

## PHOTOGRAMMETRISCHE POSITIONIERUNG

Erik W. Grafarend, Stuttgart

SUMMARY

Photogrammetric positioning in a three-dimensional Euclidian space is identified as the solving of a combined three-dimensional resection-intersection problem. Here we analytically solve in a *closed form* (free of linearization in the unknowns) the photogrammetric three-dimensional resection as well as the photogrammetric three-dimensional intersection problem. The solution of this type was made possible by an extensive use of normalized Hamilton quaternions for the parametrization of the rotation matrix between the photogrammetric sensor frame and the global geodetic reference system. The described new solution in closed form has been practically tested in close-range photogrammetry as well as in robotics.

0. EINLEITUNG

Zur photogrammetrischen Positionierung ist als Hauptaufgabe ein *kombinierter Rückwärts-Vorwärtsschnitt* zu lösen. Drei Altpunkte im Objektraum erlauben im Rahmen einer photogrammetrischen Aufnahme die Ermittlung der drei kartesischen Koordinaten des Perspektivzentrums und der drei Orientierungsparameter der Aufnahmekamera. Sind infolge eines doppelten Rückwärtsschnittes diese Parameter für *zwei Perspektivzentren* bestimmt, so lassen sich die drei kartesischen Koordinaten eines Punktes im Objektraum über einen dreidimensionalen Vorwärtsschnitt festlegen. Nach Lösung der Hauptaufgabe kann an die Ausgleichung photogrammetrischer Streifen und Blöcke herangegangen werden (*F. Ackermann* 1963, 1973, 1983, 1985).

In der herkömmlichen photogrammetrischen Formulierung des *kombinierten dreidimensionalen Rückwärts-Vorwärtsschnittes* treten hochgradig nichtlineare Gleichungen auf, die üblicherweise über Iterationsverfahren linear gelöst werden. Wegen der grundsätzlichen Mehrdeutigkeit des dreidimensionalen Rückwärtsschnittes sind Linearisierungsverfahren problematisch: An welcher der grundsätzlich vier Lösungsstellen soll iteriert werden? Der anschließende dreidimensionale Vorwärtsschnitt ist einfach überbestimmt. Üblicherweise stellt sich ein *nichtlineares* Ausgleichungsproblem. Wir möchten hier bei dem photogrammetrischen kombinierten Rückwärts-Vorwärtsschnitt *geschlossene Lösungen ohne jegliche Linearisierung* vorstellen. Derartige Lösungen wurden insbesondere dadurch möglich, daß wir die unumgängliche Drehmatrix zwischen Sensorsystem und globalem Referenzsystem mit den genialen Hamilton *normierten Quaternionen* parametrisiert haben und damit das Gleichungssystem "algebraisieren" konnten. Insbesondere treten keine so nichtlinearen trigonometrischen Funktionen (Kreisfunktionen) auf. In den unbekanntem kartesischen Koordinaten und Orientierungsparametern erwies sich das Gleichungssystem als linear!

Es sollte angemerkt sein, daß der hier vorgestellte kombinierte Rückwärts-Vorwärtsschnitt im dreidimensionalen Euklidischen Raum besondere Eignung in der *geodätischen Positionierung* mittels LPS (lokale Positionierungssysteme, elektronische Tachymeter) und erfahrungsgemäß in der *Robotik* hat.

Im *ersten kurzen Abschnitt* stellen wir den photogrammetrischen dreidimensionalen Rückwärtsschnitt vor, dessen Lösung mit numerischen *photogrammetrischen Beispielen* in *E. Grafarend, P. Lohse und B. Schaffrin* (1989) ausführlich beschrieben ist. Die Mehrdeutigkeit des dreidimensionalen Rückwärtsschnittes ist außer dort in *M. A. Fischler und R. Bolles* (1981) und in *S. Linnainmaa et al* (1988) exemplarisch belegt. Parametrisierungen der Drehmatrix in Hamilton normierten Quaternionen sind ausführlich in *E. Grafarend* (1983), *E. Grafarend und B. Schaffrin* (1982) und *G. H. Schut* (1958, 1960) diskutiert worden, das entsprechende Werkzeug zur Lösung des dreidimensionalen Rückwärtsschnittes in Form von *algebraischen* Gleichungssystemen.

Der *zweite kurze Abschnitt* ist dem photogrammetrischen dreidimensionalen Vorwärtsschnitt gewidmet. Ausgehend von den einfach überbestimmten vier projektiven Gleichungen werden die linear auftretenden Neupunktskoordinaten mittels Bedingungsgleichungen mit Unbekannten bestimmt. Allerdings ist das projektive Gleichungssystem nichtlinear in den Erwartungswerten. Da in den Beobachtungen selbst hierfür Näherungswerte vorliegen, lassen sich an dieser Stelle die Gleichungen nur in diesen Beobachtungen linearisieren, indem als Abweichung vom Erwartungswert der Beobachtungen der Vektor der Meßfehler eingeführt wird. Aus Platzgründen mußte leider auf ein

numerisches Beispiel verzichtet werden.

Möge dem *Jubilar F. Ackermann*, Begründer der *analytischen Photogrammetrie*, dieser Festbeitrag ein wenig analytische Freude bereiten!

