Bemerkungen zu Linearisierungen in der Ausgleichungsrechnung

von K. Linkwitz, Stuttgart

Zusammenfassung

Einige grundlegende Prinzipien für Linearisierungen in der Ausgleichungsrechnung werden genannt und interpretiert. Schließlich wird ein neues Iterationsverfahren zur strengen Lösung der nichtlinearen bedingten Ausgleichung hergeleitet und mit einem Zahlenbeispiel erläutert.

1. Einleitung

Innerhalb der Geodäsieausbildung der Universität Stuttgart haben Fritz Ackermann und ich seit 1966 im Wechsel die Lehrveranstaltungen der Ausgleichungsrechnung vertreten. Bei unterschiedlichen Interessen im Detail hatten die Kurse dennoch ähnlichen Charakter, vielleicht deswegen, weil wir beide Schüler von Ernst Gotthardt sind. Auch die Studenten mußten auf ähnlichen Vorlesungsinhalt Wert legen, denn häufig konnten Prüfungswiederholer auch ihre Zweitprüfung nicht dort ablegen, wo sie die Kursvorlesungen gehört hatten.
Von den vielen interessanten Entwicklungen in den letzten 25 Jahren, die in Stuttgart besonders gepflegt wurden, will ich hier nur eine nennen, nämlich die Numerik, charakterisiert durch die Konzeption, Entwicklung und Programmierung von umfangreichen Programmsystemen zur Ausgleichung von Problemen mit sehr vielen Unbekannten. Im Institut von Fritz Ackermann standen am Beginn dieser Arbeiten Mitte der 60'ger Jahre wesentliche theoretische und konzeptionelle Durchbrüche in der Aerotriangulation. Die anschließend entstehenden Programmsysteme für die Photogrammetrie, PAT-M u.a., konnten in Deutschland und international überaus erfolgreich eingeführt und eingesetzt werden. Entscheidend dazu war u.a. der Algorithmus zur Lösung großer Gleichungssysteme HYCHOL, seinerzeit von EBNER und KLEIN programmiert.

Veranlaßt durch die Form- und Zuschnittsberechnungen der Münchner Olympiadächer - bei denen auch Gleichungssysteme mit bis zu einigen Tausend Unbekannten zu lösen waren - entstanden am Institut für Anwendungen der Geodä-

sie im Bauwesen unabhängig von den Aufgaben in der Photogrammetrie ebenfalls große Programmsysteme für die Berechnung von Seilnetzen und geodätischen Netzen in vielen Spielarten. Dabei übernahmen wir zunächst HYCHOL bis durch weiterführende Arbeiten - H.J.SCHEK, L.GRÜNDIG, J.BAHNDORF, M.NEUREITHER, u.a. - die Techniken der "konjugierten Gradiente" und "dünn besiedelter Matrizen" zur sehr schnellen Lösung großer Systeme angewendet wurden: ASTAN, OPTUN und schließlich LOCAL entstanden, die bei vielen großen Netzausgleichungen in der Praxis verwendet wurden.
Dabei zwangen uns unsere Arbeiten zur Seilnetzberechnung noch einmal zum prinzipiellen Nachdenken über Linearisierungen in der Ausgleichungsrechnung (und Seilnetzberechnung); an dieser Stelle gingen wir auch einen prinzipiell anderen Weg als Fritz Ackermann in der Photogrammetrie mit PAT-M und seinen Nachfolgeprogrammen gegangen ist.
Dazu folgen hier einige Bemerkungungen und Prinzipien. Schließlich wird ein neues Iterationsverfahren zur strengen Lösung der nichtlinearen bedingten Ausgleichung entwickelt und an zwei Zahlenbeispielen erläutert.

2. Einige grundlegende Bemerkungen zur Linearisierung

Mathematisch gesehen gehört der Formelapparat der Ausgleichungsrechnung in das Gebiet der linearen Algebra (und der Statistik/Wahrscheinlichkeitsrechnung), denn er besteht im wesentlichen aus linearen Transformationen und Substitutionen; Ergebnisse werden über Lösungen von linearen Gleichungssystemen gefunden. Das Minimumprinzip der Ausgleichungsrechnung drückt sich zwar durch eine nichtlineare, nämlich quadratische Form aus; ihre partiellen Ableitungen sind jedoch bereits Linearformen.

Die tatsächlichen, ursprünglichen Aufgabenstellungen - sowohl in der Fehlerfortpflanzung wie bei den verschiedenen Standardproblemen - sind jedoch häufig nichtlinear; die zugehörigen, der Nichtlinearität entsprechenden geometrischen Gebilde sind dann höherdimensionale Mannigfaltigkeiten.

Der Linearisierung durch den Taylor'schen Satz unter der üblichen Beschränkung auf Glieder 1. Ordnung entspricht dann ein Übergang von der Mannigfaltigkeit in den am Linearisierungspunkt angehefteten Tangentialraum. Der Tangentialraum ist ein linearer, affiner Punktraum mit zugehörigem Vektorraum, und in ihm spielen sich die Überlegungen und Berechnungen ab, wenn man sich auf den Linearteil des Taylor'schen Satzes beschränkt. Für den Übergang von der Mannigfaltigkeit in den Tangentialraum sind einige grundlegende Sachverhalte der Analytik wesentlich, nämlich

- die partielle Ableitung von Funktionen mehrerer Variabler,
- das "totale Diffential",
- die Kettenregel für Funktionen mehrerer Variabler oder, gleichbedeutend, die Variablentransformation Jakobimatrizen, welche bereits eine Transformation im Tangentialraum darstellt.

Die genaue Interpretation dieser mathematischen Tatbestände und ihre Anwendung auf die Fehlerfortpflanzung und Ausgleichung führt auf die Technik der "Ersatzbeobachtungen" und die Technik bzw. Theorie der fehlerzeigenden Figuren, worüber an anderer Stelle berichtet wurde /2/,/5/,/11/.

3. Nichtlineare Standardprobleme der Ausgleichungsrechnung

1) Vorbemerkungen

Wichtige, auch für die Praxis relevante Ausgleichungsprobleme - terrestrische Netze, Satellitennetze, Aerotriangulation - sind in ihren Fehler- bzw. Bedingungsgleichungen nichtlinear. Sie werden jedoch durch Linearisierung bereits der Fehler- bzw. Bedingungsgleichungen vor Ansatz des Minimumsprinzips in den Tangentialraum überführt und als lineare Ersatzprobleme gelöst. Muß man dabei von sehr groben Näherungswerten ausgehen, sind mehrere Iterationen notwendig. Durch die dabei jeweils auftretende neue Linearisierung an einem anderen "Taylorpunkt" vollziehen sich die einzelnen Iterationsschritte in einer Folge "benachbarter" Tangentialräume.

