beim 92-Flächen 15 bzw. 16 Aufnahmen gemeinsam.

Der Himmelsnordpol befindet sich jeweils in Figur-Mitte. Die strichpunktierten Linien in den Figuren der Varianten "Ohne Paßpunkte" geben die Lage der in 4.1.5., Seite 22, definierten Drehachsen für die 3 Bedingungen zwischen den Koordinaten-Korrekturen an.

Würfel ohne Passpunkte

(zu 5.2. Seite 39)

Erläuterungen: siehe Seite 41/42

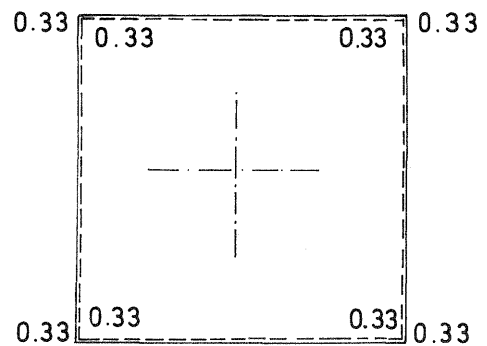


$$A = A + 1$$

$$\sigma_{\text{mittel}} = 0.26 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{p \text{ max}} = 0.26 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{\text{max}} = 0.26 \frac{\sigma_0}{c}$$



$$A + 5$$

$$\sigma_{\text{mittel}} = 0.33 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{p \text{ max}} = 0.33 \frac{\sigma_0}{c}$$

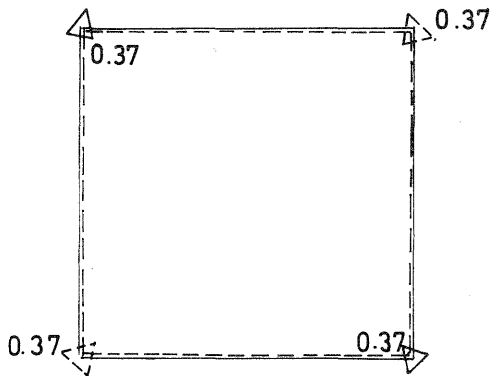
$$\sigma_{\text{max}} = 0.35 \frac{\sigma_0}{c}$$

Figur 15

Würfel, 4 Passpunkte

(zu 5.2. Seite 39)

Erläuterungen: siehe Seite 41/42

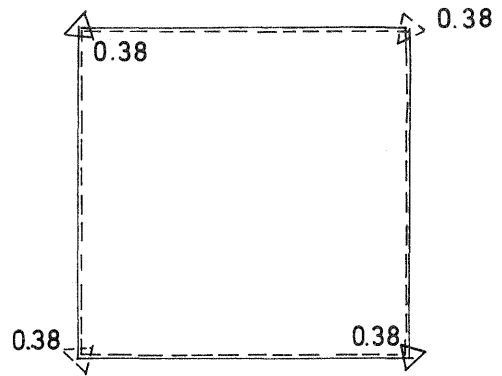


$$A = A + 1$$

$$\sigma_{\text{mittel}} = 0.37 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{p \text{ max}} = 0.37 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{\text{max}} = 0.37 \frac{\sigma_0}{c}$$



$$A + 5$$

$$\sigma_{\text{mittel}} = 0.38 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{p \text{ max}} = 0.38 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{\text{max}} = 0.38 \frac{\sigma_0}{c}$$

△ Passpunktsterne

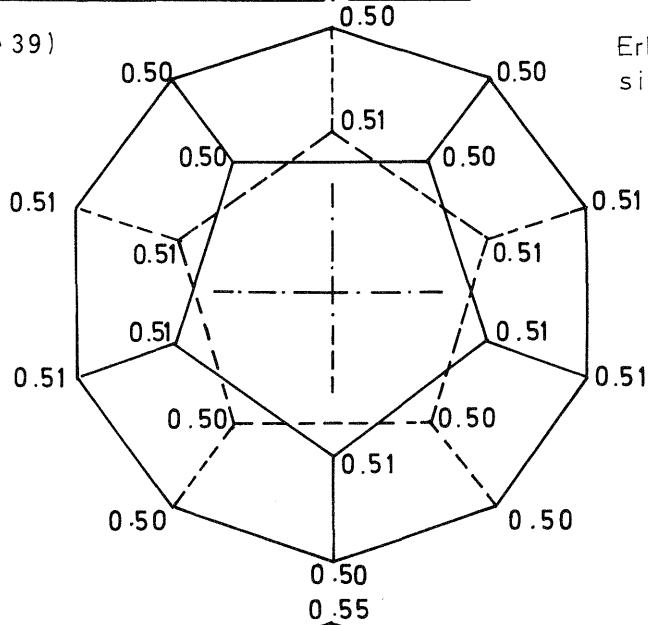
Figur 16

Dodekaeder ohne Passpunkte

(zu 5.2. Seite 39)

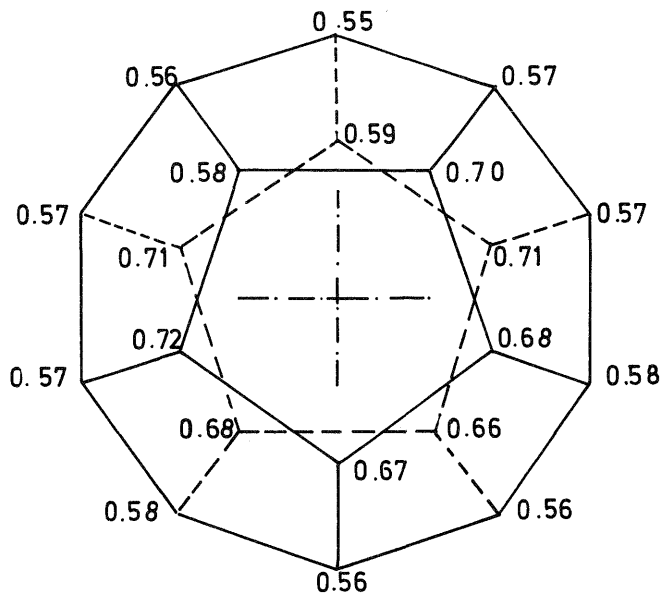
Erläuterungen: S. 41/42
siehe Seite

$A = A + 1$



$$\begin{aligned}\sigma_{\text{mittel}} &= 0.51 \frac{\sigma}{c|_0} \\ \sigma_{p \text{ max}} &= 0.51 \frac{\sigma}{c|_0} \\ \sigma_{\text{max}} &= 0.53 \frac{\sigma}{c|_0}\end{aligned}$$

$A + 5$



$$\begin{aligned}\sigma_{\text{mittel}} &= 0.62 \frac{\sigma}{c|_0} \\ \sigma_{p \text{ max}} &= 0.72 \frac{\sigma}{c|_0} \\ \sigma_{\text{max}} &= 0.85 \frac{\sigma}{c|_0}\end{aligned}$$

Figur 17

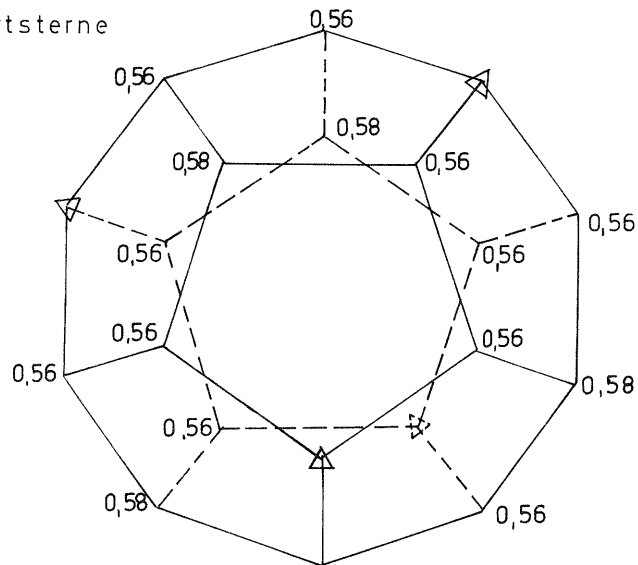
Dodekaeder , 4 Passpunkte

(zu 5.2. Seite 39)

Erläuterungen: siehe Seite 41/42

△ Passpunktsterne

A = A+1

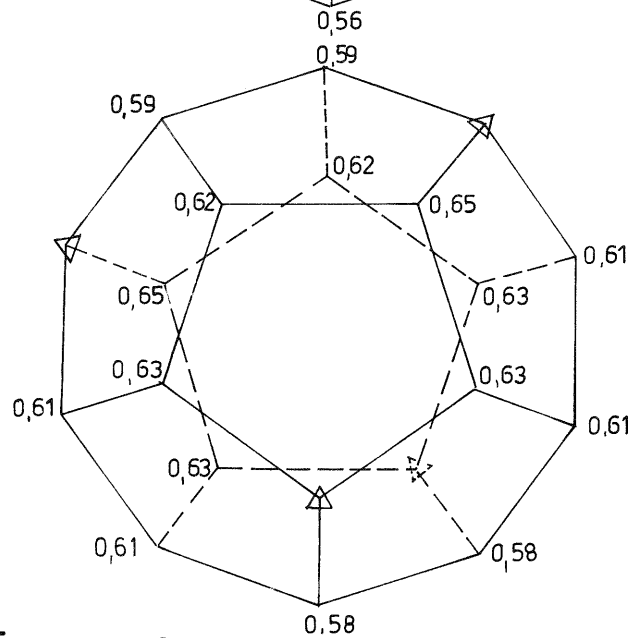


$$\sigma_{\text{mittel}} = 0,57 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{p \text{ max}} = 0,58 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{\text{max}} = 0,59 \frac{\sigma_0}{c}$$

A + 5



$$\sigma_{\text{mittel}} = 0,61 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{p \text{ max}} = 0,65 \frac{\sigma_0}{c}$$

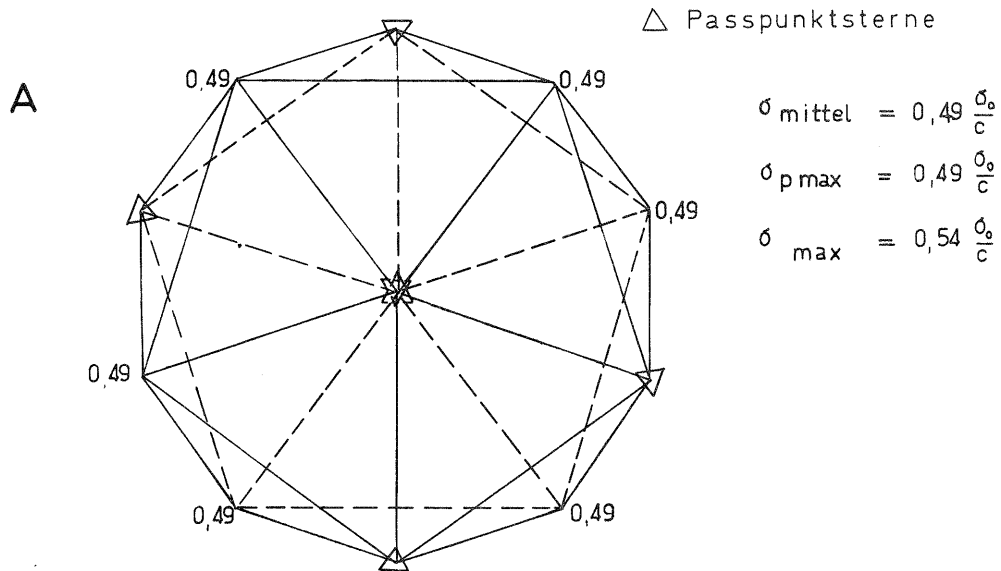
$$\sigma_{\text{max}} = 0,73 \frac{\sigma_0}{c}$$

Figur 18

Ikosaeder , 6 Passpunkte

(zu 5.2. Seite 39)

Erläuterungen: siehe Seite 41/42



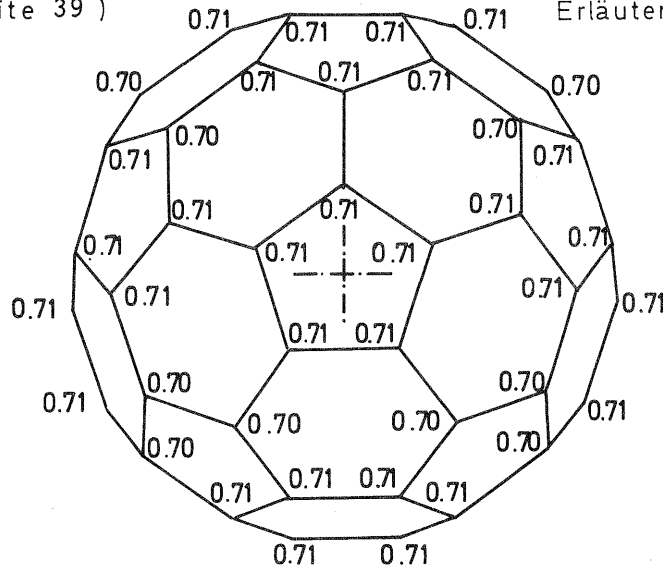
Figur 19

32-Flacher ohne Passpunkte

(zu 5.2. Seite 39)

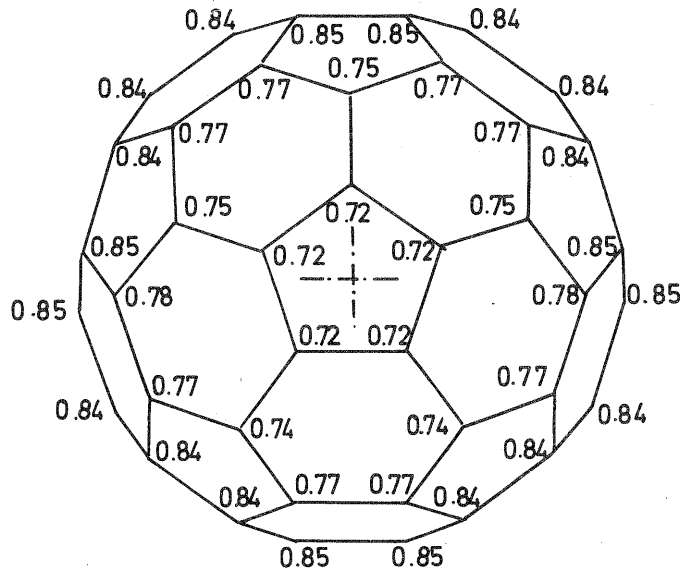
Erlauerungen: siehe Seite 41/42

A



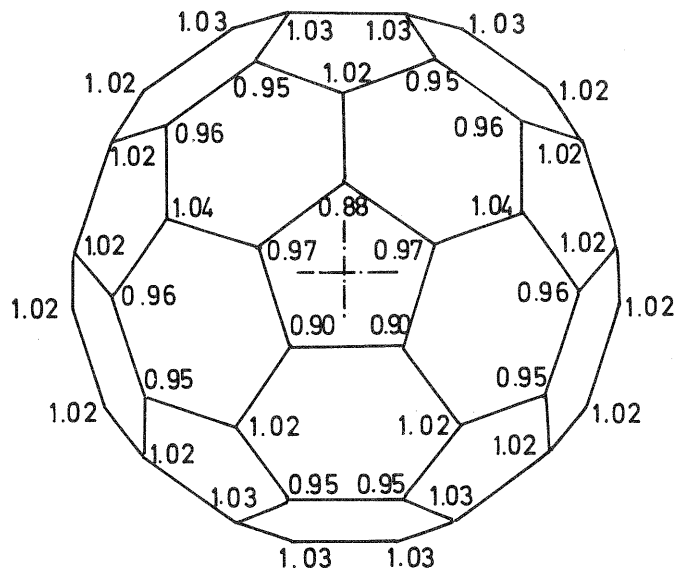
$$\begin{aligned} \sigma_{\text{mittel}} &= 0.71 \frac{\sigma_0}{c} \\ \sigma_{p \text{ max}} &= 0.71 \frac{\sigma_0}{c} \\ \sigma_{\text{max}} &= 0.73 \frac{\sigma_0}{c} \end{aligned}$$