## 1. DER DREIDIMENSIONALE RÜCKWÄRTSSCHNITT

Der *dreidimensionale Rückwärtsschnitt in seiner photogrammetrischen Version* hat zur Aufgabe, aus den Plattenkoordinaten  $X_p, Y_p$  dreier Punkte des Objektraumes, die Koordinaten  $x, y, z$  des Perspektivzentrums und die Orientierung  $a, b, c$  der Kamera zu bestimmen. Um an den dreidimensionalen Rückwärtsschnitt der projektiven Geometrie anschließen zu können, rechnen wir *im ersten Schritt* die kartesischen Plattenkoordinaten  $X_p, Y_p$  dreier Punkte  $i = 1, 2, 3$  des Objektraumes in *Metallänge*  $A$  ( $0 \leq A < 2\pi$ ) und *Metabreite*  $B$  ( $-\pi/2 < B < +\pi/2$ ) um:

$$\tan A = \frac{Y_p}{X_p}, \quad \tan B = \frac{-f}{\sqrt{X_p^2 + Y_p^2}} \quad (1-1)$$

$Z_p = -f$  bezeichnet die Fokallänge der Kamera;  $\{A_i, B_i\}$  sind die *sphärischen Koordinaten* des relativen Ortsvektors  $\mathbf{X}_i - \mathbf{x}_p$  zwischen dem Ortsvektor  $\mathbf{X}_i$  der Objektpunkte und dem Ortsvektor  $\mathbf{x}_p$  des Perspektivzentrums. Nennen wir den Abstand  $\|\mathbf{X}_i - \mathbf{x}_p\| = s_i$ , so lassen sich *im zweiten Schritt* die sphärischen Koordinaten  $\{s_i, A_i, B_i\}$  mit den kartesischen Koordinaten  $\{X_i - x, Y_i - y, Z_i - z\}$  mittels einer Drehmatrix  $\mathbf{R}$  verknüpfen – *Abb. 1* und *Abb. 2* –

$$s_i \begin{bmatrix} \cos A_i \cos B_i \\ \sin A_i \cos B_i \\ \sin B_i \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} X_i - x \\ Y_i - y \\ Z_i - z \end{bmatrix}, \quad (1-2)$$

da sich die Plattenkoordinaten auf das Kamerasystem (*“Sensor Frame”*) und die Objektkoordinaten auf das globale geodätische System, z. B. das erdfeste Äquatorsystem (*“Global Frame”*) beziehen. Zu den *projektiven Gleichungen* gelangen wir, indem wir je zwei Gleichungen aus (1-2) dividieren und damit den unbekanntem Maßstab – die unbekanntene Strecke  $s_i$  – eliminieren.

### 1. Gleichung

$$\begin{aligned} X_i \cos A_i \cos B_i r_{12} + X_i \sin A_i \cos B_i r_{22} + X_i \sin B_i r_{32} - \\ - Y_i \cos A_i \cos B_i r_{11} - Y_i \sin A_i \cos B_i r_{21} - Y_i \sin B_i r_{31} - \\ - \cos A_i \cos B_i x r_{12} - \sin A_i \cos B_i x r_{22} - \sin B_i x r_{32} + \\ + \cos A_i \cos B_i y r_{11} + \sin A_i \cos B_i y r_{21} + \sin B_i y r_{31} = 0 \end{aligned}$$

### 2. Gleichung

$$\begin{aligned} X_i \cos A_i \cos B_i r_{13} + X_i \sin A_i \cos B_i r_{23} + X_i \sin B_i r_{33} - \\ - Z_i \cos A_i \cos B_i r_{11} - Z_i \sin A_i \cos B_i r_{21} - Z_i \sin B_i r_{31} - \\ - \cos A_i \cos B_i x r_{13} - \sin A_i \cos B_i x r_{23} - \sin B_i x r_{33} + \\ + \cos A_i \cos B_i z r_{11} + \sin A_i \cos B_i z r_{21} + \sin B_i z r_{31} = 0 \end{aligned} \quad (1-3)$$

### 3. Gleichung

$$\begin{aligned} Y_i \cos A_i \cos B_i r_{13} + Y_i \sin A_i \cos B_i r_{23} + Y_i \sin B_i r_{33} - \\ - Z_i \cos A_i \cos B_i r_{12} - Z_i \sin A_i \cos B_i r_{22} - Z_i \sin B_i r_{32} - \\ - \cos A_i \cos B_i y r_{13} - \sin A_i \cos B_i y r_{23} - \sin B_i y r_{33} + \\ + \cos A_i \cos B_i z r_{12} + \sin A_i \cos B_i z r_{22} + \sin B_i z r_{32} = 0 \end{aligned}$$