Dieses Verfahren ist äußerst wirkungsvoll und konvergenzstark; dies haben nicht nur die vielen Anwendungen von PAT-M und ASTAN/OPTUN gezeigt sondern auch Vergleichsuntersuchungen /9/ über die Konvergenz des aus der nichtlinearen vermittelnden Ausgleichung stammenden Newton-Verfahrens bei geodätischen Netzen: "Die Anwendung des Newton-Verfahrens ($\hat{=}$exakter nichtlinearer Ansatz bei der vermittelnden Ausgleichung und Lösung der nichtlinearen Normalgleichungen nach der Newton'schen Methode) an Stelle des

Gauß-Newton Verfahrens (≙übliche, iterative Lösung der linearen Normalgleichungen) ist nicht sinnvoll... Es ist offenbar sinnlos, die Konvergenzgeschwindigkeit durch Hinzunahme höherer Ableitungen verbessern zu wollen /9/".

Lediglich bei Seilnetzberechnungen /3/ ist der nichtlineare Ansatz notwendig, da ohne ihn das Problem singulär und damit die (elastomechanische) Lösung nicht auffindbar ist. Es bleibt jedoch abzuwarten, ob bei neuen Aufgaben aus den gegenwärtigen Entwicklungen der Geodäsie auch nichtlineare Ansätze numerisch sinnvoll sind.

3.2 Nichtlineare vermittelnde Ausgleichung (Standardproblem II).

Trotz der in /9/ mitgeteilten unterlegenen Konvergenzgeigenschaften des "exakten" nichtlinearen Ansatzes seien auch zu diesem Standardproblem einige Bemerkungen gemacht.

Mit den üblichen Bezeichnungen der Ausgleichungsrechnung

Beobachtungen $\mathbf{l}' = (l_1, \cdots, l_n)$; Verbesserungen $\mathbf{v}' = (v_1, \cdots, v_n)$
Unbekannte $\mathbf{x}' = (x_1, \cdots, x_n)$; Gewichte $\mathbf{p}' = (p_1, \cdots, p_n)$

lauten die Fehlergleichungen

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

welche über die Minimumbedingung

$$\mathbf{v}'\mathbf{P}\mathbf{v} \mathrel{\hat=} (\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{l})' \; \mathbf{P}(\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{l}) \Longrightarrow \min \; (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l})^T \mathbf{P}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l})$$

auf die nichtlinearen Normalgleichungen führen

$$\boxed{\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)^T_{/\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{P}(\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{l}) = \mathbf{0}.}$$

bzw., mit $\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{/\hat{\mathbf{x}}} := \mathbf{A}$

auf

$$\boxed{\mathbf{A}'\mathbf{P}(\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{l}) = \mathbf{0}.} \tag{2}$$

An diese Gleichung seien einige Bemerkungen geknüpft:

1) Die Formeln (1) können sowohl als Bestimmungsformeln für die $\hat{x}$ wie auch als durchgreifende Kontrollformel für die $\hat{x}$ aufgefaßt werden. Denn (2) ist genau dasjenige (nichtlineare!) Gleichungssystem, welches die gesuchten Parameter erfüllen müssen, damit die in den x nichtlineare quadratische Form (1) minimiert wird. Daraus folgt für das praktische Vorgehen (welches üblicherweise auch angewendet wird): Nach der Ermittlung der Unbekannten $\hat{x}$ - nach welcher Methode auch immer - bestimmt man die Verbesserungen aus den <u>nichtlinearen</u> Fehlergleichungen

$$v = f(\hat{x}) - \ell,$$

ermittelt die Jakobimatrix $A = \frac{\partial f}{\partial x} / \hat{x}$ an der Stelle $\hat{x}$ und prüft, ob (2) erfüllt ist. Ist dies der Fall, ist die Ausgleichung durchgehend kontrolliert, vor allen Dingen auch, ob bei iterativer Ermittlung der $\hat{x}$ das gesuchte globale Minimum von

$$(f(x) - \ell)^T P (f(x) - \ell)$$

gefunden worden ist.

2) In einem geodätischen Netz lassen sich die Gleichungen (2) als knotenweise zu erfüllende Gleichgewichtsbedingungen im elastomechanischen Analogon interpretieren: $f(\hat{x}) - \ell$ sind die - im Gleichgewichtszustand des Netzes/Fachwerkes - durch innere und äußere Kräfte verursachten elastischen Längenänderungen in den Fachwerkstäben (Seilnetzstücken) bzw. Winkeländerungen. Multipliziert mit den Gewichten - sie entsprechen im elastomechanischen Analogon Hooke'schen Zahlen - ergeben sich die Stabkräfte bzw. die auf den Winkel einwirkenden Momente. $A' = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'$ beschreibt die Geometrie für jeden Knoten des Analogons, d.h. für jeden Punkt des geodätischen Netzes, wobei eine Zeile von A' der x-, y- oder z-Komponente eines Knotens zugehört: Je 3 Zeilen von A' gehören zu einem Knoten = Netzpunkt im räumlichen Netz.
Dabei ist $A' = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'$ an der Stelle $\hat{x}$ zu nehmen, denn die Gleichgewichtsbedingungen müssen im <u>verformten</u> Zustand erfüllt sein!

In der Geodäsie begnügt man sich meistens - mit Recht, wie wir gesehen haben! - mit der Probe

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)' \Big/_{x_0} \cdot P(f(\hat{x}) - \ell) = 0$$

d.h. man bildet $A' = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'_{/x_0}$ an der Stelle x_0 der bei einer Iteration letzten Näherung von x_0^i für $\hat{x}$, gleichbedeutend damit, daß man bei kleinem $\hat{x} - x_0^i$ und zugehörigen kleinen Verbesserungen $f(\hat{x})-\ell$ die Näherungsgeometrie x_0^i und die endgültige Geometrie $\hat{x}$ des Netzes einander gleich setzt. Elastomechanisch gesehen entspricht dies der "Theorie 1. Ordnung". Die praktischen Erfahrungen bei Netzberechnungen in der Geodäsie zeigen, daß dies offenbar immer zulässig ist, da die Verbesserungen (die elastischen Längen- bzw. Winkeländerungen) im ausgeglichenen Zustand (im Gleichgewichtszustand) klein im Verhältnis zu den das Netz konstituierenden geometrischen Elementen - Strecken und Winkel - sind. Würde man jedoch ein Netz mit "gegenseitig sehr unverträglichen" geometrischen Elementen ausgleichen wollen - was fehlertheoretisch sinnlos sein dürfte! - so müßte man bei der Schlußkontrolle mit (2) an der Stelle $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{/\hat{x}}$ arbeiten.

Elastomechanisch allerdings ist es bei bestimmten Aufgaben keinesfalls sinnlos, in fachwerkartigen Gebilden auch große elastomechanische Verformungen anzunehmen, z.B. dann, wenn hochelastische Materialien verwendet werden. Setzt man tatsächlich die Gleichgewichtsbedingungen (2) für A' an der Stelle $\hat{x}$ an, so spricht man von der "Theorie 2. Ordnung".