A + 1



$$\begin{aligned} \sigma_{\text{mittel}} &= 0.79 \frac{\sigma_0}{c} \\ \sigma_{p \text{ max}} &= 0.85 \frac{\sigma_0}{c} \\ \sigma_{\text{max}} &= 0.97 \frac{\sigma_0}{c} \end{aligned}$$

A + 5



$$\begin{aligned} \sigma_{\text{mittel}} &= 0.99 \frac{\sigma_0}{c} \\ \sigma_{p \text{ max}} &= 1.04 \frac{\sigma_0}{c} \\ \sigma_{\text{max}} &= 1.19 \frac{\sigma_0}{c} \end{aligned}$$

Figur 20

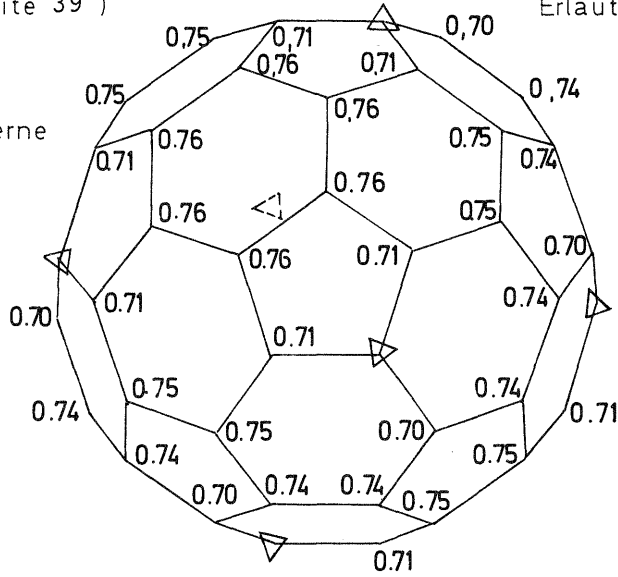
32-Flächen, 6 Passpunkte

(zu 5.2. Seite 39)

Erläuterungen: siehe Seite 41/4

△ Passpunktsterne

A

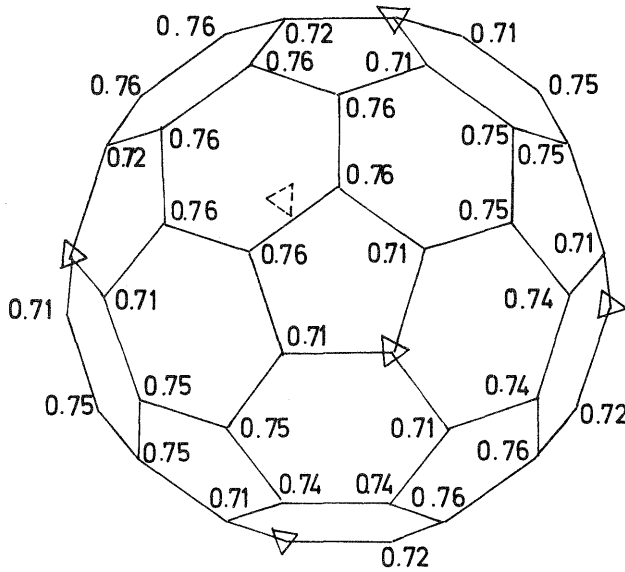


$$\sigma_{\text{mittel}} = 0.74 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{\text{p max}} = 0.76 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{\text{max}} = 0.77 \frac{\sigma_0}{c}$$

A+1

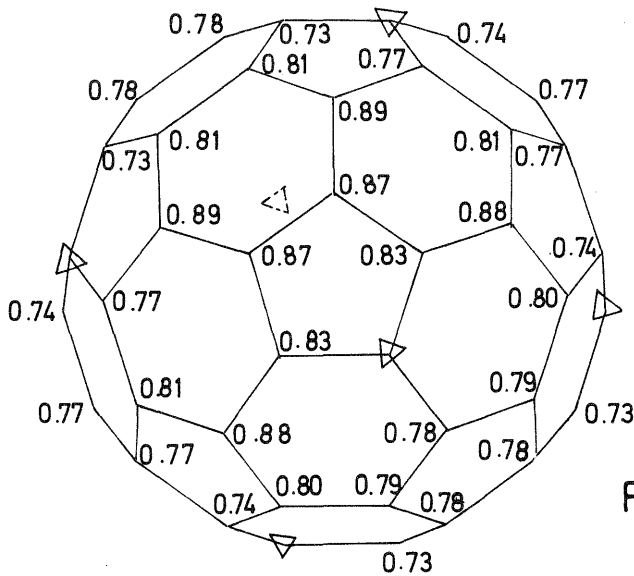


$$\sigma_{\text{mittel}} = 0.74 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{\text{p max}} = 0.76 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{\text{max}} = 0.80 \frac{\sigma_0}{c}$$

A+5



$$\sigma_{\text{mittel}} = 0.81 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{\text{p max}} = 0.89 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{\text{max}} = 1.00 \frac{\sigma_0}{c}$$

Figur 21

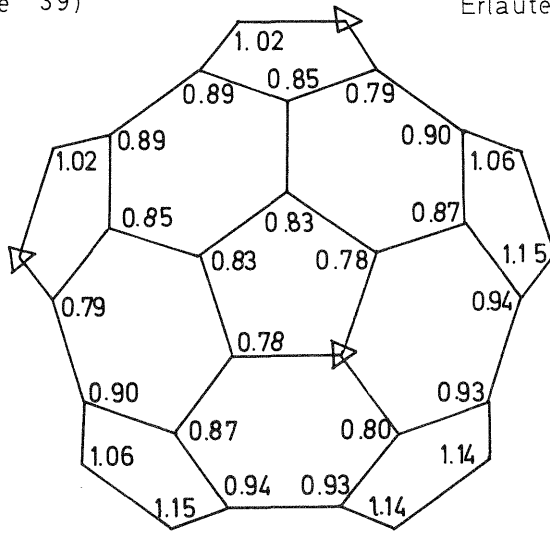
Halber 32-Flächen, 3 Passpunkte

(zu 5.2. Seite 39)

Erläuterungen: siehe Seite 41/42

△ Passpunktsterne

A

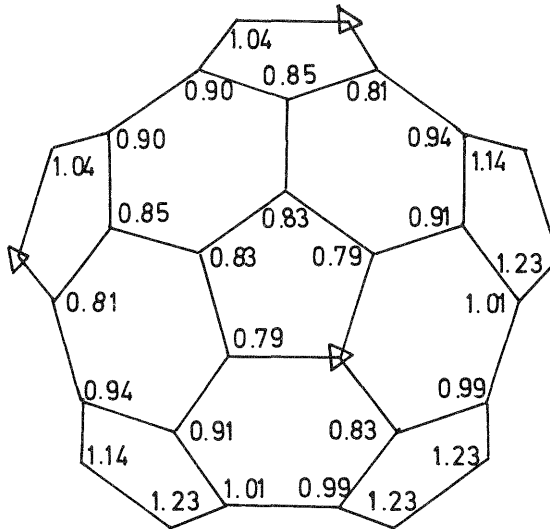


$$\sigma_{\text{mittel}} = 0.94 \frac{a}{c}$$

$$\sigma_{\text{pmax}} = 1.15 \frac{a}{c}$$

$$\sigma_{\text{max}} = 1.18 \frac{a}{c}$$

A + 1

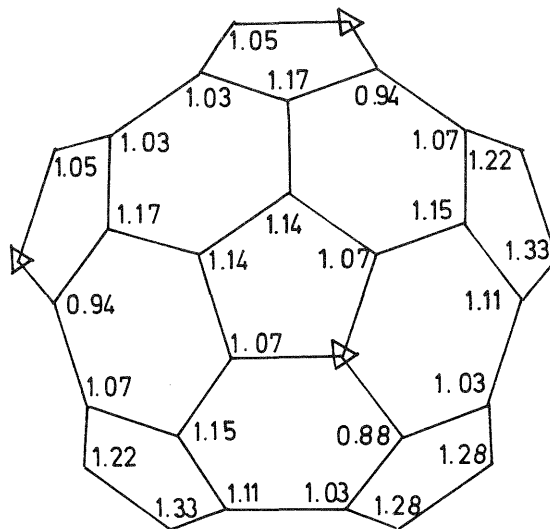


$$\sigma_{\text{mittel}} = 0.98 \frac{a}{c}$$

$$\sigma_{\text{pmax}} = 1.23 \frac{a}{c}$$

$$\sigma_{\text{max}} = 1.31 \frac{a}{c}$$

A + 5



$$\sigma_{\text{mittel}} = 1.12 \frac{a}{c}$$

$$\sigma_{\text{pmax}} = 1.33 \frac{a}{c}$$

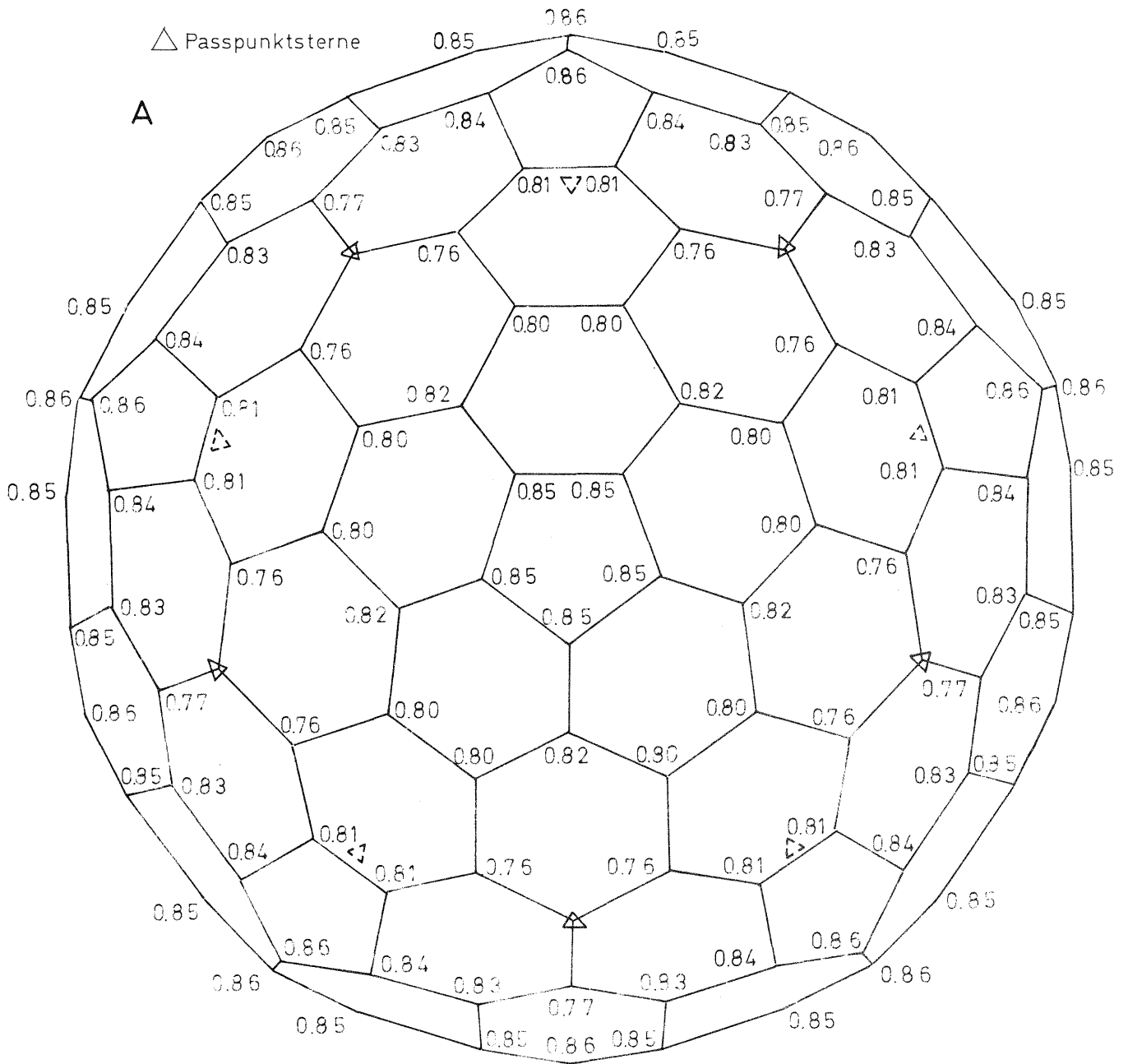
$$\sigma_{\text{max}} = 1.49 \frac{a}{c}$$

Figur 22

92-Flächen, 10 Passpunkte

(zu 5.2. Seite 39)