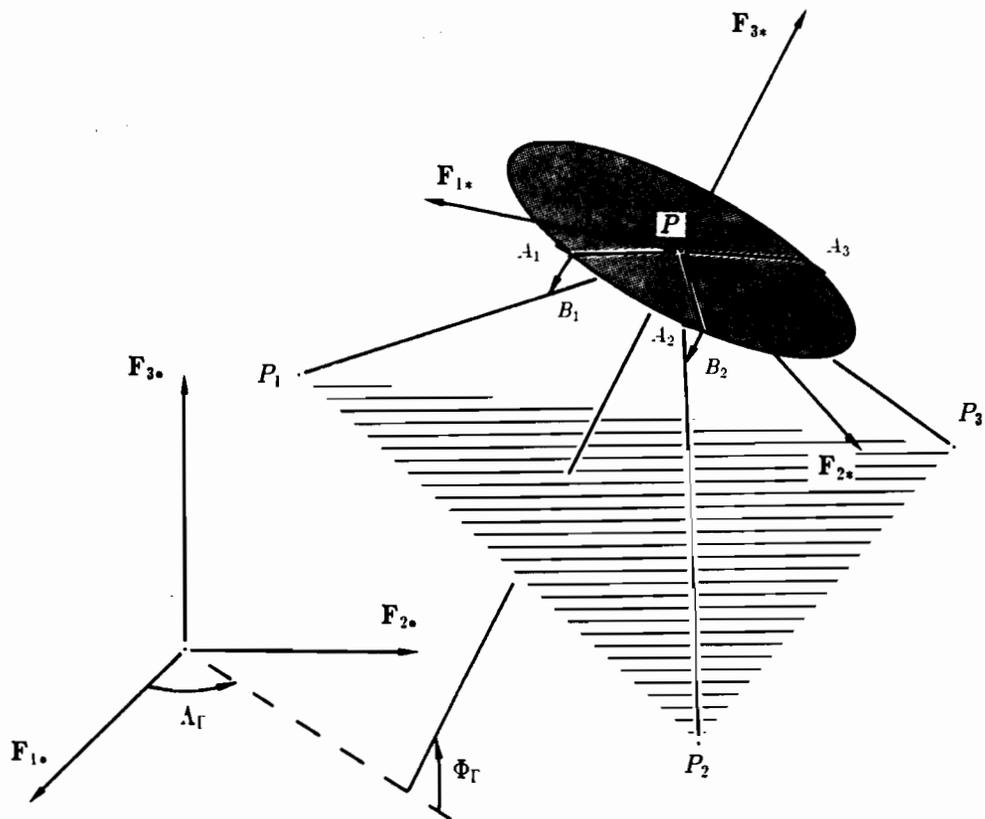


Abb. 1: Meßsystem  $F^*$  ("Sensor Frame") im Perspektivzentrum  $P$ ,  $F_{1^*}$  und  $F_{2^*}$  spannen die Photoplattenebene auf,  $F_{3^*}$  orthonormal dazu;  $F^*$  erdfestes Äquatorsystem ("Global Frame"),  $F_{1^*}$  Greenwich-Richtung,  $F_{3^*}$  Richtung der mittleren terrestrischen Drehachse,  $F_{2^*}$  orthonormal dazu.

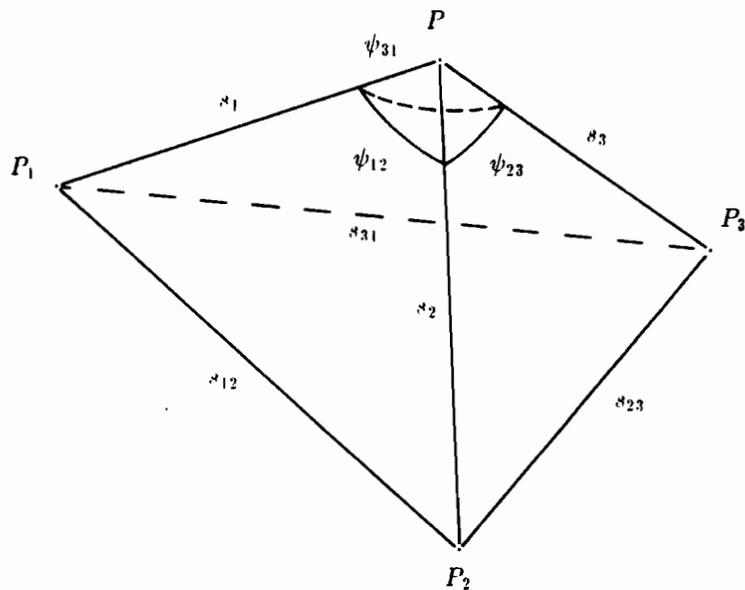


Abb. 2: Dreidimensionaler Rückwärtsschnitt, Neupunkt  $P$  (Perspektivzentrum),  $P_1, P_2, P_3$  Altpunkte, „Meßtetraeder“.

Nur je zwei Gleichungen sind natürlich voneinander unabhängig. Photogrammetrisch wird die Drehmatrix  $\mathbf{R}$  mit Cardan-Winkeln  $\kappa, \varphi, \omega$  als  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1^T(\omega)\mathbf{R}_2^T(\varphi)\mathbf{R}_3^T(\kappa)$  dargestellt. Hier folgen wir der vorteilhaften Parametrisierung der Drehmatrix als Funktion von *normierten Hamilton-Quaternionen*, namentlich

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{S}), \quad \mathbf{S} := \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{S}^T. \quad (1-4)$$

In dieser Parametrisierung bildet (1-3) ein *algebraisches Gleichungssystem vom kubischen Typ* in den Unbekannten  $\{x, y, z, a, b, c\}$ . Prinzipiell ist es möglich, dieses Gleichungssystem mittels Gröbner-Basen geschlossen zu lösen, z. B. mit dem *Buchberger-Algorithmus* (B. Buchberger 1965, 1970, 1979, 1989), der ähnlich dem *Gauß-Algorithmus* für lineare algebraische Gleichungssysteme arbeitet. Als geschlossene Lösung hat sich das nachfolgend geschilderte *Dreistufenverfahren* bewährt.