3) Manche elastomechanischen Aufgaben lassen sich nur unter Anwendung der Theorie 2. Ordnung lösen, da die Theorie 1. Ordnung auf singuläre Gleichungen führt. Dies ist bei Seilnetzberechnungen - /3/,/10/ - der Fall, sodaß man dort nach der Theorie 2. Ordnung ($\hat{=}$ nichtlineare vermittelnde Ausgleichung) arbeiten muß!

3.3 Nichtlineare bedingte Ausgleichung (Standardproblem I)

a) Vorbemerkungen

Schon in /4/ und /6/ ist gezeigt worden, daß die übliche Linearisierung und Iteration bei großen Verbesserungen zwar die ausgeglichenen Beobachtungen miteinander verträglich macht, jedoch nicht auf das Minimum einer strengen Lösung führt. Die Aufgabe sei daher noch einmal aufgegriffen, und wir entwickeln sie - analog zur nichtlinearen vermittelnden Ausgleichung /9/ - mit Hilfe der zweiten Ableitungen. Dabei ergibt sich ein neuer, je-

denfalls mir bisher nicht bekannter Iterationsalgorithmus für die strenge Lösung.
In den Bezeichnungen der Aufgabe folgen wir /8/:

Gesucht seien die Lösungen eines unterbestimmten Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} f_1\,(y_1, y_2, \cdots, y_n) &= s_1 \\ f_2\,(y_1, y_2, \cdots, y_n) &= s_2 \\ &\cdots\cdots \\ f_r\,(y_1, y_2 \cdots, y_n) &= s_r \end{aligned} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{s}$$

mit n.r, und wir wollen voraussetzen, daß wir eine ungefähre Lösung (Näherung, Rohwert), geschätzte oder beobachtete Werte $\mathbf{l}' = (l_1, l_2, \cdots l_n)$ zur Verfügung haben.
Wir suchen nun diejenige Lösung $\hat{\mathbf{y}}$, welche

- das unterbestimmte System befriedigt, ("den Bedingungsgleichungen genügt"),
- die quadratische Form

$$(\mathbf{y}-\mathbf{l})^T\, \mathbf{P}\, (\mathbf{y}-\mathbf{l}) \tag{3}$$

minimiert:

$$(\hat{\mathbf{y}}-\mathbf{l})^T\, \mathbf{P}\, (\hat{\mathbf{y}}-\mathbf{l}) \Rightarrow \min\, (\mathbf{y}-\mathbf{l})^T\, \mathbf{P}\, (\mathbf{y}-\mathbf{l})$$

Dabei sei $\mathbf{P}$ eine positiv definierte Matrix. Die für die Lösung notwendigen n+r Gleichungen ergeben sich dann - siehe z.B. /7/,/8/ - zu

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{l} - \mathbf{P}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}\right)\Big/\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{K} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(\hat{\mathbf{y}}) - \mathbf{s} &= \mathbf{0}. \end{aligned}} \tag{4}$$

Die Gleichungen (4) sind die nichtlinearen Normalgleichungen für die Lösungen $\hat{\mathbf{y}}$ ("ausgeglichene Beobachtungen"), wobei über die Größe der Verbesserungen $\mathbf{v} := \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{l}$ keinerlei Voraussetzungen getroffen sind. Analog zu den nichtlinearen Normalgleichungen (2) der vermittelnden Ausgleichung gilt auch hier

- die Jakobimatrix $\left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}\right)\Big/\hat{\mathbf{y}}$ muß an der Stelle $\hat{\mathbf{y}}$ genommen werden,

- Unbekannte $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1\ \hat{y}_2 \cdots \hat{y}_n)$
  und Korrelaten $\mathbf{K} = (K_1\ K_2 \cdots K_r)$,
  welche (4) genügen, minimieren (3).

(/8/: "Dabei liegt keinesfalls fest, wie (4) in geeignete lineare Gleichungen überführt wird. Wesentlich ist nur, daß die (irgendwie) gefundenen Werte y und K das Gleichungssystem (4) erfüllen").

In /7/ und /8/ wird ein mögliches Iterationsverfahren, welches ohne die zweite Ableitung $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$ der Matrix $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ auskommt, genannt:
In der Annahme, man habe eine i'te Näherung y^i von $\hat{y}$ gefunden, ersetzt man $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)/\hat{y}$ durch $\frac{\partial f(y)}{\partial y}/y^i$ und bekommt anstelle der nichtlinearen Gleichungen (4) nunmehr die linearen Ersatzgleichungen

$$y^{i+1} - P^{-1} B_i K = l \tag{5a}$$

$$f(y^i) + B_i^T (y^{i+1} - y^i) = s, \tag{5b}$$

welche durch Einsetzen von y^{i+1} aus (5a) in (5b) auf die Normalgleichungen führen

$$(B_i^T P^{-1} B_i)\, k = \underbrace{s - f(y_i)}_{\substack{:= v_i \\ (1)}} + \underbrace{B_i^T (y_i - l)}_{(2)} \tag{6}$$

die nach k aufgelöst werden und ein neues y^{i+1} nach (5a)

$$y^{i+1} = P^{-1} B_i k + l$$

ergeben. Gegenüber der linearen Standardlösung, welche in den Normalgleichungen (6) auf der rechten Seite nur den Term (1) hat, muß bei der strengen nichtlinearen Lösung auch der Term (2) jeweils mitgeführt werden, sonst konvergiert die Lösung nicht zum gesuchten absoluten Minimum. Darauf haben bereits POPE /4/, STARK/MIKHAIL /6/ und dann, in einer ausführlichen Arbeit, SCHEK /7/ hingewiesen.

Allerdings - auch darauf weisen die genannten Autoren hin - konvergiert diese strenge Lösung häufig schlecht, und SCHEK schlägt deshalb in /7/ eine Dämpfung ohne die zweiten Ableitungen der Jakobimatrix $\frac{\partial f(y)}{\partial y}$ auskommt.
vor, die

b) Herleitung eines Iterationsverfahrens mit Hilfe der zweiten Ableitungen.

Im folgenden wird ein (Iterations)verfahren vorgestellt, welches bei der Linearisierung der nichtlinearen Normalgleichungen (4) die zweiten Ableitungen der Matrix $f(y)$ benützt und damit auf ein neues Iterationsverfahren für die "Strenge Least-Squares Lösung", SLS-Lösung, führt. Die Analyse des entstehenden Gleichungssystems gestattet einige allgemeine Aussagen.

Wir leiten das Verfahren elementar für 2 Bedingungsgleichungen und 3 Unbekannte bzw. Beobachtungen her. Später können wir leicht verallgemeinern und in Matrizen schreiben.