Erläuterungen: siehe Seite 41/42



Figur 23

$$\sigma_{\text{mittel}} = 0.82 \frac{Q_0}{c}$$

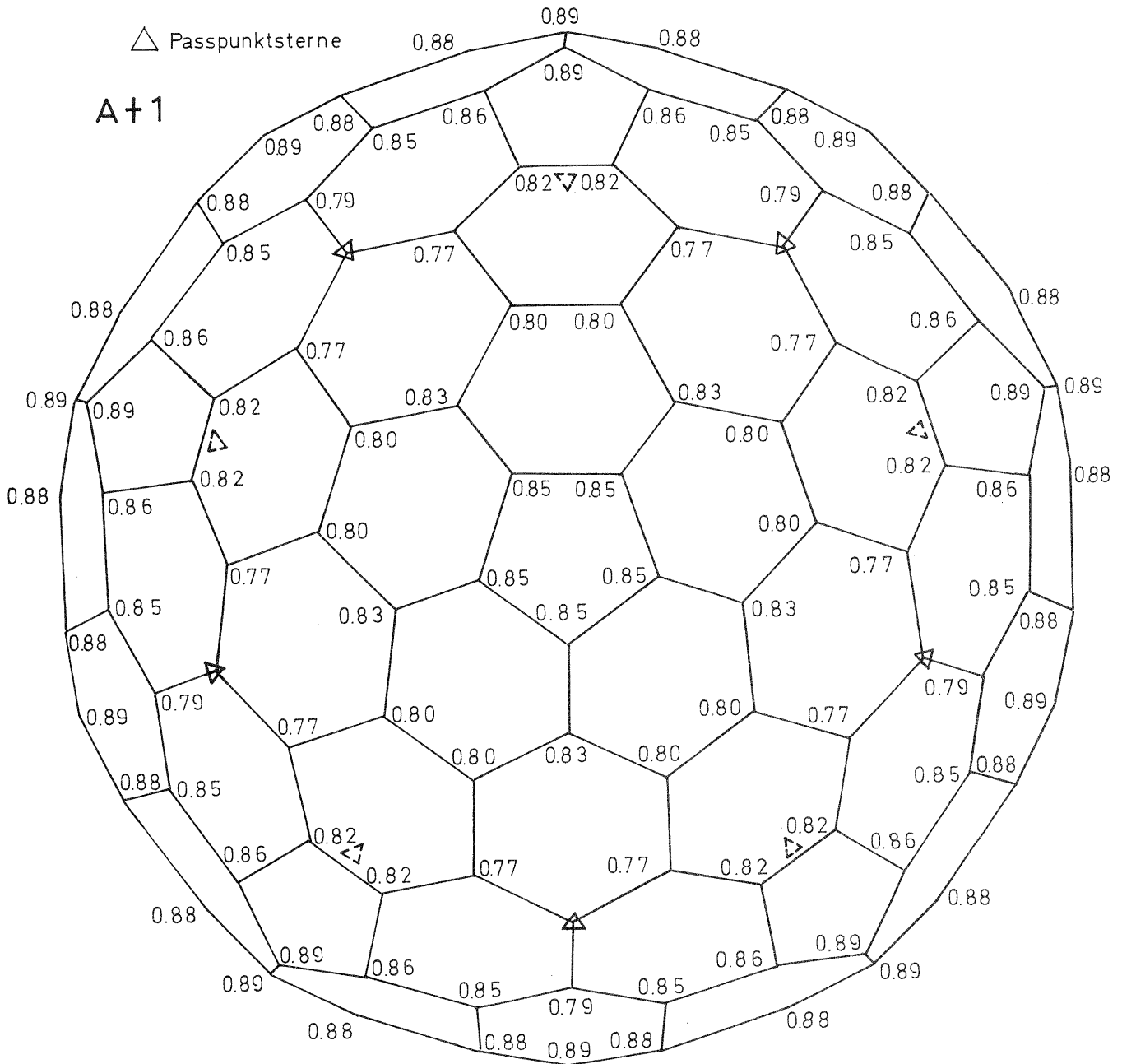
$$\sigma_{\text{p max}} = 0.86 \frac{Q_0}{c}$$

$$\sigma_{\text{max}} = 0.87 \frac{Q_0}{c}$$

92-Flächen, 10 Passpunkte

(zu 5.2. Seite 39)

Erläuterungen: siehe Seite 41/42



Figur 24

$$\sigma_{\text{mittel}} = 0.84 \frac{G_0}{c}$$

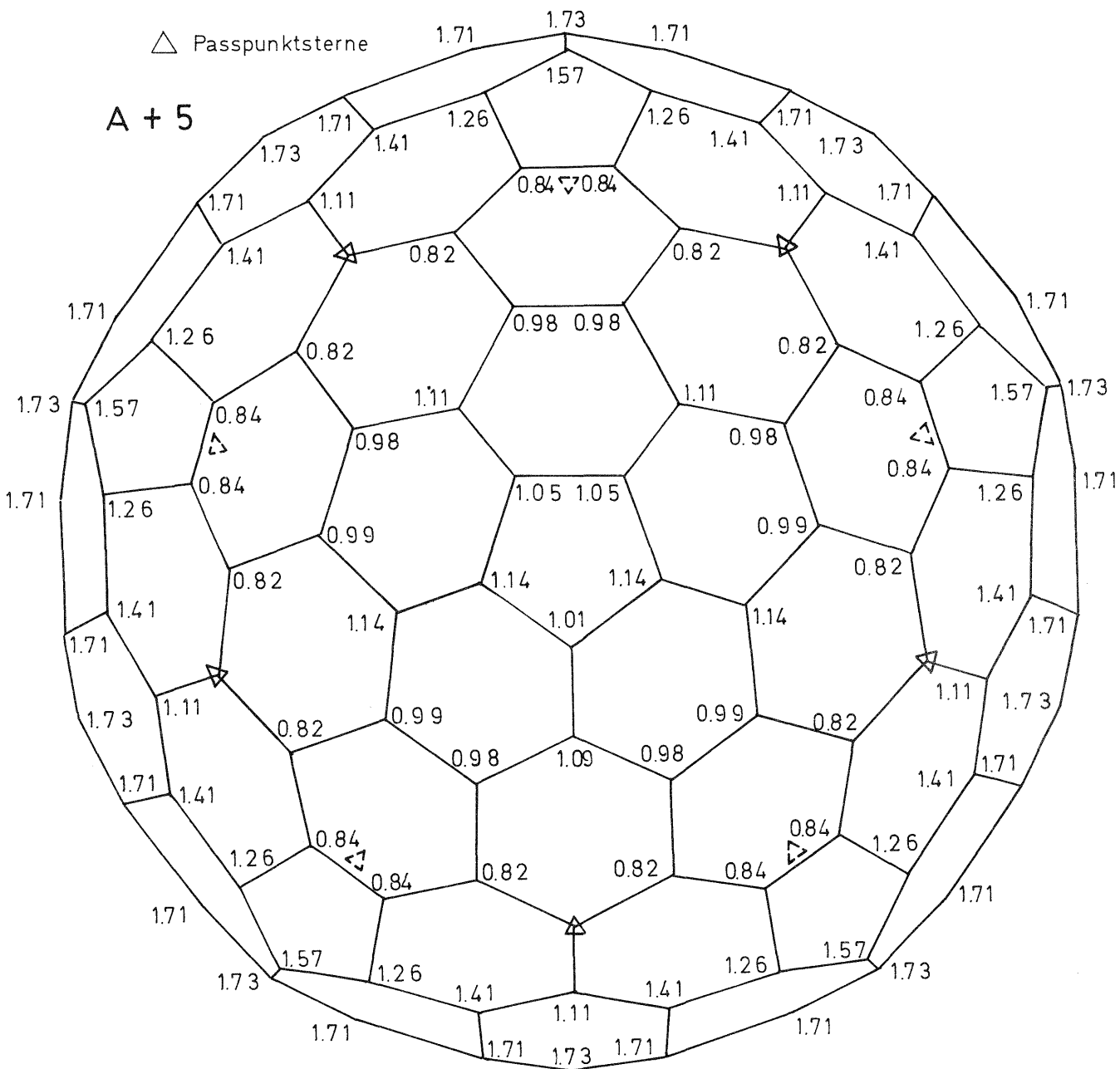
$$\sigma_{\text{pmax}} = 0.89 \frac{G_0}{c}$$

$$\sigma_{\text{max}} = 0.91 \frac{G_0}{c}$$

92-Flächen, 10 Passpunkte

(zu 5.2. Seite 39)

Erläuterungen: siehe Seite 41/42



Figur 25

$$\sigma_{\text{mittel}} = 1.25 \frac{\sigma_0}{c}$$
$$\sigma_{\text{p max}} = 1.73 \frac{\sigma_0}{c}$$
$$\sigma_{\text{max}} = 1.77 \frac{\sigma_0}{c}$$

6. Ergebnisse der einzelnen Untersuchungen und Diskussion

Anhand der in den Tabellen 2 bis 5 (Seite 37 und 38) ausgewiesenen Streuungen σ_{mittel} , $\sigma_{p \text{ max}}$ und σ_{max} für die einzelnen gerechneten Blöcke sollen in 6.1. bis 6.7. zunächst jene Untersuchungen durchgeführt und diskutiert werden, die in 4.1.1. bis 4.1.7. Seite 17 ff., umrissen sind. Anschließend werden in 6.8., Seite 70, die für die astronomischen Blöcke erhaltenen Genauigkeiten mit denen des Anblock-Verfahrens verglichen.

6.1. Gegenüberstellung der verschiedenen großen Blöcke

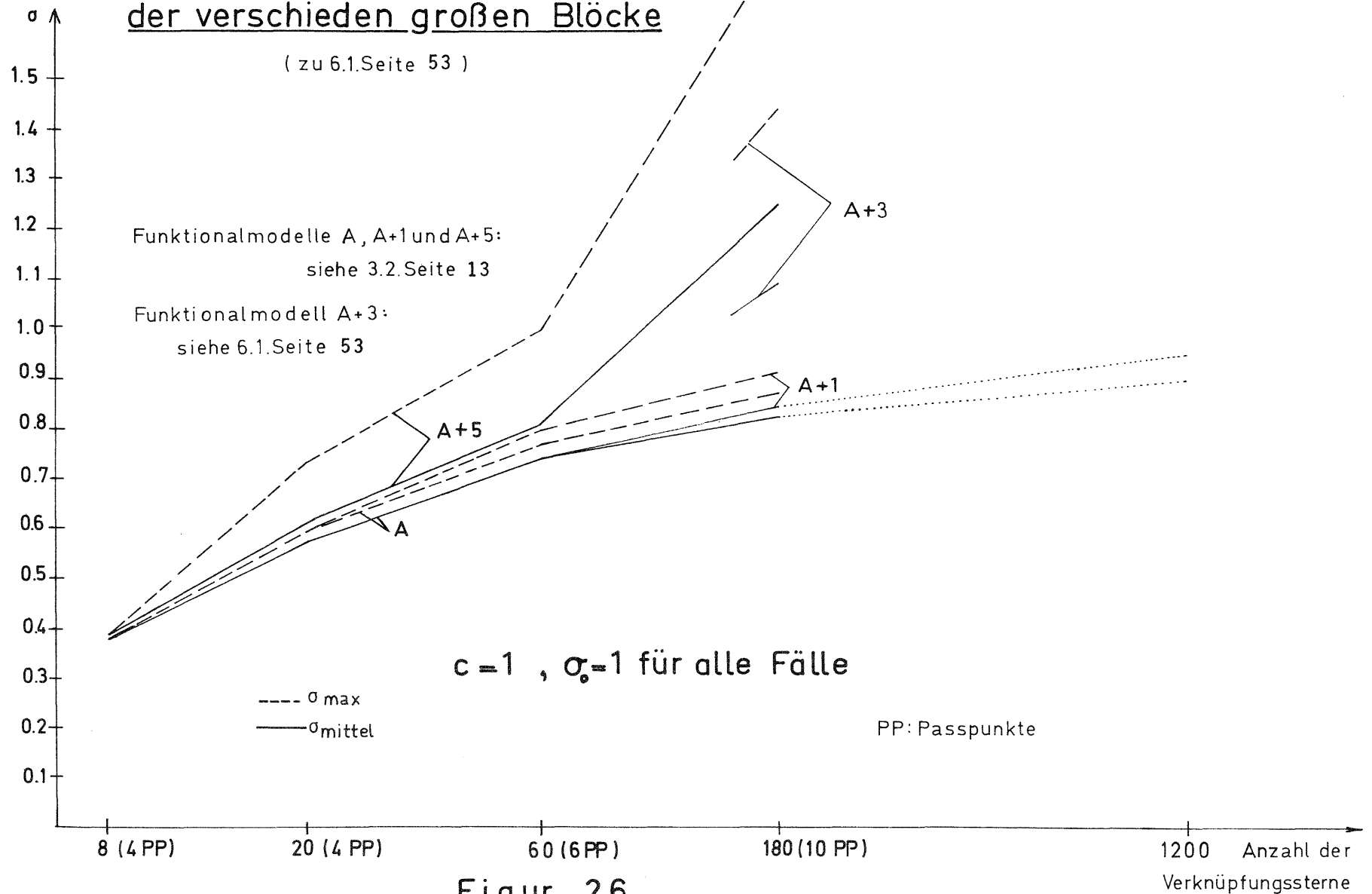
Die Blockformen Würfel, Dodekaeder, 32-Flächen und 92-Flächen wurden in der Variante E (Verknüpfungsterne nur in den Bildecken) mit den Funktional-Modellen A, A+1 und A+5 (siehe 3.2, Seite 13) mit 4 bzw. 6 bzw. 10 Paßpunkten, annähernd gleichmäßig verteilt, durchgerechnet. Die entsprechenden, auf $\sigma_0 = 1$ und $c = 1$ bezogenen Streuungen σ_{mittel} und σ_{max} aus den Tabellen 2, 4 und 5, Seite 37 und 38, sind in Figur 26, Seite 54, graphisch dargestellt. Als Maß der jeweiligen Blockgröße wurde die Anzahl der Ecken-Sterne gewählt und auf der Abszisse in logarithmischem Maßstab aufgetragen.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß diese Streuungen mit σ_0/c zu multiplizieren sind, um die aktuellen Werte zu erhalten, und daß der mittlere Gewichtseinheitsfehler σ_0 vom verwendeten Funktional-Modell abhängig ist. Das Problem der verschiedenen funktionellen Modelle wird in 6.4., Seite 61, ausführlicher diskutiert.

Der relativ steile Anstieg aller Kurven in Figur 26, Seite 54, ist darauf zurückzuführen, daß bei der unterstellten gleichen Kammerkonstante $c = 1$ in Blöcken mit verschiedenen großen Öffnungswinkeln die gleiche Genauigkeit in der Bildebene $\sigma_0 = 1$ verschiedener Winkelgenauigkeit entspricht (Figur 27, Seite 55). In 6.8, Seite 72, wird darauf noch einmal eingegangen werden.

Mittlere und maximale Streuung der verschieden großen Blöcke

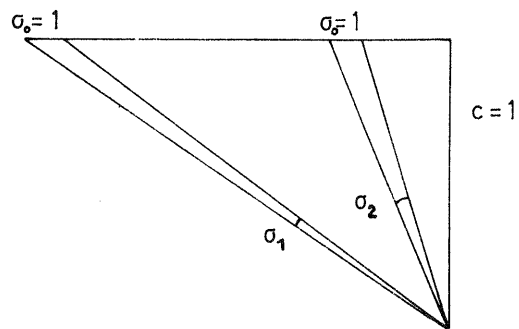
(zu 6.1.Seite 53)



Figur 26

Zusammenhang zwischen σ_o und Winkelgenauigkeit

(zu 6.1. Seite 53 und 6.8. Seite 72)



Figur 27

Bei unterschiedlichem Öffnungswinkel und $c=1$ führt die gleiche Genauigkeit in der Bildebene $\sigma_o = 1$ zu verschiedenen Winkelgenauigkeiten σ_1 und σ_2 .

Die Kurven für die Funktional-Modelle A und A+1 steigen gleichmäßig an und liegen knapp beisammen. Die Streuungen σ_{mittel} erreichen selbst beim 92-Flächer erst die Werte $0,82 \sigma_0/c$ bzw. $0,84 \sigma_0/c$. Der Unterschied zwischen σ_{mittel} und σ_{max} ist für beide Varianten sehr gering, maximal etwa 8 %.

Das funktionelle Modell A+5 zeigt schon bis zum 32-Flächer ein erheblich steileres Ansteigen der Kurven als die Modelle A und A+1, besonders auffallend sind jedoch die relativ großen Streuungen des 92-Flächers. Sie gaben dazu Anlaß, eine weitere Variante A+3 zu rechnen, die sich von A+5 dadurch unterscheidet, daß sie auf die Korrekturen für Δx und Δy verzichtet. Die Verteilung der Streuungen σ_p wird in Figur 28, Seite 57, dargestellt, σ_{mittel} und σ_{max} sind in die Figur 26, Seite 54, eingetragen. Auch diese Variante zeigt jedoch ein deutlich ungünstigeres Genauigkeitsverhalten als die Varianten A und A+1, und zwar sowohl in Bezug auf die mittlere Streuung als auch auf das Verhältnis zwischen σ_{mittel} und σ_{max} . Die Steifigkeit größerer Blöcke wird durch die Verwendung komplizierterer funktioneller Modelle offensichtlich spürbar schlechter.