### 1. Stufe: Strecken $s_i$

Perspektivzentrum und die drei Altpunkte im Objektraum formen einen Tetraeder  $P_1P_2P_3P$ . Bezeichnen wir auf den Tetraederflächen den Raumwinkel  $P_iPP_j = \Psi_{ij}$ , so läßt er sich aus den Meßgrößen  $\{A_i, B_i\}$  zu

$$\cos \Psi_{ij} = \sin B_i \sin B_j + \cos B_i \cos B_j \cos(A_j - A_i) \quad (1-5)$$

berechnen. Auf den Tetraederflächen gilt der *Seitenkosinussatz*

$$\begin{aligned} S_{12}^2 &= s_1^2 + s_2^2 - 2s_1s_2 \cos \Psi_{12} \\ S_{23}^2 &= s_2^2 + s_3^2 - 2s_2s_3 \cos \Psi_{23} \\ S_{31}^2 &= s_3^2 + s_1^2 - 2s_3s_1 \cos \Psi_{31} \end{aligned} \quad (1-6)$$

In diesem *Lagrange* zugeschriebenen Gleichungssystem (J. L. Lagrange 1877) sind die Strecken  $S_{ij}$  zwischen den Altpunkten  $P_iP_j$  über die Altpunktkoordinaten ("Pythagoras") und die aus den Meßgrößen abgeleiteten Raumwinkel  $\Psi_{ij}$  gegeben. Hingegen sind die Strecken  $\{s_1, s_2, s_3\}$  unbekannt. Mit dem *Hilfsmittel der zerfallenen Kegelschnitte* (M. G. Lamé 1818) haben wir dieses Gleichungssystem geschlossen gelöst. Aus Platzgründen muß eine detaillierte Diskussion hier unterbleiben. Festzuhalten ist allerdings, daß i. a. *vier* Lösungen des Gleichungssystems existieren, welche beispielsweise bei *M. A. Fischler und R. Bolles* (1981, S. 386, Figur 5) anschaulich dargestellt sind.

### 2. Stufe: Orientierungsparameter $\{a, b, c\}$ oder $\{\kappa, \varphi, \omega\}$

Sind die Strecken  $s_i$  aus den Beobachtungen abgeleitet, stellt sich die Aufgabe in *Bezug zum linearen Gleichungssystem* (1-2), die Orientierungsparameter  $\{a, b, c\}$  und die kartesischen Koordinaten des Perspektivzentrums zu bestimmen. Mittels der Darstellung (1-4) der Drehmatrix  $\mathbf{R}$  gewinnen wir aus der Gleichung (1-2)

$$(\mathbf{I} - \mathbf{S}) s_i \begin{bmatrix} \cos A_i \cos B_i \\ \sin A_i \cos B_i \\ \sin B_i \end{bmatrix} = (\mathbf{I} + \mathbf{S}) \begin{bmatrix} X_i - x \\ Y_i - y \\ Z_i - z \end{bmatrix} \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (1-7)$$

oder

$$\begin{aligned}
s_i \begin{bmatrix} \cos A_i \cos B_i \\ \sin A_i \cos B_i \\ \sin B_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} &= \\
= \begin{bmatrix} 0 & s_i \sin B_i + Z_i & -s_i \sin A_i \cos B_i - Y_i \\ -s_i \sin B_i - Z_i & 0 & s_i \cos A_i \cos B_i + X_i \\ s_i \sin A_i \cos B_i + Y_i & -s_i \cos A_i \cos B_i - X_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \\
- \begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{1-8}$$

Mit den Hilfsunbekannten  $(u, v, w)$  gemäß

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
\tag{1-9}$$

lautet das  $6 \times 6$  lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} s_1 \cos A_1 \cos B_1 - X_1 \\ s_1 \sin A_1 \cos B_1 - Y_1 \\ s_1 \sin B_1 - Z_1 \\ s_2 \cos A_2 \cos B_2 - X_2 \\ s_2 \sin A_2 \cos B_2 - Y_2 \\ s_3 \sin B_3 - Z_3 \end{bmatrix} &= \\
= \begin{bmatrix} 0 & s_1 \sin B_1 + Z_1 & -s_1 \sin A_1 \cos B_1 - Y_1 & 1 & 0 & 0 \\ -s_1 \sin B_1 - Z_1 & 0 & s_1 \cos A_1 \cos B_1 + X_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_1 \sin A_1 \cos B_1 + Y_1 & -s_1 \cos A_1 \cos B_1 - X_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & s_2 \sin B_2 + Z_2 & -s_2 \sin A_2 \cos B_2 - Y_2 & 1 & 0 & 0 \\ -s_2 \sin B_2 - Z_2 & 0 & s_2 \cos A_2 \cos B_2 + X_2 & 0 & 1 & 0 \\ s_3 \sin A_3 \cos B_3 + Y_3 & -s_3 \cos A_3 \cos B_3 - X_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{1-10}$$

welches sich unmittelbar nach den *Orientierungsparametern*  $\{a, b, c\}$  und nach den Hilfsunbekannten  $\{u, v, w\}$  auflösen läßt.

### 3. Stufe: Koordinaten $\{x, y, z\}$ des Perspektivzentrums

Abschließend verbleibt uns noch in der *dritten Stufe*, die Hilfsunbekannten  $\{u, v, w\}$  nach den kartesischen Koordinaten  $\{x, y, z\}$  des Nullpunktes aufzulösen.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = -(\mathbf{I} + \mathbf{S}) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
\tag{1-11}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 + a^2 & ab + c & ac - b \\ ab - c & 1 + b^2 & bc + a \\ ac + b & bc - a & 1 + c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

Mit den *drei Entwicklungsstufen* ist der dreidimensionale Rückwärtsschnitt geschlossen gelöst, d. h. ohne jegliche Linearisierung in den Unbekannten!