Für n=3 und r=2 lauten die nichtlinearen Bedingungsgleichungen

$$f_1(y_1, y_2, y_3) = s_1$$

$$f_2(y_1, y_2, y_3) = s_2$$

Zur Ermittlung der Elemente der Jakobimatrix $\frac{\partial f(y)}{\partial y}$ bilden wir die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = a_1 = a_1(y_1, y_2, y_3); \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = b_1 = b_1(y_1, y_2, y_3)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_2} = a_2 = a_2(y_1, y_2, y_3); \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = b_2 = b_2(y_1, y_2, y_3)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_3} = a_3 = a_3(y_1, y_2, y_3); \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_3} = b_3 = b_3(y_1, y_2, y_3)$$

und stellen durch die Schreibweise ausdrücklich klar, daß die a_i und b_i, i = 1,2,3, keine Konstanten sondern im allgemeinen nichtlinearen Fall Funktionen der Unbekannten y^i sind. In vertrauter Schreibweise ist dann

$$\left.\frac{\partial f(y)}{\partial y}\right/_{\hat{y}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} := B/_{\hat{y}} \, .$$

Die nichtlinearen fünf Normalgleichungen (4) zur Ermittlung der $\hat{y} = (\hat{y}_1 \hat{y}_2 \hat{y}_3)$ lauten dann - dabei schreiben wir zur Vereinfachung der Indizierung im folgenden anstelle $\hat{y}$ immer y (und gelegentlich auch statt $a_i(y_1, y_2, y_3)$ und $b_i(y_1, y_2, y_3)$ lediglich $a_i\, b_i$), ohne den inhaltlichen Sachverhalt durch diese vereinfachende Schreibweise zu berühren:

$$
\begin{aligned}
y_1 - \frac{k_1}{p_1} \cdot a_1(y_1, y_2, y_3) - \frac{k_2}{p_1} \cdot b_1(y_1, y_2, y_3) &= \ell_1 \\
y_2 - \frac{k_1}{p_2} \cdot a_2(y_1, y_2, y_3) - \frac{k_2}{p_2}\, b_2(y_1, y_2, y_3) &= \ell_2 \\
y_3 - \frac{k_1}{p_3} \cdot a_3(y_1, y_2, y_3) - \frac{k_2}{p_2}\, b_3(y_1, y_2, y_3) &= \ell_3 \qquad (7) \mathrel{\hat{=}} (4) \\
f_1(y_1, y_2, y_3) &= s_1 \\
f_2(y_1, y_2, y_3) &= s_2 \, .
\end{aligned}
$$

Mit dem Ansatz

$$Y_P = Y_P^\circ + \Delta Y_P \qquad P = 1,2,3$$

$$K_t = K_t^\circ + \Delta K_t \qquad t = 1,2$$

gewinnen wir mit dem Taylor'schen Satz und Beschränkung auf Glieder erster Ordnung die Linearisierung der fünf Zeilen von (7), nämlich

1. Zeile:

$$Y_1^\circ + \Delta Y_1 - \frac{a_1}{P_1}(Y_1^\circ, Y_2^\circ, Y_3^\circ) \cdot K_1^\circ - \frac{a_1}{P_1}(Y_1^\circ, Y_2^\circ, Y_3^\circ) \cdot \Delta K_1$$

$$- \frac{\partial a_1}{\partial Y_1} \cdot \frac{1}{P_1} \cdot K_1^\circ \cdot \Delta Y_1 - \frac{\partial a_1}{\partial Y_2} \cdot \frac{1}{P_1} \cdot K_1^\circ \cdot \Delta Y_2 - \frac{\partial a_1}{\partial Y_3} \cdot \frac{1}{P_1} \cdot K_1^\circ \cdot \Delta Y_3$$

$$- \frac{b_1}{P_1} \cdot K_2^\circ - \frac{b_1}{P_1} \cdot \Delta K_2 - \frac{\partial b_1}{\partial Y_1} \cdot \frac{K_2^\circ}{P_1} \cdot \Delta Y_1 - \frac{\partial b_1}{\partial Y_2} \cdot \frac{K_2^\circ}{P_1} \cdot \Delta Y_2 - \frac{\partial b_1}{\partial Y_3} \cdot \frac{K_2^\circ}{P_1} \cdot \Delta Y_3 = \ell_1$$

2. Zeile:

$$Y_2^\circ + \Delta Y_2 - \frac{a_2}{P_2} K_1^\circ - \frac{a_2}{P_2} \cdot \Delta K_1 - \frac{\partial a_2}{\partial Y_1} \cdot \frac{K_1^\circ}{P_2} \cdot \Delta Y_1 - \frac{\partial a_2}{\partial Y_2} \cdot \frac{K_1^\circ}{P_2} \cdot \Delta Y_2$$

$$- \frac{\partial a_2}{\partial Y_3} \cdot \frac{K_1^\circ}{P_2} \cdot \Delta Y_3 - \frac{b_2}{P_2} \cdot K_2^\circ - \frac{b_2}{P_2} \cdot \Delta K_2 - \frac{\partial b_2}{\partial Y_1} \cdot \frac{K_2^\circ}{P_2} \cdot \Delta Y_1 - \frac{\partial b_2}{\partial Y_2} \cdot \frac{K_2^\circ}{P_2} \cdot \Delta Y_2$$

$$- \frac{\partial b_2}{\partial Y_3} \cdot \frac{K_2^\circ}{P_2} \cdot \Delta Y_3 = \ell_2$$

3. Zeile:

$$Y_3^\circ + \Delta Y_3 - \frac{a_3}{P_3} \cdot K_1^\circ - \frac{a_3}{P_3} \cdot \Delta K_1 - \frac{\partial a_3}{\partial Y_1} \cdot \frac{K_1^\circ}{P_3} \cdot \Delta Y_1 - \frac{\partial a_3}{\partial Y_2} \cdot \frac{K_1^\circ}{P_3} \cdot \Delta Y_2 -$$

$$- \frac{\partial a_3}{\partial Y_3} \cdot \frac{K_1^\circ}{P_3} \cdot \Delta Y_3 - \frac{b_3}{P_3} \cdot K_2^\circ - \frac{b_3}{P_3} \cdot \Delta K_2 - \frac{\partial b_3}{\partial Y_1} \cdot \frac{K_2^\circ}{P_3} \cdot \Delta Y_1 -$$

$$- \frac{\partial b_3}{\partial Y_2} \cdot \frac{K_2^\circ}{P_3} \cdot \Delta Y_2 - \frac{\partial b_3}{\partial Y_3} \cdot \frac{K_2^\circ}{P_3} \cdot \Delta Y_3 = \ell_3$$

4. Zeile:

$$a_1 \cdot \Delta Y_1 + a_2 \cdot \Delta Y_2 + a_3 \cdot \Delta Y_3 + f_1(Y_1^\circ, Y_2^\circ, Y_3^\circ) = s_1$$