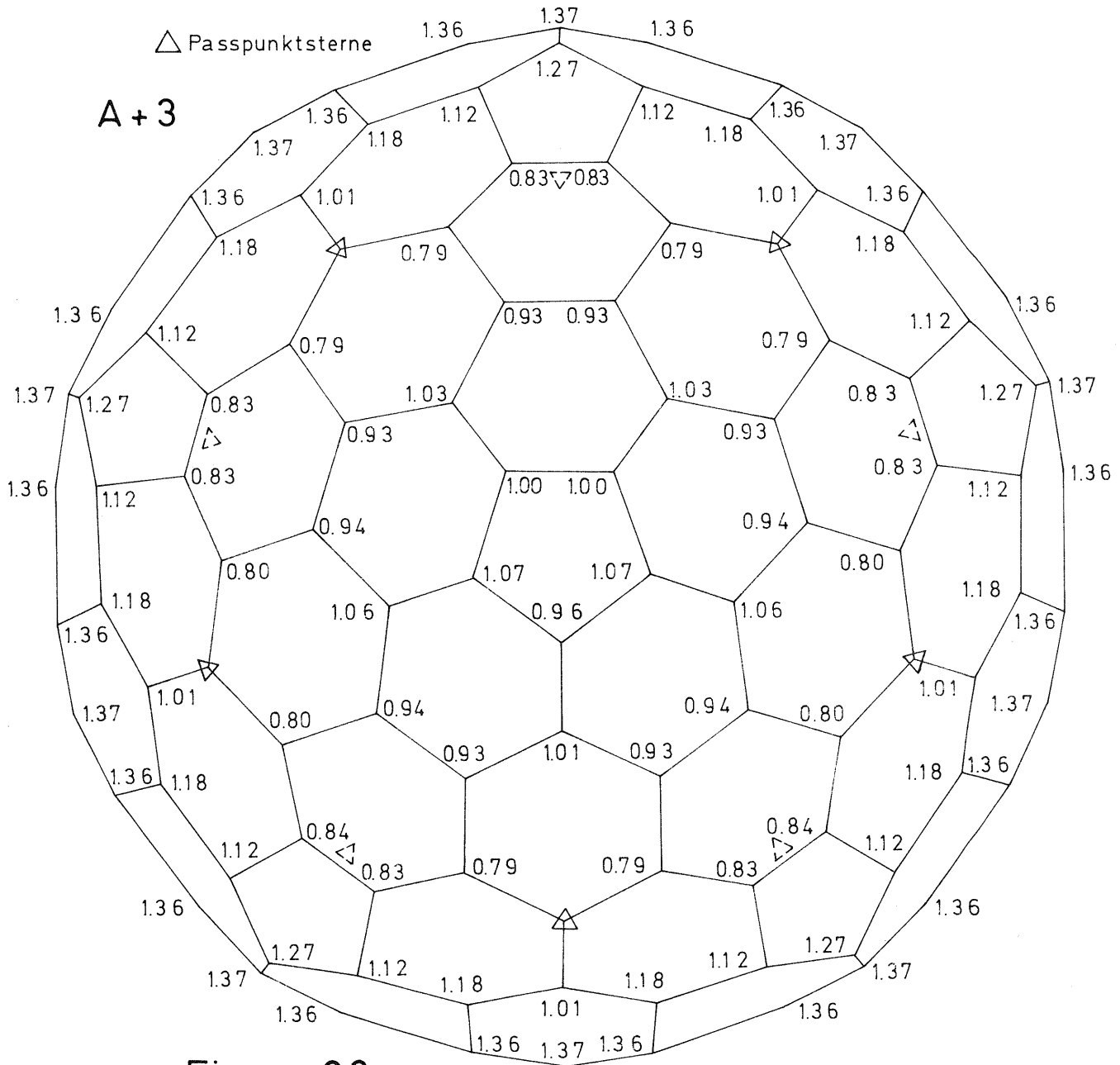
Bei einer praktischen Anwendung ist zu erwarten, daß aus Gründen der Genauigkeit ein Block gewählt wird, dessen Bildanzahl über die des größten hier behandelten Falles hinausgeht. Als Möglichkeit für die Abschätzung der zu erwartenden mittleren Streuung eines solchen Blocks bietet sich die Extrapolation der entsprechenden Kurven in Figur 26, Seite 54, an. Auf die, bestimmten Genauigkeitsanforderungen entsprechenden Blockgrößen soll in Kapitel 8 näher eingegangen werden. Als Beispiel sei hier einstweilen ein aus 600 Aufnahmen bestehender Block angenommen. Bei hauptsächlich sechsseitigen Bildern ist die Anzahl der Ecken-Sterne ca. doppelt so hoch wie die Anzahl der Aufnahmen. Daraus ergibt sich, daß der angenommene Block ca. 1200 Ecken-Verknüpfungssterne enthält.

Eine Extrapolation der Kurven für die Varianten A und A+1 auf diese Blockgröße dürfte auf ca. ± 5 bis 10 % genau möglich sein.

92 - Flächen, 10 Passpunkte

(zu 6.1. Seite 56)

Erläuterungen: siehe Seite 41/42



Figur 28

$$\sigma_{\text{mittel}} = 1.09 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{p \text{ max}} = 1.37 \frac{\sigma_0}{c}$$

$$\sigma_{\text{max}} = 1.44 \frac{\sigma_0}{c}$$

Die Streuungen σ_{mittel} erhalten dabei die Werte $0,90 \sigma_0/c$ bzw. $0,95 \sigma_0/c$. Der ungleichmäßige Verlauf der Kurven für die Variante A+5 hingegen verbietet eine solche Extrapolation. Um sicherere Aussagen zu erhalten, müßte der gewählte Block mit diesem funktionellen Modell tatsächlich durchgerechnet werden.

6.2. Genauigkeitsvergleich zwischen den Varianten E und E+S (Verknüpfungssterne nur in den Bildecken bzw. in den Ecken und Seiten-Mitten)

In die Tabelle 6, Seite 59, sind die Faktoren q eingetragen, um welche die in den Tabellen 2 und 3, Seite 37, aufgeführten Streuungen der Variante E größer sind als jene der Variante E+S.

$$\begin{aligned}
 q_{\sigma_{\text{mittel}}} &= \frac{\sigma_{\text{mittel E}}}{\sigma_{\text{mittel E+S}}} \\
 q_{\sigma_{\text{p max}}} &= \frac{\sigma_{\text{p max E}}}{\sigma_{\text{p max E+S}}} \\
 q_{\sigma_{\text{max}}} &= \frac{\sigma_{\text{max E}}}{\sigma_{\text{max E+S}}} \quad (33)
 \end{aligned}$$

Da σ_0 für die Varianten E und E+S in erster Näherung gleich groß angenommen werden kann und beiden Fällen $c = 1$ zugrundegelegt wurde, treten in den Quotienten q weder σ_0 noch c in Erscheinung. Es ist zu sehen, daß die Genauigkeitsabnahme durch Ausgleichung der Bildecken allein gering ist und zudem bei den größeren Figuren Dodekaeder und Ikosaeder geringer als beim Würfel. Die Streuungen des Würfels vergrößern sich um 8 % bis 19 %, die Streuungen des Dodekaeders um 5 % bis 13 % und die des Ikosaeders sogar nur um 4 % bis 8 %. Darüberhinaus erweist sich die Genauigkeitsabnahme als umso geringer, je einfacher das gewählte Funktionalmodell ist.

Man wird vermuten dürfen, daß die Differenz der Genauigkeiten bei größeren Blöcken in der gleichen Größenordnung bleibt wie beim

Genauigkeitsvergleich der Varianten E und E+S

(zu 6.2.Seite 58)

$$q = \frac{\sigma_E}{\sigma_{E+S}}$$

	funkt. Modell	Würfel			Dodekaeder			Ikosaeder		
		$q_{\sigma_{\text{mittel}}}$	$q_{\sigma_{\text{pmax}}}$	$q_{\sigma_{\text{max}}}$	$q_{\sigma_{\text{mittel}}}$	$q_{\sigma_{\text{pmax}}}$	$q_{\sigma_{\text{max}}}$	$q_{\sigma_{\text{mittel}}}$	$q_{\sigma_{\text{pmax}}}$	$q_{\sigma_{\text{max}}}$
4 bzw 6 Passpunkte	A	1.09	1.09	1.09	1.05	1.06	1.06	1.04	1.04	1.05
	A+M	1.08	1.08	1.08	1.07	1.09	1.09	1.07	1.07	1.08
	A+M+4(5)	1.10	1.09	1.11	1.08	1.07	1.08	—————		
	A+1	1.19	1.19	1.19	1.11	1.13	1.13	—————		

Tabelle 6

	funkt. Modell	$t_{\sigma_{\text{mittel}}}$	$t_{\sigma_{\text{pmax}}}$	$t_{\sigma_{\text{max}}}$
E	A	0.87	0.85	0.91
	A+1	0.87	0.85	0.91
	A+M	0.91	0.85	0.87
E+S	A	0.88	0.86	0.92
	A+M	0.91	0.86	0.88
	A+M+5	0.99	0.97	0.94
	A+1	1.49	1.45	1.54

Genauigkeitsvergleich der Dodekaeder- und Ikosaeder - Blöcke

(zu 6.3.Seite 60)

$$t = \frac{\sigma_{\text{Ikosaeder}}}{\sigma_{\text{Dodekaeder}}}$$

Tabelle 7

Varianten E und E+S: siehe 4.1.2. Seite 19

funktionelle Modelle: siehe 3.2. Seite 13

Dodekaeder und Ikosaeder oder noch geringer wird. Für die Behandlung des 32-Flächers und des 92-Flächers erschien daher eine Beschränkung auf die Variante E vertretbar. Wenngleich im Falle einer praktischen Anwendung des astronomischen Blocks durch Zugrundelegung des Falles E+S für die 3- oder mehrfach bestimmten Sterne eine Genauigkeitssteigerung von nur etwa 5 % bis 10 % zu erwarten ist, könnte die Einbeziehung der in den Seitenmitten abgebildeten Sterne und eventuell sogar prinzipiell aller mindestens 2-fach bestimmten Sterne in die Ausgleichung unter Umständen doch zweckmäßig sein, weil dadurch einerseits auch diese Sterne widerspruchsfreie Koordinaten erhalten und andererseits mehr Korrekturparameter pro Aufnahmebündel zugelassen werden können. Mit einem entsprechend höheren numerischen Aufwand der Ausgleichung müßte in diesem Fall allerdings gerechnet werden.

6.3. Vergleich der Leistungsfähigkeit der Dodekaeder- und Ikosaeder-Blöcke

In Tabelle 7, Seite 59, sind die Faktoren t eingetragen, um welche sich die Streuungen der Ikosaeder-Fälle und der Dodekaeder-Fälle unterscheiden. Da beiden Blockformen $c = 1$ zugrundeliegt und wegen der gleichen Öffnungswinkel ihre σ_0 -Werte näherungsweise gleich groß zu erwarten sind, fallen c und σ_0 bei der Quotientenbildung heraus.

$$\begin{aligned}
 t_{\sigma_{\text{mittel}}} &= \frac{\sigma_{\text{mittel Ikosaeder}}}{\sigma_{\text{mittel Dodekaeder}}} \\
 t_{\sigma_{\text{p max}}} &= \frac{\sigma_{\text{p max Ikosaeder}}}{\sigma_{\text{p max Dodekaeder}}} \\
 t_{\sigma_{\text{max}}} &= \frac{\sigma_{\text{max Ikosaeder}}}{\sigma_{\text{max Dodekaeder}}} \quad (34)
 \end{aligned}$$

Für die funktionellen Modelle A, A+1, A+M und A+M+5 (siehe 3.2, Seite 13) ergeben sich die Streuungen beim Ikosaeder um 1 % bis 15 % kleiner als beim Dodekaeder, für die Variante A + I um 45 % bis 54 % größer als beim Dodekaeder. Der etwas höheren Genauigkeit des Ikosaeders (mit Ausnahme der Variante A+I), die außerdem zum Teil auf die Verwendung von 6 Paßpunkten gegenüber nur 4 beim Dodekaeder zurückzuführen ist, stehen 3 Nachteile des Ikosaeders gegenüber :

1. Bei Ausgleichung der Bildecken allein können die funktionellen Modelle A+5, A+M+4 und A+I gar nicht zugrundegelegt werden, weil sie bei nur 3 Bildpunkten zu singulären Normalgleichungsmatrizen führen.
2. Der Ikosaeder liefert die Koordinaten-Korrekturen von nur 12-Ecken-Sternen (inclusive der Paßpunkte). der Dodekaeder hingegen von 20.
3. Die Bildanzahl ist beim Ikosaeder mit 20 höher als beim Dodekaeder, der mit nur 12 Bildern den gesamten Himmel überdeckt.

Größere Blöcke, die sich in der Hauptsache aus dreiseitigen Aufnahmen zusammensetzen, haben gegenüber solchen mit hauptsächlich fünf- und sechsseitigen Bildern (wie z. B. die behandelten 32-Flächen- und 92-Flächen-Blöcke) dieselben Nachteile wie der Ikosaeder gegenüber dem Dodekaeder. In Bezug auf die Genauigkeit ist zu erwarten, daß die Unterschiede bei gleichem Öffnungswinkel der Bündel und annähernd gleicher Paßpunktverteilung gering sind.

6.4. Gegenüberstellung der mit verschiedenen funktionellen Modellen erzielten Ergebnisse

Die Fehlerfortpflanzung im Würfel- und im Dodekaeder-Block wurde unter Zugrundelegung von sechs verschiedenen, in 3.2, Seite 13, vorgestellten funktionellen Modellen berechnet. In Tabelle 8, Seite 62, sind für die Variante E (Verknüpfungssterne nur in den Bildecken) die Faktoren angegeben, um welche die jeweils auf $\sigma_0=1$ und $c = 1$ bezogenen Streuungen für die Funktional-Modelle A+1 bis

Einfluß des funktionellen Modells auf die Blocksteifigkeit

(zu 6.4.Seite 61)

$\sigma_0 = 1$	funkt. Modell	Würfel			Dodekaeder		
		$\frac{\sigma_{\text{mittel}}}{\sigma_{\text{mittel}A}}$	$\frac{\sigma_{p \text{ max}}}{\sigma_{p \text{ max}A}}$	$\frac{\sigma_{\text{ max}}}{\sigma_{\text{ max}A}}$	$\frac{\sigma_{\text{mittel}}}{\sigma_{\text{mittel}A}}$	$\frac{\sigma_{p \text{ max}}}{\sigma_{p \text{ max}A}}$	$\frac{\sigma_{\text{ max}}}{\sigma_{\text{ max}A}}$
ohne Passpunkte	A(A+1)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	A+5	1.26	1.27	1.36	1.23	1.40	1.61
	A+M	1.61	1.61	1.61	1.53	1.52	1.49
	A+M+4	3.49	3.64	4.36	1.92	2.44	2.45
	A+I	—————					
4 Passpunkte	A(A+1)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	A+5	1.04	1.05	1.05	1.08	1.12	1.24
	A+M	1.09	1.09	1.09	1.20	1.26	1.23
	A+M+4	1.22	1.23	1.25	1.33	1.43	1.47
	A+I	1.65	1.65	1.65	1.43	1.46	1.43

Tabelle 8

A+I größer sind als die Streuungen der Fälle A. Das aktuelle Verhältnis der Streuungen erhält man aus diesen Werten durch Multiplikation mit

$$\sigma_{\circ A+1}/\sigma_{\circ A}, \quad \sigma_{\circ A+5}/\sigma_{\circ A} \quad \text{usw.}$$

Die Faktoren wachsen in der Reihenfolge der Fälle A (A+1), A+5, A+M, A+M+4, A+I an, und zwar für die Fälle "Ohne Paßpunkte" erheblich stärker als für die Fälle "mit 4 Paßpunkten".