## 2. DER DREIDIMENSIONALE VORWÄRTSSCHNITT

Sind die Koordinaten *zweier* Perspektivzentren mit den Orientierungsparametern des Meßsystems mittels eines *zweifachen Rückwärtsschnittes* gegeben, so verbleibt die Aufgabe, Neupunkte photogrammetrisch mittels eines *dreidimensionalen Vorwärtsschnittes* zu bestimmen.

Im Sinne des *dreidimensionalen Vorwärtsschnittes* bilden die beiden rückwärtseingeschnittenen Perspektivzentren jetzt die Altpunkte  $P_1$  und  $P_2$ ; vom Neupunkt  $P$  im Objektraum sind die kartesischen Koordinaten  $\{x, y, z\}$  unbekannt. Bilanzieren wir die Anzahl der Beobachtungen und der Unbekannten, so werden wir auf folgendes Ergebnis geführt. Einem Satz  $\{A_1, B_1\}$  und  $\{A_2, B_2\}$ , d. h. *vier Richtungsbeobachtungen*, stehen nur *drei* unbekannte Koordinaten des Neupunktes gegenüber. Es liegt ein *überbestimmtes Problem der Ausgleichsrechnung* vor.

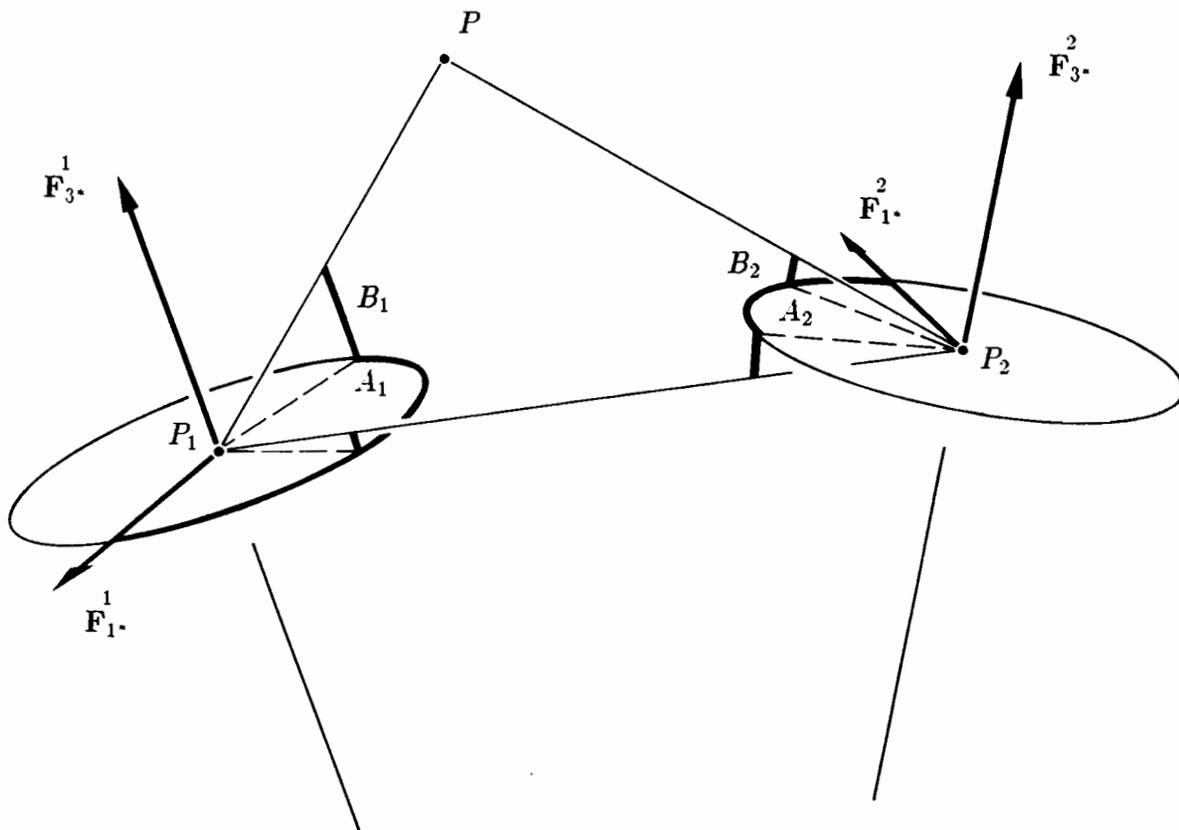


Abb. 3: Dreidimensionaler Vorwärtsschnitt  $P$  Neupunkt,  $P_1, P_2$  Perspektivzentren.