5. Zeile:

$$b_1 \cdot \Delta Y_1 + b_2 \cdot \Delta Y_2 + b_3 \cdot \Delta Y_3 + f_2(Y_1^\circ, Y_2^\circ, Y_3^\circ) = s_2 .$$

Nach Ordnen ergibt sich folgendes Koeffizientenschema

ΔY_1	ΔY_2	ΔY_3	ΔK_1	ΔK_2	re Seite
$1-\frac{\partial a_1}{\partial Y_1}\cdot\frac{K_1^\circ}{P_1}-\frac{\partial b_1}{\partial Y_1}\cdot\frac{K_2^\circ}{P_1}$	$-\frac{\partial a_1}{\partial Y_2}\cdot\frac{K_1^\circ}{P_1}-\frac{\partial b_1}{\partial Y_2}\cdot\frac{K_2^\circ}{P_1}$	$-\frac{\partial a_1}{\partial Y_3}\cdot\frac{K_1^\circ}{P_1}-\frac{\partial b_1}{\partial Y_3}\cdot\frac{K_2^\circ}{P_1}$	$-\frac{a_1}{P_1}$	$-\frac{b_1}{P_1}$	$\ell_1 - Y_1^\circ + \frac{a_1}{P_1}\cdot K_1^\circ + \frac{b_1}{P_1}\cdot K_2^\circ$
$-\frac{\partial a_2}{\partial Y_1}\cdot\frac{K_1^\circ}{P_2}-\frac{\partial b_2}{\partial Y_1}\cdot\frac{K_2^\circ}{P_2}$	$1-\frac{\partial a_2}{\partial Y_2}\cdot\frac{K_1^\circ}{P_2}-\frac{\partial b_2}{\partial Y_2}\cdot\frac{K_2^\circ}{P_2}$	$-\frac{\partial a_2}{\partial Y_3}\cdot\frac{K_1^\circ}{P_2}-\frac{\partial b_2}{\partial Y_3}\cdot\frac{K_2^\circ}{P_2}$	$-\frac{a_2}{P_2}$	$-\frac{b_2}{P_2}$	$\ell_2 - Y_2^\circ + \frac{a_2}{P_2}\cdot K_1^\circ + \frac{b_2}{P_2}\cdot K_2^\circ$
$-\frac{\partial a_3}{\partial Y_1}\cdot\frac{K_1^\circ}{P_3}-\frac{\partial b_3}{\partial Y_1}\cdot\frac{K_2^\circ}{P_3}$	$-\frac{\partial a_3}{\partial Y_2}\cdot\frac{K_1^\circ}{P_3}-\frac{\partial b_3}{\partial Y_2}\cdot\frac{K_2^\circ}{P_3}$	$1-\frac{\partial a_3}{\partial Y_3}\cdot\frac{K_1^\circ}{P_3}-\frac{\partial b_3}{\partial Y_3}\cdot\frac{K_2^\circ}{P_3}$	$-\frac{a_3}{P_3}$	$-\frac{b_3}{P_3}$	$\ell_3 - Y_3^\circ + \frac{a_3}{P_2}\cdot K_2^\circ + \frac{b_3}{P_3}\cdot K_3^\circ$
a_1	a_2	a_3	0	0	$s_1 - f_1(Y_1^\circ, Y_2^\circ, Y_3^\circ)$
b_1	b_2	b_3	0	0	$s_2 - f_2(Y_1^\circ, Y_2^\circ, Y_3^\circ)$

(8)

Um die Gleichungen (8) in eine Iterationsvorschrift zu überführen, bestimmen wir die Näherungswerte $\mathbf{Y}_o$ und $\mathbf{k}_o$ aus dem linearen Ansatz

$$k^\circ := (\mathbf{B}'\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{s}-\mathbf{f}(\boldsymbol{\ell})) \quad \text{mit} \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\ell})}{\partial \boldsymbol{\ell}}$$

$$y^\circ := \boldsymbol{\ell} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\cdot\mathbf{k}_o .$$

("0'te Iteration")

Damit können wir alle Koeffizienten des Systems bestimmen.

Als Ergebnis der 1. verbesserten Lösung bekommt man

$$Y_1^1 = Y_1^\circ + \Delta Y_1, \qquad K_1^1 = K_1^\circ + \Delta K_1^1,$$

$$Y_2^1 = Y_2^\circ + \Delta Y_1, \qquad K_2^1 = K_2^\circ + \Delta K_1^2.$$

$$Y_3^1 = Y_3^\circ + \Delta Y_1 .$$

Iterationssystem (9)