Es zeigt sich also, daß die Block-Steifigkeit durch Hinzunahme zusätzlicher Parameter für Bündelkorrekturen schlechter wird und frei gerechnete Blöcke davon stärker betroffen werden als solche, bei denen eine Stützung durch Paßpunkte gegeben ist.

Geringere Steifigkeit bedeutet aber nicht unbedingt, daß die Streuungen der bestimmten Sternkoordinaten größer werden, da kompliziertere funktionelle Modelle ja im allgemeinen gleichzeitig kleinere mittlere Gewichtseinheitsfehler ergeben. Man wird im Gegenteil solche Modelle überhaupt nur dann verwenden, wenn die Genauigkeit der Sternkoordinaten dadurch höher wird.

Im Zuge dieser theoretischen Arbeit läßt sich leider nicht definitiv bestimmen, welches Funktional-Modell optimal ist. Dazu sind empirische Untersuchungen der infragekommenden Aufnahmebedingungen, Kammern und Komparatoren erforderlich. Es bleibt daher nur die Möglichkeit, Erwartungen an die Stelle der sicheren Aussagen zu setzen.

Die Variante A+I dürfte für größere Blöcke nicht zweckmäßig sein, da bei schmalen Bildbündeln Fehler zufolge falscher Hauptpunkt-lage Δx und Δy zum überwiegenden Teil durch die Bündeldrehungen ϕ und ω kompensiert werden. Nach [14] ist bei einem Bündelwinkel von z. B. $11,5^\circ$ nur ca. 1/100 der Fehler Δx und Δy nicht durch ϕ und ω kompensierbar.

Die Tabelle 8, Seite 62, zeigt, daß eine getrennte Maßstabskorrektur für jedes Bündel, Variante A+M, anstelle einer allen Bündeln gemeinsamen, Variante A+1, zur Erhöhung der Faktoren um 9 % bis 61 % beim Würfel und um 20 % bis 53 % beim Dodekaeder führt. Die Faktoren der Variante A+M+4 steigen gegenüber jenen der Variante A+5 beim Würfel um 17 % bis 220 % und beim Dodekaeder um 19 % bis 74 % an. Die Faktoren für die funktionellen Modelle A und A+1 sind gleich, was schon in 5.1, Seite 39, begründet wurde.

Mit einiger Wahrscheinlichkeit dürften die Funktionalmodelle A+1 bzw. A+5 bei einer praktischen Anwendung den Modellen A+M bzw. A+M+4 vorgezogen werden, da einerseits die Aufnahmebedingungen für jeweils mehrere Bilder sehr ähnlich zu erwarten sind und andererseits die Fehlerfortpflanzung dieser beiden funktionellen Modelle günstiger ist. Den Untersuchungen für den 32-Flächen- und den 92-Flächen-Block wurden unter diesem Gesichtspunkt außer dem Modell A nur die funktionellen Modelle A+1 und A+5 zugrundegelegt.

Eine andere Frage ist die, wie zweckmäßig das Modell A+5 im Vergleich mit anderen Funktional-Modellen mit der gleichen Parameter-Anzahl ist. Auch hier kann jedoch nichts Definitives ausgesagt werden. Erst praktische Versuche werden den günstigsten Ansatz finden lassen. Immerhin erscheint die Variante A+5 insofern zweckmäßig zu sein, als die insgesamt zugelassenen 8 Parameter pro Aufnahmebündel eine projektive Transformation der Bildkoordinaten ermöglichen und praktische Aufnahmen vom Objektiv und von der Kammer her stets projektive Restfehler aufweisen. Nach den Ergebnissen der schon zuvor erwähnten Untersuchung [14] könnte sich aber durchaus ein Funktional-Modell A+3, das auf die Korrekturen für Δx und Δy verzichtet, als leistungsfähiger erweisen.

6.5. Genauigkeitsvergleich zwischen "freien Blöcken" und solchen mit Paßpunkten

Die Würfel-, Dodekaeder- und 32-Flächen-Blöcke wurden in der Variante E (Verknüpfungssterne nur in den Bildecken) mit und ohne Paßpunkte durchgerechnet. In der Figur 29, Seite 66, sind für die funktionellen Modelle A, A+1 und A+5 (siehe 3.2, Seite 13) die Faktoren h graphisch dargestellt, um welche die auf $\sigma_0 = 1$ bezogenen Streuungen σ_{mittel} und σ_{max} im Falle "ohne Paßpunkte" größer sind als im Falle "mit Paßpunkten". Da der mittlere Gewichtseinheitsfehler in beiden Fällen, zumindest in erster Näherung, als gleich groß angenommen werden kann, geben die Faktoren h somit gleichzeitig das Verhältnis der aktuellen Streuungen an.

$$h_{\sigma_{\text{mittel}}} = \frac{\sigma_{\text{mittel ohne Paßpunkte}}}{\sigma_{\text{mittel mit Paßpunkten}}}$$

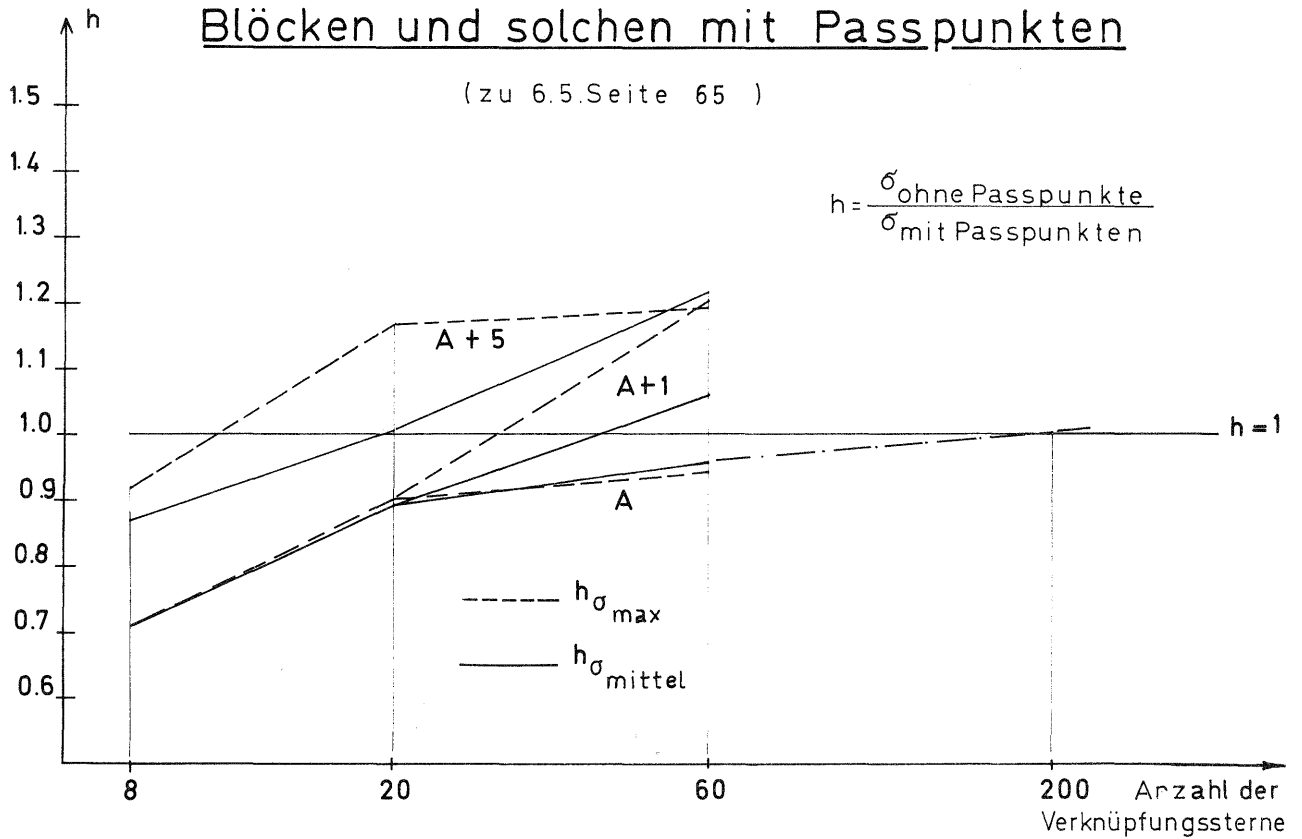
$$h_{\sigma_{\text{max}}} = \frac{\sigma_{\text{max ohne Paßpunkte}}}{\sigma_{\text{max mit Paßpunkten}}} \quad (35)$$

Als Maß der jeweiligen Blockgröße wurde wie in Figur 26, Seite 54, die Anzahl der Verknüpfungssterne gewählt und auf der Abszisse in logarithmischem Maßstab aufgetragen.

Aus dem Ansteigen aller Kurven in Figur 29, Seite 66, ist die ungünstigere Genauigkeitsabhängigkeit paßpunktloser Blöcke von der Blockgröße zu entnehmen. Während dieses Ergebnis zu erwarten war, überrascht zunächst, daß die Kurven im Bereich der kleineren Blöcke unterhalb der Geraden $h = 1$ liegen, was bedeutet, daß die entsprechenden Streuungen für den Fall "ohne Paßpunkte" kleiner sind als für den Fall "mit Paßpunkten". Zu erklären ist das dadurch, daß Paßpunkte zwar einerseits die Genauigkeit erhöhen, weil die Anzahl der frei überbrückten Bündel kleiner wird, daß aber andererseits die Eindrehung des Blocks in das System der wenigen Paßpunkte mit geringerer Genauigkeit erfolgt, als die Fixierung des Blocks durch die 3 Bedingungen zwischen allen Sternkoordinaten-Korrekturen (siehe 4.1.5, Seite 22) im Falle "ohne Paßpunkte".

Genauigkeitsvergleich zwischen freien Blöcken und solchen mit Passpunkten

(zu 6.5. Seite 65)



Figur 29

Hier muß allerdings noch darauf hingewiesen werden, daß die Koordinaten der Blöcke mit Paßpunkten nach der Ausgleichung auf ein zuvor definiertes Paßpunktsystem bezogen sind, was für die paßpunktlosen Blöcke nicht der Fall ist. Wird eine nachträgliche deformationsfreie Eindrehung in ein Bezugssystem durchgeführt, so nimmt die Genauigkeit ab, allerdings bei hinreichend vielen identischen Sternen sehr gering. Andererseits sind in den Streuungen der Blöcke mit Paßpunkten etwaige Paßpunktfehler noch nicht berücksichtigt.

Da einerseits für kleine Blöcke die Genauigkeit ohne Paßpunkte höher ist als mit Paßpunkten, andererseits aber die Abhängigkeit der Genauigkeit von der Blockgröße bei paßpunktlosen Blöcken ungünstiger ist, erscheint es als wichtig, festzustellen, ab welcher Blockgröße die Genauigkeit bei Verzicht auf Paßpunkte geringer wird als bei Verwendung von Paßpunkten.

Für die Variante A zeigt sich, daß selbst bei 60 Ecken-Sternen der paßpunktlose Block noch genauer ist als der Block mit 6 Paßpunkten. Eine Extrapolation der Kurve ergibt erst für einen Block mit etwa 200 Ecken-Sternen Genauigkeitgleichheit in σ_{mittel} . Die hohe Steifigkeit des geschlossenen astronomischen Blockes wird damit deutlich veranschaulicht.

Für die Variante A+1 hingegen tritt Genauigkeitgleichheit in σ_{mittel} schon bei 40 Ecken-Sternen pro Block ein, für die Variante A+5 sogar schon bei 20. Paßpunktlose Blöcke zeigen also gegenüber Blöcken mit Paßpunkten ein umso schlechteres Genauigkeitsverhalten, je mehr Bündel-Korrektur-Parameter verwendet werden, eine Tatsache, die auch schon in 6.4., Seite 63, für Würfel und Dodekaeder allein konstatiert wurde.

Das Verhältnis zwischen maximaler und mittlerer Streuung ist für paßpunktlose Blöcke zum Teil ungünstiger als für Blöcke mit Paßpunkten, zum Teil ist es für beide Fälle praktisch gleich.

Bei einer praktischen Anwendung genießt der freie Block den Vorteil, völlig voraussetzungsfreie Sternkoordinaten zu liefern, da

keine Paßpunkte beansprucht werden. Bei Verwendung des einfachen Funktional-Modells A ist zu erwarten, daß er in Bezug auf die Genauigkeit einem gleich großen, in Paßpunkte eingehängten Block nur gering unterlegen ist. Sollte sich jedoch die Zugrundelegung eines komplizierteren funktionellen Modells als notwendig erweisen, so dürfte der Verwendung von Paßpunkten - entweder sehr sichere FK-Sterne oder Neubestimmte Sterne - wegen der günstigeren Fehlerfortpflanzung im Block der Vorzug gegeben werden.

6.6. Gegenüberstellung der Ergebnisse des offenen und des geschlossenen 32-Flächen-Blocks

Die beim offenen 32-Flächen verwendeten 16 Aufnahmen des nördlichen Himmels wurden in 3 Paßpunkt-Sterne eingehängt (siehe Figur 22, Seite 49). Der geschlossene 32-Flächen nimmt dieselben drei Sterne als Paßpunkte in Anspruch und zusätzlich drei weitere am Südhimmel (siehe Figur 21, Seite 48).

Die Tabelle 9, Seite 69, enthält die Faktoren s , um welche bei Zugrundelegung der Variante E (Verknüpfungssterne nur in den Bildecken) die Streuungen des offenen Blocks gegenüber jenen des geschlossenen 32-Flächers anwachsen.

$$\begin{aligned}
 s_{\sigma_{\text{mittel}}} &= \frac{\sigma_{\text{mittel halber Block}}}{\sigma_{\text{mittel ganzer Block}}} \\
 s_{\sigma_{\text{p max}}} &= \frac{\sigma_{\text{p max halber Block}}}{\sigma_{\text{p max ganzer Block}}} \\
 s_{\sigma_{\text{max}}} &= \frac{\sigma_{\text{max halber Block}}}{\sigma_{\text{max ganzer Block}}} \quad (36)
 \end{aligned}$$

Die Faktoren schwanken zwischen 1,28 und 1,65. Der Genauigkeitsgewinn durch die Geschlossenheit ist also selbst bei relativ kleinen Blöcken, wie dem hier behandelten 32-Flächen, schon beträchtlich.