Bezeichnen wir die Strecken vom ersten bzw. zweiten Perspektivzentrum zum Neupunkt mit  $s_1, s_2$  und die entsprechenden Beobachtungen mit  $\{A_1, B_1\}$  und  $\{A_2, B_2\}$  sowie die gegebenen kartesischen Koordinaten der Perspektivzentren mit  $\{X_1, Y_1, Z_1\}, \{X_2, Y_2, Z_2\}$ , so lautet analog zu (1-2), (1-3) unser Gleichungssystem

$$s_i \begin{bmatrix} \cos E\{A_i\} \cos E\{B_i\} \\ \sin E\{A_i\} \cos E\{B_i\} \\ \sin E\{B_i\} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_i \begin{bmatrix} x - X_i \\ y - Y_i \\ z - Z_i \end{bmatrix} \quad \forall i = 1, 2 \quad (2-1)$$

### 1. Gleichung

$$\begin{aligned} & x \cos E\{A_i\} \cos E\{B_i\} R_{12}^i + x \sin E\{A_i\} \cos E\{B_i\} R_{22}^i + x \sin E\{B_i\} R_{32}^i - \\ & - y \cos E\{A_i\} \cos E\{B_i\} R_{11}^i - y \sin E\{A_i\} \cos E\{B_i\} R_{21}^i - y \sin E\{B_i\} R_{31}^i - \\ & - \cos E\{A_i\} \cos E\{B_i\} X_i R_{12}^i - \sin E\{A_i\} \cos E\{B_i\} X_i R_{22}^i - \sin E\{B_i\} X_i R_{32}^i + \\ & + \cos E\{A_i\} \cos E\{B_i\} Y_i R_{11}^i - \sin E\{A_i\} \cos E\{B_i\} Y_i R_{21}^i + \sin E\{B_i\} Y_i R_{31}^i = 0 \quad \forall i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2-2)$$

### 2. Gleichung

$$\begin{aligned} & x \cos E\{A_i\} \cos E\{B_i\} R_{13}^i + x \sin E\{A_i\} \cos E\{B_i\} R_{23}^i + x \sin E\{B_i\} R_{33}^i - \\ & - z \cos E\{A_i\} \cos E\{B_i\} R_{11}^i - z \sin E\{A_i\} \cos E\{B_i\} R_{21}^i - z \sin E\{B_i\} R_{31}^i - \\ & - \cos E\{A_i\} \cos E\{B_i\} X_i R_{13}^i - \sin E\{A_i\} \cos E\{B_i\} X_i R_{23}^i - \sin E\{B_i\} X_i R_{33}^i + \\ & + \cos E\{A_i\} \cos E\{B_i\} Z_i R_{11}^i - \sin E\{A_i\} \cos E\{B_i\} Z_i R_{21}^i + \sin E\{B_i\} Z_i R_{31}^i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \end{aligned}$$

welches nur mittels der *Erwartungswertidentität*  $E\{A_i\}, E\{B_i\}, i = 1, 2$  der Beobachtungen *konsistent* ist. Insgesamt liegen *vier Gleichungen* vor, die erstens in den Unbekannten  $\{x, y, z\}$  (Koordinaten des Neupunktes) *linear*, zweitens in den Beobachtungen *nichtlinear* sind. Ausgleichungstechnisch liegen vier Bedingungsgleichungen (linear in den Unbekannten  $\{x, y, z\}$ , nichtlinear in den Beobachtungen  $\{A_i, B_i\}$ ), *vom Typ mit Unbekannten* vor. (*Gauß-Helmert-Modell*, Allgemeinfeld der Ausgleichsrechnung (E. W. Grafarend 1984)). Da für die unbekannt Erwartungswerte  $E\{A_i\}, E\{B_i\}$  der Beobachtungen  $\{A_i, B_i\}, i = 1, 2$  in den Beobachtungen selbst problemlose Näherungswerte vorliegen, liegt es nahe, die nichtlinearen Beobachtungswerte um die Beobachtungen  $\{A_i, B_i\}$  zu linearisieren:

$$\forall i = 1, 2: \quad A_i = E\{A_i\} + \varepsilon_{\alpha_i}, \quad B_i = E\{B_i\} + \varepsilon_{\beta_i} \quad (2-3)$$

$$\begin{aligned} \cos E\{A_i\} &= \cos A_i + \sin A_i \varepsilon_{\alpha_i} \\ \sin E\{A_i\} &= \sin A_i - \cos A_i \varepsilon_{\alpha_i} \\ \cos E\{B_i\} &= \cos B_i + \sin B_i \varepsilon_{\beta_i} \\ \sin E\{B_i\} &= \sin B_i - \cos B_i \varepsilon_{\beta_i} . \end{aligned} \quad (2-4)$$

$\varepsilon_{\alpha_i}$  und  $\varepsilon_{\beta_i}$  bezeichnen die Meßfehler für alle  $i = 1, 2$ . In den Beobachtungen linearisiert, lauten die perspektivischen Gleichungen (2-2)

### 1. Gleichung

$$\begin{aligned} & (\cos A_i \cos B_i R_{12}^i + \sin A_i \cos B_i R_{22}^i + \sin B_i R_{32}^i)x - \\ & - (\cos A_i \cos B_i R_{11}^i + \sin A_i \cos B_i R_{21}^i + \sin B_i R_{31}^i)y \\ & + \varepsilon_{\alpha_i} [\sin A_i \cos B_i R_{12}^i (x - X_i) - \cos A_i \cos B_i R_{22}^i (x - X_i) - \\ & - \sin A_i \cos B_i R_{11}^i (y - Y_i) + \cos A_i \cos B_i R_{21}^i (y - Y_i)] \\ & + \varepsilon_{\beta_i} [\cos A_i \sin B_i R_{12}^i (x - X_i) + \sin A_i \sin B_i R_{22}^i (x - X_i) - \\ & - \cos B_i R_{32}^i (x - X_i) - \cos A_i \sin B_i R_{11}^i (y - Y_i) - \\ & - \sin A_i \sin B_i R_{21}^i (y - Y_i) + \cos B_i R_{31}^i (y - Y_i)] = \cos A_i \cos B_i (X_i R_{12}^i - Y_i R_{11}^i) + \\ & + \sin A_i \cos B_i (X_i R_{22}^i - Y_i R_{21}^i) + \sin B_i (X_i R_{32}^i - Y_i R_{31}^i) \quad \forall i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2-5)$$