Δy_1^{i+1}	Δy_2^{i+1}	...	Δy_n^{i+1}	ΔK_1^{i+1}	ΔK_2^{i+1}	...	ΔK_r^{i+1}	re Seite
$1 - \frac{\partial a_1}{\partial y_1}\cdot\frac{K_1^i}{P_1} - \frac{\partial b_1}{\partial y_1}\cdot\frac{K_2^i}{P_1} - \dots - \frac{\partial r_1}{\partial y_1}\cdot\frac{K_r^i}{P_1}$	$-\frac{\partial a_1}{\partial y_2}\cdot\frac{K_1^i}{P_1} - \frac{\partial b_1}{\partial y_2}\cdot\frac{K_2^i}{P_1} - \dots - \frac{\partial r_1}{\partial y_2}\cdot\frac{K_r^i}{P_1}$	...	$-\frac{\partial a_1}{\partial y_n}\cdot\frac{K_1^i}{P_1} - \frac{\partial b_1}{\partial y_n}\cdot\frac{K_2^i}{P_1} - \dots - \frac{\partial r_1}{\partial y_n}\cdot\frac{K_r^i}{P_1}$	$-\frac{a_1^i(y_1\cdots y_n)}{P_1}$	$-\frac{b_1^i}{P_1}$	...	$-\frac{r_1^i}{P_1}$	$\ell_1 - y_1^i + \frac{a_1}{P_1}\cdot K_1^i + \dots + \frac{r_1}{P_1}\cdot K_r^i$
$-\frac{\partial a_2}{\partial y_1}\cdot\frac{K_1^i}{P_2} - \frac{\partial b_2}{\partial y_1}\cdot\frac{K_2^i}{P_2} - \dots - \frac{\partial r_2}{\partial y_1}\cdot\frac{K_r^i}{P_2}$	$1 - \frac{\partial a_2}{\partial y_2}\cdot\frac{K_1^i}{P_2} - \frac{\partial b_2}{\partial y_2}\cdot\frac{K_2^i}{P_2} - \dots - \frac{\partial r_2}{\partial y_2}\cdot\frac{K_r^i}{P_2}$	...	$-\frac{\partial a_2}{\partial y_n}\cdot\frac{K_1^i}{P_2} - \frac{\partial b_2}{\partial y_n}\cdot\frac{K_2^i}{P_2} - \dots - \frac{\partial r_2}{\partial y_n}\cdot\frac{K_r^i}{P_2}$	$-\frac{a_2^i}{P_2}$	$-\frac{b_2^i}{P_2}$	...	$-\frac{r_2^i}{P_2}$	$\ell_2 - y_2^i + \frac{a_2}{P_2}\cdot K_1^i + \dots + \frac{r_2}{P_2}\cdot K_r^i$
⋮		⋱				⋱		
$-\frac{\partial a_n}{\partial y_1}\cdot\frac{K_1^i}{P_n} - \frac{\partial b_n}{\partial y_1}\cdot\frac{K_2^i}{P_n} - \dots - \frac{\partial r_n}{\partial y_1}\cdot\frac{K_r^i}{P_n}$	$-\frac{\partial a_n}{\partial y_2}\cdot\frac{K_1^i}{P_n} - \frac{\partial b_n}{\partial y_2}\cdot\frac{K_2^i}{P_n} - \dots - \frac{\partial r_n}{\partial y_2}\cdot\frac{K_r^i}{P_n}$	...	$1 - \frac{\partial a_n}{\partial y_n}\cdot\frac{K_1^i}{P_n} - \frac{\partial b_n}{\partial y_n}\cdot\frac{K_2^i}{P_n} - \dots - \frac{\partial r_n}{\partial y_n}\cdot\frac{K_r^i}{P_n}$	$-\frac{a_n^i}{P_n}$	$-\frac{b_n^i}{P_n}$	...	$-\frac{r_n^i}{P_n}$	$\ell_n - y_n^i + \frac{a_n}{P_n}\cdot K_1^i + \dots + \frac{r_n}{P_n}\cdot K_r^i$
$a_1^i(y_1^i,\dots,y_n^i)$	$a_2^i(y_1^i,\dots,y_n^i)$	...	$a_n^i(y_1^i,\dots,y_n^i)$	0	0	...	0	$s_1 - f_1(y_1^i,\dots,y_n^i)$
$b_1^i(y_1^i,\dots,y_n^i)$	$b_2^i(y_1^i,\dots,y_n^i)$	...	$b_n^i(y_1^i,\dots,y_n^i)$	0	0		0	$s_2 - f_2(y_1^i,\dots,y_n^i)$
⋮		⋱				...		
$r_1^i(y_1^i,\dots,y_n^i)$	$r_2^i(y_1^i,\dots,y_n^i)$	...	$r_n^i(y_1^i,\dots,y_n^i)$	0	0		0	$s_r - f_r(y_1^i,\dots,y_n^i)$

- Iterationsschrite: i=0,1,....,u.
- Alle partiellen Ableitungen sind immer an der Stelle y^i zu nehmen; bei den partiellen Differentialquotienten ist der Iterationsindex i nicht im Schema angeschrieben.

und bestimmt damit erneut die Koeffizienten des Gleichungssystems und den nächsten Satz von Unbekannten.

Allgemein haben wir also für die (i+1)-te Iteration das Gleichungssystem (9). (Dabei haben wir die Anzahl der Bedingungen mit r und die Anzahl der Beobachtungen ≙ Anzahl der Unbekannten mit n angenomen). (9) ist ein Gleichungssystem mit n+r Unbekannten. Praktisch sind jedoch viele der Koeffizienten des Systems gleich 0, da viele der partiellen Ableitungen identisch Null sind.

Aus den Gleichungen (9) lassen sich einige interessante Tatsachen ablesen:

1) Das System bleibt auch für lineare Bedingungsgleichungen gültig! In diesem Fall verschwinden nämlich alle partiellen Ableitungen und alle rechten Seiten werden zu Null, da die Bedingungsgleichungen bereits in <u>einem</u> Ausgleichungsschritt erfüllt sind.

Das verbleibende System kann dann in der Form geschrieben werden

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \Delta y \; - \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \Delta k &= 0 \\ \mathbf{B}^T \cdot \Delta y \; \pm \; 0 \qquad &= 0 . \end{aligned} \tag{10}$$

Dies ist ein homogenes Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & 0 \end{pmatrix} .$$

Wie sich leicht einsehen läßt, hat es vollen Rang (n+r): Zunächst hat bei richtig aufgestellten Bedingungsgleichungen $\mathbf{B}$ vollen Spalten-und $\mathbf{B}^T$ vollen Zeilenrang, also r, da die Bedingungsgleichungen gegenseitig unabhängig sind. Weiter hat die linke Teilmatrix $\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix}$ vollen Spaltenrang, nämlich n, da sich wegen der Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ im oberen Teil keine ihrer Spalten linear aus den übrigen kombinieren läßt. Der volle Rang (n+r) würde also nur dann nicht auftreten, wenn sich eine der Spalten von $-\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$ linear aus den Spalten $\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix}$ kombinieren ließe, und umgekehrt.

Wir denken uns die Matrix $\mathbf{B}$ durch ihre Spalten - bzw. $\mathbf{B}^T$ durch ihre Zeilenvektoren dargestellt, also $\mathbf{B} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \cdot\cdot \mathbf{r})$,

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}^T \end{pmatrix} .$$

Um die 1. Spalte von $P^{-1}B$ - also $P^{-1}a$ - linear aus der linken Teilmatrix $\begin{pmatrix} E \\ B' \end{pmatrix}$ zu kombinieren, müssen wir die einzelnen Spalten nacheinander mit $\frac{a_1}{p_1}, \frac{a_2}{p_2}, \frac{a_n}{p_n}$ multiplizieren und addieren, d.h. wir müssen mit dem Vektor $P^{-1}a$ multiplizieren: $(P^{-1}a)$

$$\begin{pmatrix} E \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1}a \\ B'P^{-1}a \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \text{Widerspruch!}$$

Die Linearkombination des unteren Teils kann aber nicht - wie es dann sein müßte - den Nullvektor ergeben, da $B'P^{-1}a \neq 0$ auf alle Fälle gilt, denn $B'P^{-1}a$ enthält zumindest das Element $a'Pa$, welches ungleich Null ist.

Analog läßt sich die Unmöglichkeit der Linearkombination für alle weiteren Spaltenvektoren zeigen, sodaß folgt, daß das Gleichungssystem vollen (n+r)-Rang hat. In diesem Fall hat es aber für den Fall des homogenen Systems nur die triviale Lösung, daß alle Unbekannten 0 sind:

$$\Delta y_1 = \Delta y_2 \cdots = \Delta y_n = \Delta K_1 = \cdots = \Delta K_r = 0$$

2) Für den Fall, daß - auch in einem nichtlinearen Problem - die oben definierte 0'te Iteration bereits die nichtlinear ermittelten Widersprüche verschwinden läßt, ist dies nur dann die SLS-Lösung, wenn auch die ersten n der nichtlinearen Normalgleichungen an der Stelle y_0 für die Jakobimatrix $\frac{\partial f(y)}{\partial y}/_{y_0}$ erfüllt sind.