Genauigkeitsvergleich des offenen und des geschlossenen 32-Flächers

(zu 6.6. Seite 68)

funktionelle Modelle: siehe 3.2. Seite 13

funkt. Modell	32-Flächen-Block		
	$s_{\sigma_{\text{mittel}}}$	$s_{\sigma_{\text{pmax}}}$	$s_{\sigma_{\text{max}}}$
A	1.28	1.52	1.53
A + 1	1.32	1.61	1.65
A + 5	1.39	1.49	1.49

$$s = \frac{\sigma_{\text{halber Block}}}{\sigma_{\text{ganzer Block}}}$$

Tabelle 9

6.7. Koordinatengenauigkeit nicht in die Ausgleichung einbezogener Sterne

Für die Variante A (an jedem Bildbündel wird nur die äußere Orientierung zugelassen) des 92-Flächers mit 10 Paßpunkten wurden die Streuungen einiger aus der obersten Aufnahme abgeleiteter Sternkoordinaten berechnet, wobei als Gewichtskoeffizientenmatrix G^{bb} wieder die Einheitsmatrix diente.

Die Verteilung der Bildpunkte und die Ergebnisse sind in Figur 30, Seite 71, dargestellt.

Der Stern 5 darf als singulärer Punkt des Sternkoordinatensystems nicht in die Matrix A_1 (siehe Formel (18), Seite 24) eingeführt werden. Seine Streuung $\sigma_{\Delta\delta}$ muß getrennt berechnet werden nach:

$$\sigma_{\Delta\delta} = \sqrt{\sigma_{\phi}^2 + \sigma_{\Delta x}^2 / c^2} . \quad (37)$$

Da alle Sterne einfach bestimmt sind, wird die Matrix A_1 hier quadratisch, und die Bildkoordinaten erhalten keine Verbesserungen.

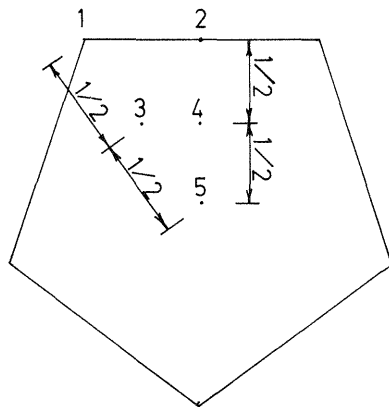
Die Streuungen σ_p sind im ganzen Bild praktisch konstant und ca. um den Faktor 1,5 größer als die Streuung $\sigma_{\text{mittel}} = 0,82 \sigma_0 / c$ (Figur 23, Seite 50).

Nachträglich bestimmte Sterne weisen somit eine geringere Koordinatengenauigkeit auf als die Verknüpfungssterne, deren Koordinaten im Zuge der Blockausgleichung berechnet werden. Durch Anordnung mehrerer gegeneinander versetzter Bildverbände kann dieses ungünstige Genauigkeitsverhältnis verbessert werden. In 8.2., Seite 80, wird auf diese Möglichkeit kurz eingegangen.

6.8. Kritischer Vergleich der Ergebnisse mit der theoretischen Anblockgenauigkeit

Ein Vergleich der erhaltenen Genauigkeit astronomischer Blöcke mit der theoretischen Genauigkeit photogrammetrischer Blöcke, die nach dem Anblockverfahren ausgeglichen wurden, liegt nahe,

Koordinatengenauigkeit nachträglich bestimmter Sterne


 $c=1 \quad \sigma_0=1$

Pkt.	$\sigma_{\Delta \alpha \cos \delta}$	$\sigma_{\Delta \delta}$	σ_p
1	1.35	1.20	1.28
2	1.32	1.22	1.27
3	1.28	1.24	1.26
4	1.27	1.24	1.26
5	—	1.25	—

Figur 30 (zu 6.7. Seite 70)

Ergebnisse eines Zahlenbeispiels

(zu 7. Seite 76)

Gruppe	1	2	3	4	5	8	9	10	11	12	quadr. Mittel
W_{mittel}	3.02	3.65	3.07	2.57	2.91	2.81	3.31	3.11	3.25	2.49	3.03
σ_0	3.64	3.52	2.51	2.69	2.55	2.98	3.68	2.70	3.52	2.23	3.04
W_{kmittel}	0.46	0.91	1.15	0.91	1.10	1.09	1.32	1.33	1.32	0.83	1.07
$\frac{W_{\text{kmittel}}}{W_{\text{bmittel}}}$	0.15	0.25	0.37	0.35	0.38	0.39	0.40	0.43	0.41	0.33	0.35

Tabelle 10

ist aber nicht unmittelbar möglich, da sich beim Anblockverfahren σ und σ_0 auf dasselbe Koordinatensystem beziehen, während beim astronomischen Block σ_0 auf das Bildkoordinatensystem bezogen ist und die Streuungen der Sternkoordinaten-Korrekturen Winkelgrößen sind (siehe Figur 27, Seite 55). Um trotzdem einen Vergleich zu ermöglichen, wurde die Streuung $\bar{\sigma}$ als jene Winkelgenauigkeit definiert, die sich - bei $c = 1$ - für den einzelnen Stern ergibt, wenn nur die Koordinatengenauigkeit $\sigma_0 = 1$ in jeder der drei Aufnahmen berücksichtigt wird, in denen er abgebildet ist. Rechnerisch ergeben sich diese Streuungen $\bar{\sigma}$ dadurch, daß die Submatrix N^{kk} der Matrix N (siehe Formel (23), Seite 25) allein invertiert wird. Da N^{kk} stets Hyperdiagonalgestalt hat, ist der Inversionsaufwand gering.

Wenn durch Multiplikation der Streuungen $\bar{\sigma}$ mit $\sqrt{3}$ noch die dreifache Bestimmung eines jeden Sterns in Rechnung gestellt und das quadratische Mittel $\bar{\sigma}_{\text{mittel}}$ dieser Werte berechnet wird,

$$\bar{\sigma}_{\text{mittel}} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma}}{n}} \quad (38)$$

so ergibt sich damit ein brauchbares Maß für die, der Bildgenauigkeit $\sigma_0 = 1$ entsprechende mittlere Winkelgenauigkeit der bestimmten Sterne.

Für die in der Figur 26, Seite 54, behandelten astronomischen Blöcke ergeben sich folgende Streuungen $\bar{\sigma}_{\text{mittel}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\text{mittel}} \text{ Würfel} &= 0,41 \sigma_0 / c \\ \bar{\sigma}_{\text{mittel}} \text{ Dodekaeder} &= 0,70 \sigma_0 / c \\ \bar{\sigma}_{\text{mittel}} \text{ 32-Flächen} &= 0,89 \sigma_0 / c \\ \bar{\sigma}_{\text{mittel}} \text{ 92-Flächen} &= 0,96 \sigma_0 / c \end{aligned} \quad (39)$$

Das für den Anblock berechnete $\bar{\sigma}_{\text{mittel}}$ stellt sich als identisch mit σ_0 heraus, wenn nur 4-fach bestimmte Punkte unterstellt werden und somit die Multiplikation mit $\sqrt{3}$ durch eine Multiplikation

mit $\sqrt{4} = 2$ ersetzt wird. Die Werte $\sigma/\bar{\sigma}_{\text{mittel}}$ beim astronomischen Block sind daher mit den Beträgen σ/σ_0 des Anblockverfahrens vergleichbar.

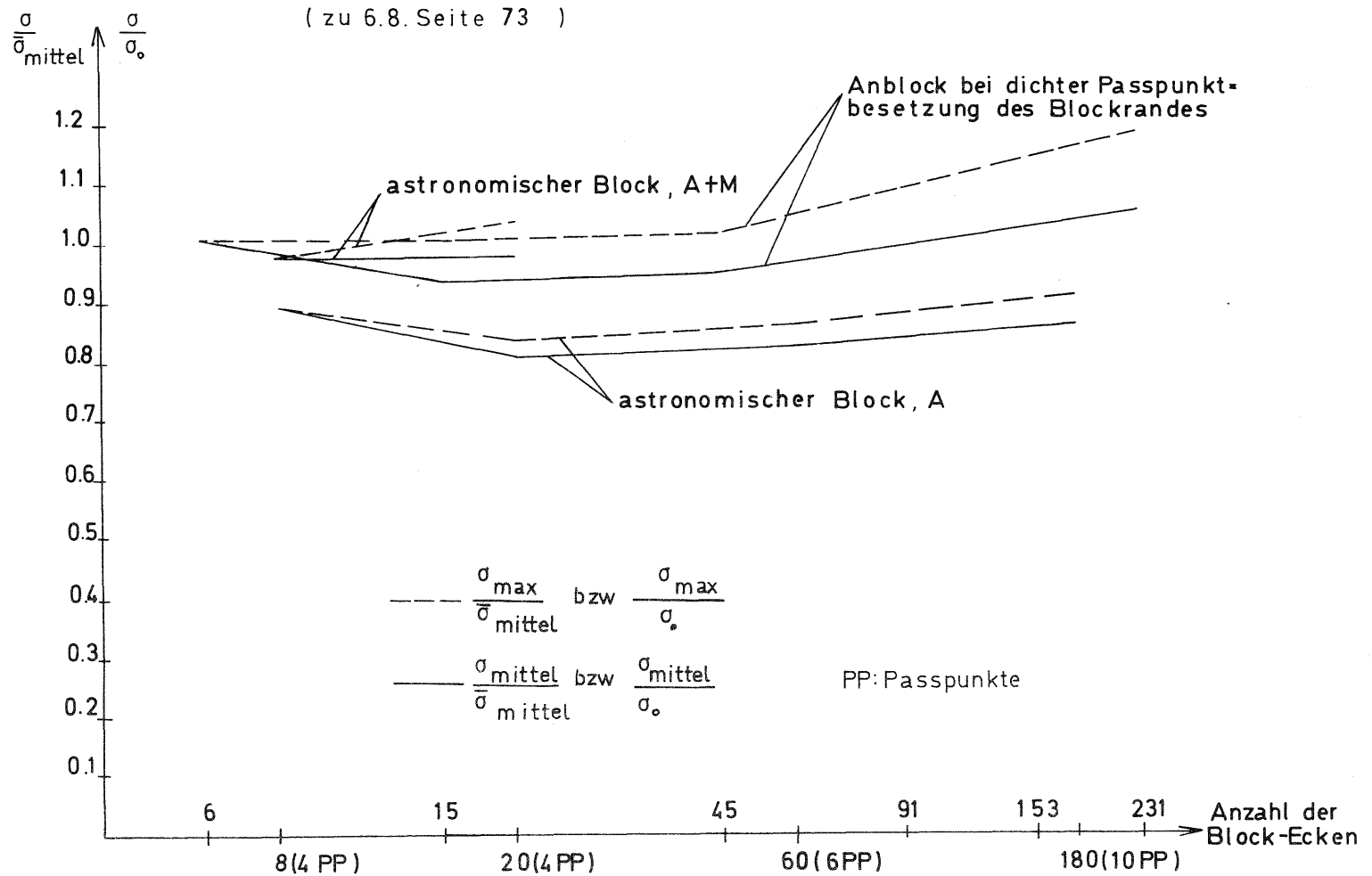
In Figur 31, Seite 74, sind die Werte σ/σ_0 für 6 verschieden große, nach dem Anblockverfahren ausgeglichene photogrammetrische Blöcke bei dichter Paßpunktbesetzung des Blockrandes, sowie die Werte $\sigma/\bar{\sigma}_{\text{mittel}}$ für 4 astronomische Blöcke der Variante A und 2 der Variante A+M (siehe 3.2., Seite 13) jeweils mit Paßpunkten und Verknüpfungsternen nur in den Bildecken (Fall E) graphisch dargestellt. Als Maß der Blockgröße wurde wie in Figur 26, Seite 54, die Anzahl der Block-Ecken gewählt. Die Werte für den Anblock wurden [3] und [4] entnommen.

Die Variante A entspricht dem Anblock insofern, als hier wie dort nur die jeweils notwendigen Parameter zugelassen wurden. Das Anblockverfahren geht ja von nur relativ orientierten Modellen aus, muß also eine Maßstabskorrektur pro Modell unbedingt zulassen, während eine solche beim astronomischen Block und bekannter Kammerkonstante nicht unbedingt notwendig ist.

Figur 31, Seite 74, zeigt, daß die Anblock-Kurven und die Kurven für den astronomischen Block annähernd parallel verlaufen. Die reduzierten Streuungen $\sigma/\bar{\sigma}_{\text{mittel}}$ der astronomischen Blöcke der Variante A sind um ca. 10 % bis 20 % kleiner als die reduzierten Streuungen σ/σ_0 beim Anblock. Daß dieser Unterschied auf der zusätzlichen Maßstabskorrektur beim Anblockverfahren beruht, zeigen die Kurven für die Variante A+M der astronomischen Blöcke, die mit den Kurven des Anblocks sehr gut übereinstimmen. Der Figur 31 ist weiterhin zu entnehmen, daß der Unterschied zwischen maximaler und mittlerer Streuung beim astronomischen Block geringer ist als beim Anblock. Die Genauigkeit ist also etwas gleichmäßiger verteilt.

Insgesamt ist jedenfalls zu sehen, daß die erwartete Ähnlichkeit zwischen dem Anblock und dem astronomischen Block in Bezug auf die Genauigkeit zutrifft.

Genauigkeitsvergleich zwischen Anblock und astronomischem Block



Figur 31

7. Ein Zahlenbeispiel mit "gewürfelten Beobachtungen"

Der Würfel-Fall E, A+5 (siehe 4.1.2., Seite 19, und 3.2, Seite 13) mit 4 Paßpunkten (48 Beobachtungen b , 31 Parameter p , davon 8 Sternkoordinaten-Korrekturen k) wurde insgesamt zwölfmal - Gruppen 1 bis 12 - durchgerechnet, wobei in den Verbesserungsgleichungen (8) und (9), Seite 15 und 16, als Näherungskordinaten α^* und δ^* die Koordinaten der Würfecken eingeführt wurden und als Beobachtungen die aus diesen Sternkoordinaten mittels Formel (4) und Formel (5), Seite 14) berechneten Bildkoordinaten \tilde{x} , \tilde{y} der 6 Würfecken, denen aber noch gewürfelte Fehler überlagert wurden. Diese Fehler wurden für die Gruppen 1-6 als die Summen der Augenzahlen von 3 Würfeln gewonnen, die annähernd normal verteilt sind. Für die Gruppen 7 - 12 wurde von den einzelnen gewürfelten Summen jeweils ihr Erwartungswert $(3+18)/2 = 10,5$ abgezogen.

Die Beobachtungen der Gruppen 1-6 enthielten somit systematische Fehler $\Delta x = \Delta y = 10,5$.

Für die 48. Beobachtung der Gruppe 6 wurde ein "grober Fehler" = 1000 angenommen.

Die einzelnen Beobachtungen der Gruppen 1 und 7 unterschieden sich um den konstanten Wert 10,5.

In den Vektoren f der Verbesserungsgleichungen

$$v = Ap - f \quad (10), \text{ Seite 16}$$

stehen in diesem Falle direkt die Fehler der Beobachtungen, die hier als wahre Fehler aufgefaßt werden können. Die Lösungsvektoren ergeben sich als

$$p = (A'A)^{-1} A'f \quad (40)$$

mit

$$p = \begin{bmatrix} o \\ k \end{bmatrix}, \quad (41)$$

wobei o die gesuchten Orientierungsparameter und k die Sternkoordinaten-Korrekturen sind, die wieder als wahre Fehler aufgefaßt werden können.