## 2. Gleichung:

$$\begin{aligned}
 & (\cos A_i \cos B_i R_{13}^i + \sin A_i \cos B_i R_{23}^i + \sin B_i R_{33}^i)x - \\
 & - (\cos A_i \cos B_i R_{11}^i + \sin A_i \cos B_i R_{21}^i + \sin B_i R_{31}^i)z + \\
 & + \varepsilon_{\alpha_i} [\sin A_i \cos B_i R_{13}^i (x - X_i) - \cos A_i \cos B_i R_{23}^i (x - X_i) - \\
 & - \sin A_i \cos B_i R_{11}^i (z - Z_i) + \cos A_i \cos B_i R_{21}^i (z - Z_i)] + \\
 & + \varepsilon_{\beta_i} [\cos A_i \sin B_i R_{13}^i (x - X_i) + \sin A_i \sin B_i R_{23}^i (x - X_i) - \\
 & - \cos B_i R_{33}^i (x - X_i) - \cos A_i \sin B_i R_{11}^i (z - Z_i) - \\
 & - \sin A_i \sin B_i R_{21}^i (z - Z_i) + \cos B_i R_{31}^i (z - Z_i)] = \cos A_i \cos B_i (X_i R_{13}^i - Z_i R_{11}^i) + \\
 & + \sin A_i \cos B_i (X_i R_{23}^i - Z_i R_{21}^i) + \sin B_i (X_i R_{33}^i - Z_i R_{31}^i) \quad \forall i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

In den vier linearen Gleichungen (2-5) machen die Terme, welche die Meßfehler  $\varepsilon_{\alpha_i}$  und  $\varepsilon_{\beta_i}$  enthalten, die Widersprüche  $\mathbf{w}$ ,  $o(\mathbf{w}) = 4 \times 1$ , aus. D. h., daß unsere Gleichungen (2-5) vom Typ

$$\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{w} = f(\mathbf{Y}) \quad (2-6)$$

sind, welche sich nach dem Unbekanntenvektor  $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$  mittels der Zielfunktion  $\mathbf{w}^T \mathbf{P}_w \mathbf{w} = \min$  zu

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_w \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_w f(\mathbf{Y}) \quad (2-7)$$

als Funktion  $f(\mathbf{Y})$  des Beobachtungvektors  $\mathbf{Y} = [A_1, B_1, A_2, B_2]^T$  auflösen lassen. Sind die Unbekannten  $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$  (kartesische Koordinaten des Neupunktes) bekannt, so folgt der Fehlervektor  $\varepsilon = [\varepsilon_{\alpha_1}, \varepsilon_{\beta_1}, \varepsilon_{\alpha_2}, \varepsilon_{\beta_2}]^T$  direkt aus der Gleichung

$$\mathbf{B}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\varepsilon} = \hat{\mathbf{w}} \quad (2-8)$$

zu

$$\hat{\varepsilon} = [\mathbf{B}(\hat{\mathbf{x}})]^{-1} \hat{\mathbf{w}}. \quad (2-9)$$

Damit ist auch der photogrammetrische dreidimensionale Vorwärtsschnitt geschlossen gelöst. Eine Linearisierung in den unbekanntem kartesischen Koordinaten des Neupunktes war *nicht* erforderlich. M. E. ist mit dieser Lösungsstrategie ein besonderer Vorteil verbunden, da i. a. keine zuverlässigen Neupunktnäherungskordinaten (Datumproblem!) vorliegen.

## LITERATUR

- Ackermann, F.: Analytische Photogrammetrie, Kap. 10 in K. Schwidewsky, Grundriß der Photogrammetrie, B. C. Teubner Verlag, Stuttgart 1963, S. 286-315.
- Ackermann, F.: Photogrammetrische Triangulation, Photogrammetrie, Jordan/Eggert/Kneissl, Bd. IIIa 1-3, Kapitel I+II, 1973, S. 1629-2079.
- Ackermann, F.: Photogrammetrie und Geodäsie – Einige kritische Betrachtungen über ihr gegenseitiges Verhältnis, in: 50Jahr-Feier der Nederlandse Vereniging voor Fotogrammetrie, Delft, 1982, Geodesia (1983), 25. Jahrg., S. 313.
- Ackermann, F.: Photogrammetrische Punktbestimmung, Mitteilungen des DVW - Landesvereins Baden Württemberg (1985), Heft 2, S. 7.
- Buchberger, B.: Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal, Dissertation, Universität Innsbruck, Austria 1965.
- Buchberger, B.: Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems, Aequationes Mathematicae (1970), 4, S. 374-383.
- Buchberger, B.: A Criterion for Detecting Unnecessary Reductions in the Construction of Groebner Bases, Proceedings of the 1979 European Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, Springer Lecture Notes in Computer Science 72, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979, S. 3-21.