3) Die ersten n rechten Seiten des Iterationsssystems sind

$$l - y^i + \frac{\partial f(y^i)}{\partial y}/_{y_i} \cdot K_i ,$$

wobei die $\quad y^i \longrightarrow \hat{y}$

und $\quad K^i \longrightarrow K$

konvergieren, d.h. die rechten Seiten konvergieren im Laufe der Iterationen gegen 0, wie der Vergleich mit (4) zeigt. Wäre nun (immer!?) der Rang des Iterationssystems (9) gleich (n+r), so bekäme man im Verlaufe der Iteration ein zunehmend homogenes System mit vollem Rang der Koeffizientenmatrix, und es bliebe nur noch die triviale Lösung "alle Unbekannten gleich "0", gleichbedeutend mit einem eindeutigen Ende des Iterationsprozesses. Tatsächlich aber dürfte eine Aussage über den "numerischen Rang" des erweiterten Systems nicht ohne weiteres möglich sein, sodaß auch schlechte Konditionen der Matrix in (9) und damit schlechte Konvergenzeigenschaften denkbar sind.

4) Zwei einfache Zahlenbeispiele zu b)

Die beiden Zahlenbeispiele entnehmen wir aus /8/; sie können leicht mit dem Taschenrechner nachgerechnet werden. Als Bedingungsgleichungssystem wählen wir für $\mathbf{f}(\mathbf{y})=\mathbf{s}$ mit einer Gleichung $f_1(y_1, y_2) = -y_1^2 + y_2 = 0$.

Es ist also n=2 und r=1. Die Gewichte seien gleich $1 \hat{=} \mathbf{P}=\mathbf{E}$ und die Beobachtungen $l_1 = 3$, $l_2 = 0$.

Dann ist

$$\frac{\partial f(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2} \right) = (-2y_1, +1) := \mathbf{B}^T .$$

Als 0'te Iteration wählen wir

$$y_1 := l_1 = 3$$
$$y_2 := l_2 = 0$$

und bekommen damit $\mathbf{B}^T/_{y_0} = (-6 \quad +1)$.

Die Normalgleichungen sind dann

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{B}) \cdot K_0 = \mathbf{s} - \mathbf{f}(y_0) \Rightarrow 37\, K_0 = 0 - (-3^2 + 0^2) = 9$$
$$K_0 = 9/37 = +0{,}24 ,$$

und man erhält als Verbesserungen

$$v_1 = -6 \cdot 0{,}24 = -1{,}46 \Rightarrow y_1^0 = l_1 + v_1 = 3 - 1{,}46 = 1{,}54$$
$$v_2 = 1 \cdot 0{,}24 = 0{,}24 \Rightarrow y_2^0 = l_2 + v_2 = 0 + 0{,}24 = 0{,}24$$

Die Startwerte für den nächsten Schritt sind also

$$y_1^0 = 1{,}54 ,$$
$$y_2^0 = 0{,}24 ,$$
$$K^0 = 0{,}24 ,$$

und für die Elemente der Jakobimatrix gilt

$$\frac{\partial f(Y)}{\partial Y}\Big/ Y^{\circ} = \left(-2Y_1^{\circ}\ ,\ +1\right) = (\underbrace{-3{,}08}_{a_1}\ \underbrace{+1}_{a_2}).$$

Für die zweiten Ableitungen bekommt man

$$\frac{\partial a_1}{\partial Y_1} = -2\ ;\quad \frac{\partial a_1}{\partial Y_2} = 0,\ \frac{\partial a_2}{\partial Y_1} = 0,\ \frac{\partial a_2}{\partial Y_2} = 0.$$

Damit können wir sofort das Iterationssystem (9) ansetzen

ΔY_1^1	ΔY_2^1	ΔK^1	re Seite
$1-(-2)\cdot 0{,}24 = 1{,}48$	0	+ 3,08	$3 - 1{,}54 - 3{,}08 \cdot 0{,}24 = 0{,}71$
0	1	- 1	$0 - 0{,}24 + 1 \cdot 0{,}24 = 0$
- 3,08	+ 1	0	$0 - (-1{,}54^2 + 0{,}24) = 2{,}13$

Wir erhalten die Lösungen

$$\Delta Y_1^1 = -0{,}53\ ;\quad \Delta Y_2^1 = +0{,}50,\quad \Delta K^1 = 0{,}50$$

und damit die Werte der Unbekannten nach dem 1. Iterationsschritt

$$Y_1^1 = Y_1^0 + \Delta Y_1^1 = 1{,}54 - 0{,}53 = 1{,}01,$$

$$Y_2^1 = Y_2^0 + \Delta Y_2^1 = 0{,}24 + 0{,}50 = 0{,}74,$$

$$K^1 = K^0 + \Delta K^1 = 0{,}24 + 0{,}50 = 0{,}74.$$

Für den nachfolgenden 2. Iterationsschritt bleiben die zweiten Ablei-tungen unverändert; für die Jakobimatrix gilt

$$\frac{\partial f(Y)}{\partial Y} = (-2Y_1^1\ ,\ +1) = (-2{,}02\ ,\ +1),$$

und man erhält das neue Iterationssystem

Δy_1^2	Δy_2^2	ΔK^2	re Seite
$1 + 2 \cdot 0{,}74 = 2{,}48$	0	$+ 2{,}02$	$3 - 1{,}01 - 2{,}02 \cdot 0{,}74 = 0{,}50$
0	1	-1	0
$-2{,}02$	1	0	$0 - (-1{,}01^2 + 0{,}74) = +0{,}28$

mit den Lösungen

$$\Delta y_1^2 = -0{,}01, \quad \Delta y_2^2 = +0{,}26, \quad \Delta K^2 = 0{,}26$$

und als Ergebnis nach dem 2. Iterationsschritt

$$y_1^2 = y_1^1 + \Delta y_1^2 = 1{,}01 - 0{,}01 = 1{,}00 = \hat{y}_1$$

$$y_2^2 = y_2^1 + \Delta y_2^2 = 0{,}74 + 0{,}26 = 1{,}00 = \hat{y}_2$$

$$K^2 = K^1 + \Delta K^2 = 0{,}74 + 0{,}26 = 1{,}00 = K$$

Dies ist bereits das endgültige Ergebnis, wie uns die Kontrolle mit der exakten Formel zeigt:

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} \Big/ _{y^2 = \hat{y}} = (\underbrace{-2}_{a_1} \quad \underbrace{+1}_{a_2})$$

also

$$\hat{y}_1 - a_1 \cdot K = \ell_1 \rightarrow 1{,}00 - (-2) \cdot 1 = 3 \checkmark$$

$$\hat{y}_2 - a_2 \cdot K = \ell_2 \rightarrow 1{,}00 - 1 \cdot 1 = 0 \checkmark$$