Wie zu erwarten war, ergaben sich für die Gruppen 1 und 7 die gleichen Lösungsvektoren, da die zugrundeliegende Variante A+5 Korrekturglieder für die Bildverschiebungen Δx und Δy enthält.

Die 8 wahren Sternkoordinatenfehler der Gruppe 6 nahmen die folgenden Werte an:

$$\begin{array}{ll} \Delta \alpha \cos \delta^*_{1} = - 52,9 & \Delta \delta_{1} = - 33,3 \\ \Delta \alpha \cos \delta^*_{2} = - 17,7 & \Delta \delta_{2} = 32,9 \\ \Delta \alpha \cos \delta^*_{3} = - 92,4 & \Delta \delta_{3} = -109,8 \\ \Delta \alpha \cos \delta^*_{4} = 13,8 & \Delta \delta_{4} = - 58,6 \end{array}$$

Der Maximalfehler -109,8 tritt zwar an dem Stern auf, dessen eine Bildkoordinate in einem seiner 3 Bilder mit dem groben Fehler behaftet war, ist aber nur noch ca. doppelt so groß wie der größte Koordinatenfehler -58,6 der 3 restlichen Sterne, während dieses Verhältnis bei den Beobachtungen ungefähr 1 : 60 war. Der Grund dafür ist in der fehlervermittelnden Eigenschaft des Ansatzes A+5 zu suchen.

Im Falle einer praktischen Anwendung des astronomischen Blocks stehen mit den aus Katalogen entnommenen Sternkoordinaten jedoch so gute Näherungswerte zur Verfügung, daß grobe Fehler relativ leicht erkannt und beseitigt werden können.

In der Tabelle 10, Seite 71, sind für die Gruppen 1 bis 5 (abzüglich der systematischen Fehler Δx und Δy) und 8 bis 12 die quadratischen Mittelwerte $w_{b \text{ mittel}}$ der wahren Beobachtungsfehler

$$w_{b \text{ mittel}} = \sqrt{\frac{(f-10,5)'(f-10,5)}{48}} \quad (42)$$

für die Gruppen 1 bis 5 und

$$w_{b \text{ mittel}} = \sqrt{\frac{f'f}{48}} \quad (43)$$

für die Gruppen 8 bis 12 dargestellt,

die mittleren Gewichtseinheitsfehler

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{v'v}{r}} \quad (13) \text{ Seite 21}$$

mit $r = (48-31) = 17$,

sowie die quadratischen Mittelwerte $w_{k \text{ mittel}}$ der Sternkoordinaten-Korrekturen

$$w_{k \text{ mittel}} = \sqrt{\frac{k'k}{8}} \quad (44)$$

In der letzten Spalte sind jeweils die quadratischen Mittelwerte aller Gruppen eingetragen.

Die vierte Zeile enthält die Quotienten $w_{k \text{ mittel}}/w_{b \text{ mittel}}$. Bei unendlich vielen Beobachtungen sollten $w_{b \text{ mittel}}$ und σ_0 gleich groß sein. Die Abweichungen wachsen in den einzelnen Gruppen bis zum Faktor 1,2 an, bei den quadratischen Mitteln aller 10 Gruppen aber ist die Übereinstimmung mit 3,03 gegen 3,04 sehr gut. Der theoretische Wert beträgt 2,96.

Ebenso sollte bei unendlich vielen Beobachtungen $w_{k \text{ mittel}}/w_{b \text{ mittel}}$ identisch mit $\sigma_{\text{mittel}} = 0,38$ aus Tabelle 2 sein. Die einzelnen Gruppen weichen bis um den Faktor 2,5 davon ab, für den Quotienten der quadratischen Mittel aller 10 Gruppen ergibt sich hingegen immerhin 0,35. Es zeigt sich somit, daß diese "Monte-Carlo-Methode" erst für eine größere Anzahl von zufälligen Zahlensätzen eine hinreichende Übereinstimmung mit der durch Inversion gewonnenen theoretischen Genauigkeit ergibt, während der einzelne Zahlensatz unter Umständen grob verfälschte Ergebnisse liefert.

8. Überlegungen zu einer praktischen Anwendung

8.1. Bildformat und mittlerer Gewichtseinheitsfehler

Ein astronomischer Block, bei dem die Ecken-Verknüpfungssterne in jeweils drei Aufnahmen abgebildet werden, wie dies bei den untersuchten Blöcken der Hauptreihe der Fall ist, bietet den Vorteil, mit einem Minimum an Einzelbildern den gesamten Sternenhimmel zu überdecken. Für die in der Hauptsache sechseitigen Aufnahmen erwies sich ein rundes Bildformat als das günstigste. Da solche Platten aber praktisch nirgends zur Anwendung kommen, wird für die folgenden Überlegungen vom photogrammetrischen Standard-Format 230 mm x 230 mm ausgegangen. Bei Unterstellung einer mindestens 20 %-igen Überdeckung der einzelnen Bilder ergibt sich ein Nutzradius von $115 \cdot 0,8 \approx 90$ mm.

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler wird vorwiegend von 4 Komponenten beeinflußt werden:

- 1) von der Atmosphäre (Refraktion und Szintillation)
- 2) von den Aufnahmekammern
- 3) von den Komparatoren zur Ausmessung der Bilder
- 4) vom funktionellen Modell (siehe 4.1.4, Seite 21).

Um atmosphärische Fehler und "Biegungen" der Aufnahmekammern so klein wie möglich zu halten, sollten nur genäherte Zenit - aufnahmen geplant werden.

Bei den infragekommenden schmalen Bildbündeln wird in diesem Falle der Fehlereinfluß durch Unsicherheit in der Refraktions- erfassung als klein gegenüber 2) bis 4) angenommen werden dürfen.

Die Aufnahmekammern und Komparatoren sollten vor und nach ihrer jeweiligen Verwendung möglichst genauen Kalibrierungen unterzogen werden. Als Träger der Aufnahme-Emulsionen dürfte aus Genauigkeitsgründen Glasplatten gegenüber Filmen klar der Vorzug gegeben werden. Zur Erfassung der immerhin noch vorhandenen Emulsions-Deformationen erscheint die Anwendung von Réseaux [15] in den Aufnahmekammern als empfehlenswert.

Für die geometrische Genauigkeit in der Bildebene wird man nach den Erfahrungen mit photogrammetrischen Kamern [6] bei gleichem Bildformat in erster Näherung Unabhängigkeit von der Kammerkonstante unterstellen dürfen. Die Genauigkeit der Komparatormessung ist bei gleicher Bildgröße ebenfalls als konstant zu erwarten. Daraus ergibt sich, daß der mittlere Gewichtseinheitsfehler für eine erste Abschätzung als unabhängig vom Bündelöffnungswinkel angenommen werden kann.

Die oben erwähnten Maßnahmen zur Gewährleistung einer hohen Genauigkeit lassen erwarten, daß bei Zugrundelegung der einfachen funktionellen Modelle A und A+1 (siehe 3.2, Seite 13), die eine nur wenig unterschiedliche Fehlerfortpflanzung im Block ergeben (siehe Figur 26, Seite 54), ein mittlerer Gewichtseinheitsfehler von $\sigma_0 \approx \pm 2\mu$ erreicht wird.

8.2. Genauigkeitssteigerung durch Anwendung mehrerer Bildverbände

Eine weitere Möglichkeit zur Erhöhung der Genauigkeit besteht in der mehrfachen Wiederholung der einzelnen Aufnahmen oder, anders ausgedrückt, in der Überlagerung mehrerer Bildverbände unter Verwendung derselben Verknüpfungssterne. Um systematische Fehler zu kompensieren, könnte dabei die Kammer von Aufnahme zu Aufnahme verdreht werden, was bei Zenitaufnahmen ohne ernste Schwierigkeiten möglich wäre. Bei n Bildern und unkorrelierten Beobachtungen würden die Streuungen der bestimmten Sternkoordinaten mit $1/\sqrt{n}$ abnehmen. Da jedoch Korrelationen zu erwarten sind, wird der tatsächliche Genauigkeitsgewinn geringer sein. Immerhin dürfte es möglich sein, mit 6 bis 10 Bildern die Streuungen der Koordinaten auf die Hälfte zu reduzieren.

Für die folgenden Abschätzungen wird eine, durch diese Maßnahme erreichte Genauigkeitssteigerung um den Faktor 2 unterstellt bzw. der Einfachheit halber mit einem mittleren Gewichtseinheitsfehler von $\sigma_0 \approx \pm 1\mu$ gerechnet.

Wegen der gleichen Anzahl der notwendigen Standpunkte wie bei Anwendung eines einzigen Verbandes steigt der Aufnahme-Aufwand im Falle mehrerer Bildverbände dieser Art nur in beschränktem Maße. Bei den Komparatormessungen hingegen ist mit einem entsprechend großen Mehraufwand zu rechnen.

Da sich die Orientierungsparameter der zu verschiedenen Bildverbänden gehörigen Aufnahmen desselben Himmelsteils nur geringfügig unterscheiden (siehe dazu 8.4, Seite 84), können die Normalgleichungsmatrizen der einzelnen Bildverbände als gleich angenommen werden; unterschiedliche Gestalt erhalten nur ihre rechten Seiten. Dieser Umstand hat jedoch zur Folge, daß der numerische Aufwand der Ausgleichung praktisch nicht beeinflußt wird.

Zumindest erwähnt werden soll auch noch die Möglichkeit, mit den Aufnahmen eines Verbandes jeweils mehrere Bilder eines anderen Verbandes teilweise zu überdecken, sodaß jeder Verknüpfungstern nicht nur in mehreren Aufnahmen abgebildet wird, sondern auch an verschiedenen Bildorten zu liegen kommt. Der Genauigkeitsunterschied zwischen Verknüpfungsternen und Sternen im Bildinneren (siehe 6.7, Seite 70) würde dadurch wesentlich geringer werden. Da bei dieser Anordnung mehr Verknüpfungsterne verwendet werden können, würde der numerische Aufwand der Ausgleichung entsprechend anwachsen. Fehlertheoretisch wird auf diese Variante in der vorliegenden Arbeit nicht eingegangen.

8.3. Blockgröße

In der Einleitung, Seite 7, wurde festgestellt, daß die mittlere Streuung der bestimmten Sternkoordinaten $0''2$ erreichen müßte, wenn die Methode der Sternortbestimmung durch geschlossene Blockausgleichung gegenüber den astronomisch-geodätischen Methoden konkurrenzfähig sein soll. Um die im FK 4 angegebene Maximalgenauigkeit sicher zu erreichen, wäre sogar $\sigma_{\text{mittel}} = 0''05$ notwendig.

Es soll nun der Bündelöffnungswinkel sowie die Anzahl der Bilder bzw. Ecken-Verknüpfungssterne errechnet werden, die sich aus den abgestuften Forderungen

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{mittel}} &= 0''2 \\ \sigma_{\text{mittel}} &= 0''1 \\ \sigma_{\text{mittel}} &= 0''05\end{aligned}$$

ergeben. Als mittlerer Gewichtseinheitsfehler wird bei Verwendung der funktionellen Modelle A bzw. A+1 $\sigma_o \approx \pm 1\mu$ unterstellt (siehe 8.1. und 8.2., Seite 79).

Die erforderliche Kammerkonstante c kann aus der Beziehung

$$\sigma_{\text{mittel}} (") = \frac{\sigma_o}{c} \cdot \sigma_{\text{mittel}} (c=1, \sigma_o=1) \cdot \rho (") \quad (45)$$

berechnet werden.

Die auf $c=1$ und $\sigma_o=1$ bezogene mittlere Streuung

$$\sigma_{\text{mittel}} (c=1, \sigma_o=1)$$

ist von der Blockgröße abhängig. Ihre Größe wird für die Forderung

$$\sigma_{\text{mittel}} = 0''2$$

zunächst mit 1,0 angenommen. Damit ergibt sich aus Formel (45)

$$c = \frac{2 \cdot 10^5''}{0,2''} 1\mu \cdot 1,0 = 10^6 \mu = 1 \text{ m} .$$

Dieser Kammerkonstante $c = 1 \text{ m}$ entspricht bei einem Nutradius von 90 mm ein Bündelöffnungswinkel von

$$\begin{aligned}\alpha_{\text{max}} &= 2 \arctan \frac{90}{c(\text{mm})} \\ &= 2 \arctan \frac{90}{1000} = 10,3^\circ\end{aligned} \quad (46)$$

und eine Bildanzahl von

$$\begin{aligned}n_{\text{Bild}} &= \frac{4\pi}{\text{mittl. Bildfläche für } c=1} \\ &= \frac{4\pi}{1,5 \sqrt{3} \cdot 0,09^2} \approx 600,\end{aligned} \quad (47)$$

wobei als mittlere Bildfläche der Inhalt eines regelmäßigen Sechsecks mit einer Seitenlänge von 90 mm angenommen wurde.

Da bei überwiegend sechseckigen Bildern die Anzahl der Ecken-Verknüpfungssterne ca. doppelt so hoch ist wie die Bildanzahl, ergibt sich somit ein Block mit ca. 1200 Ecken-Sternen.

Die Extrapolation der Kurven für die Funktional-Modelle A und A+1 in Figur 26, Seite 54, auf diese Blockgröße erscheint wegen des regelmäßigen Kurvenverlaufs als relativ unproblematisch. Es ergeben sich die Streuungen $\sigma_{\text{mittel}} = 0,90 \sigma_0/c$ bzw. $\sigma_{\text{mittel}} = 0,95 \sigma_0/c$. In Anbetracht der Extrapolations-Unsicherheit kann somit der vorweg angenommene Wert 1,0 als zutreffend angesehen werden.

Da zu erwarten ist, daß die mittleren Streuungen für die Varianten A und A+1 in Figur 26, Seite 54, auch für Blöcke mit mehr als 600 Aufnahmen nur sehr gering steigen, kann in erster Näherung angenommen werden, daß der Forderung $\sigma_{\text{mittel}} = 0''1$ ca. die vierfache Bildanzahl und der Forderung $\sigma_{\text{mittel}} = 0''05$ ca. die 16-fache Anzahl der Aufnahmen entspricht. Es handelt sich dabei jedoch um eine Annahme, die vor einer praktischen Durchführung mit Hilfe tatsächlich durchgerechneter Systeme dieser Größe geprüft werden sollte.

Die Daten der Blöcke, die sich aus den drei gestellten Genauigkeitsforderungen ergeben, sind in Tabelle 11, Seite 83, dargestellt.

Der ungleichmäßige Verlauf der Kurven der Variante A+5 in Figur 26, Seite 54, erlaubt keine Extrapolation. Für dieses funktionelle Modell kann daher keine Abschätzung der notwendigen Blockgröße vorgenommen werden. Hier bleibt nur die Möglichkeit, die großen Systeme selbst zu untersuchen. Es ist jedoch zu befürchten, daß sich bei sehr vielen Einzelaufnahmen eine wesentlich ungünstigere Fehlerfortpflanzung ergibt als bei Zugrundelegung der beiden einfachen Modelle. Das Funktionalmodell A+5 dürfte daher bei sehr großen Blöcken trotz des zu erwartenden kleineren mittleren Gewichtseinheitsfehlers den Modellen A und A+1 in Bezug auf die erreichbare Sternkoordinatengenauigkeit unterlegen sein.