In Übereinstimmung mit dem Zahlenbeispiel in /8/ rechnen wir nun die gleiche Aufgabe mit dem abgeänderten Beobachtungsvektor

$$\ell = (3, \; -1) \;\hat{=}\; \ell_1 = 3, \quad \ell_2 = -1$$

durch. In genau gleicher Vorgehensweise erhalten wir dann:

Ergebnis 0'te Iteration ("linearer Ansatz")

$$y_1^0 = 1{,}38, \quad y_2^0 = -0{,}73, \quad K^0 = 0{,}27$$

$$s - f(y^0) = 2{,}63 .$$

Das Iterationssystem liefert weiter im:

1. Schritt:

$$Y_1^1 = Y_1^0 + \Delta Y_1^1 = +1{,}38 - 0{,}70 = +0{,}68$$

$$Y_2^1 = Y_2^0 + \Delta Y_2^1 = -0{,}73 + 0{,}70 = -0{,}03$$

$$K^1 = K^0 + \Delta K^1 = +0{,}27 + 0{,}70 = +0{,}97\,,$$

2. Schrit:

$$Y_1^2 = Y_1^1 + \Delta Y_1^2 = +0{,}68 - 0{,}17 = +0{,}51$$

$$Y_2^2 = Y_2^1 + \Delta Y_2^2 = -0{,}03 + 0{,}20 = +0{,}17$$

$$K^2 = K^1 + \Delta K^2 = +0{,}97 + 0{,}20 = +1{,}17\,,$$

3. Schritt:

$$Y_1^3 = \cdots = +0{,}51 + 0{,}27 = +0{,}78$$

$$Y_2^3 = \cdots = +0{,}17 + 0{,}37 = +0{,}54$$

$$K^3 = \cdots = +1{,}17 + 0{,}37 = +1{,}54\,,$$

4. Schritt:

$$Y_1^4 = \cdots = +0{,}78 - 0{,}045 = +0{,}735 = \hat{Y}_1$$

$$Y_2^4 = \cdots = +0{,}54 \pm 0 = +0{,}54 = \hat{Y}_2$$

$$K^4 = \cdots = +1{,}54 \pm 0 = +1{,}54 = K.$$

Die Schlußkontrolle ergibt:

$$\hat{Y}_1 - a_1 \cdot K = \ell_1 \Longrightarrow 0{,}735 - (-1{,}47) \cdot 1{,}54 = 2{,}999 \quad \checkmark$$

$$\hat{Y}_2 - a_2 \cdot K = \ell_2 \Longrightarrow 0{,}54 - 1{,}54 = -1 \quad \checkmark$$

$$0{,}735^2 - 0{,}54 = 0{,}54 - 0{,}54 = 0 \quad \checkmark$$

als durchgreifende Probe für das Ergebnis.

Der Vergleich mit dem gleichen Zahlenbeispiel in /8/ zeigt

1) Das endgültige Iterationsergebnis - die strenge SLS-Lösung - unserer Rechnung stimmt vollkommen mit dem Ergebnis aus /8/ überein.

2) Für die beiden Zahlenbeispiele konvergiert die hier vorgestellte Methode wesentlich schneller als die Methoden in /8/:

   - die ungedämpfte SLS-Lösung aus /8/ konvergiert im 2. Beispiel sehr schlecht und führt auf ein oszillierendes Verhalten,

   - die gedämpfte SLS-Lösung führt im 2. Beispiel erst nach 10 Iterationen zum Ziel, welches bei uns schon nach 5 Schritten erreicht wird,

   - zur Konvergenz des 1. Beispiels werden in /8/ 4 Schritte, bei uns nur 3 benötigt.

Ob die in den beiden kleinen Zahlenbeispielen gezeigten guten Konvergenzeigenschaften der hier vorgeführten Methode eine allgemeine Eigenschaft des Verfahrens sind, läßt sich natürlich erst nach weiteren Testrechnungen bzw. einer allgemeinen Untersuchung der Konditionseigenschaften der (n+r)-Matrix des Iterationssystems (9) sagen. Desgleichen müssen weitere Beispiele zeigen, wie schnell das im Vergleich zu /8/ jetzt "große", (n+r)-Iterationssystem gelöst werden kann. Vermutlich werden die Lösungsschritte aber sehr schnell sein, da viele zweite Ableitungen identisch Null sind, sodaß die (n+r)-Matrix des Systems in der Praxis immer dünn besiedelt ist. Dies, verbunden mit möglicherweise guten Konvergenzeigenschaften, würde die Methode auch numerisch leistungsfähig machen.

Literaturhinweise

/1/ Wolf, H.: Das Fehlerfortpflanzungsgesetz mit Gliedern II. Ordnung. ZfV 1961, S. 86-88

/2/ Linkwitz, K.: Einige Bemerkungen zum Fehlerfortpflanzungsgesetz und über die Einführung von Ersatzbeobachtungen. ZfV 1969, S. 57-71

/3/ Linkwitz, K., Schek, H.-J.: Einige Bemerkungen zur Berechnung vorgespannter Seilnetzkonstruktionen, Ingenieurarchiv 1970, S. 145-158

/4/ Pope, A.J.: Some pitfalls to be avoided in the iterative adjustment of nonlinear problems. Proc. of the 38th Annual Meeting of the American Society of Photogrammetry, Washington, D.C. March 1972

/5/ Linkwitz, K.: Über die Substition von Variablen ("Ersatzbeobachtungen") bei der Ausgleichung nichtlinearer bedingter Beobachtungen. ZfV 1972, Heft 2.

/6/ Stark, E., Mikhail, E.: Least Squares and Nonlinear Functions. Photogrammetric Engineering 1973, S. 405-412.

/7/ Schek, H.-J.: Ergänzungen zur Ausgleichungsrechnung. Vorlesungsmanuskript 1973, Universität Stuttgart, unveröffentlicht.

/8/ Schek, H.-J.:Least Squares-Lösungen und optimale Dämpfung bei nichtlinearen Gleichungssystemen im Zusammenhang mit der bedingten Ausgleichung. ZfV 1975, Heft 2.

/9/ Schek, H.-J., Maier, Ph.: Nichtlineare Normalgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten und deren Kovarianzmatrix. ZfV 1976, Heft 4.

/10/ Linkwitz, K.: Über eine neue Anwendung der Gauß'schen Methode der Kleinsten Quadrate, Festschrift Carl Friedrich Gauss; Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, Band XVII, Verlag Erich Goltze KG, Göttingen, 1977.

/11/ Linkwitz, K.: Über fehlerzeigende Figuren. AVN 1985, Seite 434-454.