Daten der extrapolierten Blöcke

(zu 8.3. Seite 82)

$\sigma_s = \pm 1 \mu$, bei Verwendung der funktionellen Modelle A und A+1

(siehe 3.2. Seite 13)

Bildformat: 23 cm × 23 cm , Nutzradius: 9 cm

σ_{mittel}	Kammer- konstante	Anzahl der Aufnahmen	Anzahl der Ecken-Sterne	Öffnungs- winkel
0"2	1 m	600	1200	10°
0"1	2 m	2500	5000	5°
0"05	4 m	10000	20000	2,5°

Tabelle 11

Numerischer Aufwand der Ausgleichung

(zu 8.4. Seite 85)

Anzahl der Aufnahmen	Anzahl der Beobachtg.	Redundanz	Anzahl aller Parameter	Anzahl der Koord.-Paramt.
600	7200	3000	4200	2400
2500	30000	12500	17500	10000
10000	120000	50000	70000	40000

Tabelle 12

8.4. Block-Ausgleichung

Der Ausgleichung müßten, wie schon in 6.4., Seite 61 ff. erwähnt, Untersuchungen zur Festlegung des zweckmäßigsten Funktionalmodells vorangehen. Eventuell erweist sich auch eine Erweiterung des einfachen stochastischen Modells als notwendig. Bei Verwendung mehrerer Kammern mit unterschiedlicher Genauigkeit z. B. würden die Bildkoordinaten verschiedene Gewichte erhalten. Nach durchgeführter Ausgleichung besteht die Möglichkeit, das mathematische oder das stochastische Modell mit Hilfe der Ausgleichungsergebnisse zu verbessern und die Ausgleichung zu wiederholen [16].

Als hervorragende Näherungswerte stehen aus astronomischen Katalogen entnehmbare Sternkoordinaten zur Verfügung. Noch vor der Ausgleichung können die einzelnen Aufnahmen optimal auf diese Koordinaten transformiert werden. Es darf dabei jedoch keine Deformation des Bündels erfolgen. Für die Orientierungsdaten ergeben sich dadurch ebenfalls sehr gute Näherungswerte, und die aus verschiedenen Bildverbänden stammenden Aufnahmen (siehe 8.2. Seite 80) werden sich somit in der Orientierung nur geringfügig unterscheiden.

Dank dieser Informationen über die gesuchten Parameter wird anstelle mehrerer Iterationen schon eine einzige Ausgleichung die endgültigen Ergebnisse liefern. Da im Grunde nur die ausgeglichenen Sternkoordinaten interessieren, kann sich die Blockausgleichung auf die Berechnung dieser Parameter allein beschränken. Es besteht daher die Möglichkeit, die Normalgleichungsmatrix zu reduzieren (Formel (25), Seite 26) und nur dieses kleinere System zu lösen. Bei geeigneter Organisation der Matrizen erhält auch die reduzierte Normalgleichungsmatrix Bandstruktur, was die Rechenzeit (zumal ja keine Inversion nötig ist) wesentlich verkürzt. Für die Lösung selbst bieten sich die iterativen Verfahren, wie z. B. die "Methode der konjugierten Gradienten" [17] an.

Wenn für jedes Bild im Durchschnitt nur 6 Verknüpfungssterne verwendet werden und jeder Verknüpfungstern in drei Aufnahmen abgebildet ist, ergeben sich für einen einzigen Blockverband bei

einer Bildanzahl n_{Bild} etwa

$$6 \cdot 2 \cdot n_{\text{Bild}} = 12 \cdot n_{\text{Bild}} \text{ Verbesserungsgleichungen} \quad (48)$$

bzw. Beobachtungen

$$3 \cdot n_{\text{Bild}} \text{ Orientierungsparameter} \quad (49)$$

und

$$2 \cdot 2 \cdot n_{\text{Bild}} = 4 \cdot n_{\text{Bild}} \text{ Koordinaten-Parameter} \quad (50)$$

bei einer Redundanz r von

$$r = (12-7) n_{\text{Bild}} = 5 \cdot n_{\text{Bild}} \quad (51)$$

Für mehrere Bildverbände, wie sie in 8.2 beschrieben wurden, erhöht sich die hauptsächlich interessierende Anzahl der Koordinaten-Parameter nicht.

Die Zahlenwerte, welche sich für die drei in Tabelle 11, Seite 83, ausgewiesenen Blöcke ergeben, sind in Tabelle 12, Seite 83, eingetragen. Sie sind auf den einfachen Bildverband bezogen.

Die Lösung von Gleichungssystemen mit bis zu 40 000 Unbekannten stellt auch heute noch sehr große Anforderungen an die Leistungsfähigkeit der Elektronen-Rechner und an die Programmierung. Sie erscheint jedoch bei Verwendung von Großrechenanlagen wie z. B. der Univac 1108, der großen Typen der Reihe IBM 360 oder der CDC-Anlage 6600 als durchführbar.

9. Zusammenfassung und Schlußfolgerung

Die vorliegende Arbeit untersucht die Genauigkeit einer Methode, welche eine simultane Koordinatenbestimmung von Sternen ermöglicht, die gleichmäßig über den gesamten Himmel verteilt sind. Durch einzelne photogrammetrische Bildbündel wird dabei ein geschlossener Block gebildet und ausgeglichen.

Allen behandelten Blöcken wird das gleiche stochastische Modell zugrundegelegt, aber verschiedene funktionelle Modelle, die zum Teil Korrekturen der Aufnahmebündel erlauben.

Im Hauptteil der Untersuchung wird die Fehlerfortpflanzung ermittelt. Fünf verschiedene Blöcke werden dazu in mehreren Varianten durchgerechnet. Als Ergebnisse treten die auf $\sigma_0 = 1$ und $c = 1$ ($c =$ Kammerkonstante) bezogenen Streuungen der ausgeglichenen Sternkoordinaten auf. Sie werden durch Inversion der Normalgleichungsmatrizen bestimmt.

Als wichtigste Ergebnisse sind zu nennen:

1. Die Fehlerfortpflanzung ist für die Funktional-Modelle A und A+1, die keine Bündelkorrektur bzw. eine mehreren Aufnahmen gemeinsame Maßstabsänderung zulassen, sehr gering. Die mittleren Streuungen erreichen selbst beim größten behandelten Block, der 92 Aufnahmen und 180 Verknüpfungssterne verwendet, nur die Werte $0,82 \sigma_0/c$ bzw. $0,84 \sigma_0/c$. Innerhalb der Blöcke ist die Genauigkeit nahezu konstant. Die maximale Streuung unterscheidet sich nirgends um mehr als 8 % von der mittleren Streuung.

Der geringe und stetige Anstieg der Streuungen bei zunehmender Bildanzahl (siehe Figur 26, Seite 54) läßt erwarten, daß selbst in Blöcken mit wesentlich mehr Einzelaufnahmen die mittlere Streuung den Wert 1,0 nicht nennenswert übersteigt.

Bei Zugrundelegung des funktionellen Modells A+5 dagegen, welches eine umfassendere Bündelkorrektur erlaubt (siehe 3.2.

Seite 13) steigt die mittlere und insbesondere die maximale Streuung mit zunehmender Blockgröße wesentlich stärker an (siehe Figur 26, Seite 54). Beim 92-Flächen erreichen die Streuungen die Beträge $1,25 \sigma_0/c$ bzw. $1,77 \sigma_0/c$. Diese ungünstigere Fehlerfortpflanzung läßt erwarten, daß das Modell A+5 für einen sehr großen Block trotz des kleineren mittleren Gewichtseinheitsfehlers eine geringere Genauigkeit ergibt als das Funktionalmodell A oder A+1.

2. Die zusätzliche Einführung von in den Seitenmitten der Aufnahmen abgebildeten Verknüpfungsternen in die Ausgleichung erhöht die Genauigkeit nur sehr gering. Der Gewinn wird um so kleiner, je einfacher das funktionelle Modell und je größer der Block ist. Bei Verwendung des Funktionalmodells A und einem Block mit 12 Aufnahmen (Dodekaeder-Block) beträgt dieser nur max. 6 %.
3. Bei gleichem Bündelöffnungswinkel bieten Blöcke, die hauptsächlich sechsseitige Bilder verwenden, gegenüber Blöcken mit vier- oder dreiseitigen Aufnahmen bei praktisch gleicher Genauigkeit den Vorteil, weniger Bilder zu benötigen.
4. In einige wenige Paßpunkt-Sterne eingehängte Blöcke sind von bestimmten Blockgrößen an frei gerechneten Blöcken (siehe 4.1.5., Seite 22) in Bezug auf die Genauigkeit überlegen, und zwar umso mehr, je größer die Blöcke und je differenzierter die gewählten funktionellen Modelle sind. Beim einfachsten Funktional-Modell A, das keine Bündelkorrektur zuläßt, tritt Genauigkeitsgleichheit beider Varianten bei einem Block mit etwa 200 Ecken-Verknüpfungsternen auf.
Als Vorteil eines freien Blocks wird herausgestellt, daß die bestimmten Sternkoordinaten wegen der Unabhängigkeit von Paßpunkten ein völlig voraussetzungsfreies System bilden.

Im Anschluß an den Fehlertheoretischen Teil der Arbeit werden Überlegungen zur praktischen Anwendung eines solchen geschlossenen astronomischen Blocks angestellt. Für bestimmte Forderungen an die Genauigkeit der bestimmten Sternkoordinaten wird die erforderliche Kammerkonstante, die Anzahl der notwendigen Aufnahmen und der Aufwand der Block-Ausgleichung abgeschätzt. Um z. B. eine mittlere Streuung der Koordinaten von $0''1$ zu erreichen, erweist sich ein Block mit 2500 Einzelbildern als notwendig.

Bei Zugrundelegung des Bildformates 23 cm x 23 cm ergibt sich eine Kammerkonstante von 2 m. Bei der Blockausgleichung treten in diesem Falle 10 000 Koordinaten-Parameter auf. Die praktische Durchführung eines solchen Projekts erscheint heute als durchaus möglich. Es ist damit prinzipiell nachgewiesen, daß mit dieser Methode der Positionsbestimmung durch geschlossene Blockausgleichung eine Genauigkeit erzielt werden kann, die ausreicht, um die vorhandenen Sternkataloge zu überprüfen bzw. zu verbessern.

Nach Ansicht des Verfassers darf erwartet werden, daß die gesamte Behandlung eines solchen Blocks, von den Aufnahmen über die Komparatormessungen bis zur Ausgleichung innerhalb weniger Jahre durchführbar ist, wodurch Sternkoordinaten gewonnen wären, die nicht nur in Bezug auf die geometrische Bestimmung, sondern auch hinsichtlich der Eigenbewegung als sehr homogen bezeichnet werden könnten.

Zum Abschluß sei noch darauf hingewiesen, daß eine Anwendung dieser rein photogrammetrischen Methode der Sternkoordinaten-Bestimmung auch von zukünftigen Außenstationen, also von Positionen außerhalb der Erdatmosphäre aus, möglich ist und somit der Einfluß der Atmosphäre und der Schwere ausgeschaltet werden kann.

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

- [1] GOTTHARDT, E., 1967. Genauigkeitsuntersuchungen an schematischen trigonometrischen Netzen.
Festschrift zum 70. Geburtstag von Professor Walter Großmann: S. 123-131
- [2] JERIE, H. G., 1968. Theoretical height accuracy of strip and block triangulation with and without use of auxiliary datas.
Photogrammetria, 23 (1): S. 19 - 44
- [3] ACKERMANN, F., 1966. On the theoretical accuracy of planimetric block triangulation.
Photogrammetria, 21: S. 145 - 170
- [4] ACKERMANN, F., 1967. Theoretische Beispiele zur Lagegenauigkeit ausgeglichener Blöcke.
Bildmessung und Luftbildwesen 35 (3): S. 114 - 122
- [5] ACKERMANN, F., 1968. Gesetzmäßigkeiten der absoluten Lagegenauigkeit von Blöcken.
Bildmessung und Luftbildwesen 36 (1): S. 3 - 15
- [6] MEIER, H.K., 1964. Untersuchungen zur Wahl des Bildwinkels und Bildformats von Luftbildkammern.
Bildmessung und Luftbildwesen 32 (3): S. 83 - 92
- [7] FRICKE, W. und KOPFF, A., 1963. Fourth Fundamental Catalogue. Veröffentlichungen des Astronomischen Rechen-Instituts Heidelberg Nr. 10
- [8] Smithsonian Astrophysical Observatory Star Catalog.
Part 1: XVIII

- [9] LUKAC, C. F. and HALIGOWSKY, B. A., 1967. Reduction of Star Coordinates in Photographic Astrometry. *Astronomic Journal* 72 (5): S. 617 - 619
- [10] LUKAC, C. F., 1967. The Use of Overlap Conditions in Astronomic Plate Reductions. *Astronomic Journal* 72 (5): S. 620 - 623
- [11] GOOGE, W., 1967. The Mathematical Implementation of the Overlap Plate Reduction Technique. *Astronomic Journal* 72 (5): S. 623 - 625
- [12] EICHHORN, H., 1960. Über die Reduktion von photographischen Sternpositionen und Eigenbewegungen. *Astronomische Nachrichten* 285: S. 233 - 237
- [13] BROWN, D., 1968. A Unified Lunar Control Network *Photogrammetric Engineering* 34 (12): S. 1272 - 1292
- [14] SCHWENKEL, D., 1968. Kompensation von Hauptpunkt Fehlern durch Elemente der äußeren Orientierung bei ballistischen Aufnahmen. *Selbständige Arbeit am Institut für Photogrammetrie der Universität Stuttgart*
- [15] ZIEMANN, H., 1967. Untersuchungen an Réseau-Aufnahmen. *DGK, Reihe C: Dissertationen - Heft Nr. 104*
- [16] KUBIK, K., 1967. Schätzfunktionen für Varianzen, Kovarianzen und für andere Parameter in Ausgleichungsaufgaben. *Dissertation an der Technischen Hochschule Wien*
- [17] HESTENES, M. and STIEFEL, E., 1952. Method of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. *Report 1659, Nat. Bur. Standards*

L e b e n s l a u f

Ich wurde am 29. 11. 1939 in Wien geboren. Von 1946 bis 1950 besuchte ich die Volksschule und von 1950 bis 1954 die Unterstufe der Realschule Wien 12, Erlgasse. 1954 trat ich in die Bundesgewerbeschule Wien 1, Schellinggasse, ein und legte dort am 22. 6. 1959 meine Reifeprüfung im Fach Tiefbau mit gutem Erfolg ab. In den Jahren 1959 bis 1964 studierte ich an der Technischen Hochschule in Wien Vermessungswesen und schloß mein Studium am 16. 6. 1964 durch die II. Staatsprüfung mit Auszeichnung ab.

Vom 5. 10. 1964 bis zum 31. 12. 1966 war ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter der Firma Carl Zeiss, Oberkochen, in der Abteilung für Photogrammetrie beschäftigt. Meine Tätigkeit erstreckte sich auf die Entwicklung und Betreuung photogrammetrischer Auswertegeräte.

Seit 1. 1. 1967 bin ich Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Photogrammetrie der Universität Stuttgart.

Stuttgart, den 12. September 1968