- Buchberger, B.; Kalkbrenner, M.: Private Communications, 1989.
- Finsterwalder, S.: Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, VI, B. G. Teubner, Leipzig 1899, S. 1-41.
- Finsterwalder, S.; Scheufele, W.: Das Rückwärtseinschneiden im Raum, Aus den Sitzungsberichten der mathem.-phys. Klasse der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften (1903), Bd. XXXIII, Heft IV, S. 591-614.
- Fischler, M.A.; Bolles, R.C.: Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography, Communications of the ACM (1981), Vol. 24, No. 6., S. 391-392.
- Grafarend, E.W.: Die Beobachtungsgleichungen der dreidimensionalen Geodäsie im Geometrie- und Schwererraum, Ein Beitrag zur operationellen Geodäsie. Zeitschrift für Vermessungswesen (1981), 106, S. 411-429.
- Grafarend, E.W.: Reference frame rotation-regularized theory by quaternions and spinors – "Geodesy in Transition", a volume dedicated to Helmut Moritz on the occasion of his 50th birthday, ed. by K. P. Schwarz and G. Lachapelle, The University of Calgary (1983), Report 60002, S. 185-225.
- Grafarend, E.W.: Stochastic Models for Point Manifolds, Geodetic/Photogrammetric Point Determination with Regard to Outliers and Systematic Errors, Ackermann, F.E. (Ed.), Stuttgart 1981, DGK, Reihe A, Heft Nr. 98, München 1983, S. 29-52.
- Grafarend, E.W.: Variance-covariance-component estimation of Helmert type in the Gauß-Helmert model, Zeitschrift für Vermessungswesen (1984), 109, S. 34-44.
- Grafarend, E.W.; Lohse, P.; Schaffrin, B.: Dreidimensionaler Rückwärtsschnitt, Teil I, Zeitschrift für Vermessungswesen (1989), 2, S. 61-67.
- Grafarend, E.W.; Lohse, P.; Schaffrin, B.: Dreidimensionaler Rückwärtsschnitt, Teil II, Zeitschrift für Vermessungswesen (1989), 3, S. 127-137.
- Grafarend, E.W.; Lohse, P.; Schaffrin, B.: Dreidimensionaler Rückwärtsschnitt, Teil III, Zeitschrift für Vermessungswesen (1989), 4, S. 172-175.
- Grafarend E.; Richter, B.: The generalized Laplace Condition, Bulletin Géodésique (1977), Vol 51, No. 4, S. 287-293.
- Grafarend, E.W.; Schaffrin, B.: Vectors, quaternions and spinors—a discussion of algebras underlying three-dimensional geodesy, Feestbundel ter Gelegenheid van de 65ste Verjaardag van Professor Baarda, Deel I.ed. Geodetic Computer Centre (LGR) Delft (1982), S. 111-134.
- Grunert, J.A.: Das Pothenot'sche Problem, in erweiterter Gestalt nebst Bemerkungen über seine Anwendung in der Geodäsie, Archiv der Mathematik und Physik, Verlag von C. A. Koch, Greifswald 1841.
- Lagrange, J.L.: Leçons élémentaires sur les mathématiques données à l'Ecole Normale en 1795, in: M. J. A. Serret (Ed.), Oeuvres de Lagrange, Tome 7, Section IV, Paris 1877, S. 183-288.
- Lamé, M.G.: Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, S. 70-72, Paris 1818.
- Linnainmaa, S.; Harwood, D.; Davis, L. S.: Pose Determination of a Three-Dimensional Object Using Triangle Pairs, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Vision (1988), Vol. 10, No. 5, S. 635.
- Lohse, P.; Grafarend, E.W.; Schaffrin, B.: Dreidimensionaler Rückwärtsschnitt, Teil IV, Zeitschrift für Vermessungswesen (1989), 5, S. 172-175.
- Lohse, P.; Grafarend, E.W.; Schaffrin, B.: Dreidimensionaler Rückwärtsschnitt, Teil V, Zeitschrift für Vermessungswesen (1989), 6, S. 225-234.
- Lohse, P.: Dreidimensionaler Rückwärtsschnitt – Ein Algorithmus zur Streckenberechnung ohne Hauptachsentransformation, Zeitschrift für Vermessungswesen (1990), Veröffentlichung angekündigt.
- Merrit, E.L.: Explicit Three-Point Resection in Space, Photogrammetric Engineering (1949), Vol. 15, S. 649-665.
- Müller, F.J.: Rückwärtseinschneiden im Raume, Allgemeine Vermessungsnachrichten (1925), S. 249, 265, 349, 365, 569.

- Müller, F.J.: Oberst Friedrichs Methoden zur Auflösung algebraischer Gleichungen und die lufttopographische Gleichung, Allgemeine Vermessungsnachrichten (1926), 28, S. 545.
- Müller, F.J.: Direkte (exakte) Lösung des einfachen Rückwärtseinschneidens im Raume, II. Teil, (Ausgleichung überschüssiger Strahlen), Allgemeine Vermessungsnachrichten (1926), S. 545, 649, 669.
- Müller, F.J.: Direkte (exakte) Lösung des einfachen Rückwärtseinschneidens im Raume, II. Teil, (Ausgleichung überschüssiger Strahlen), Allgemeine Vermessungsnachrichten (1927), S. 40, 49, 65, 81, 105.
- Müller, F.J.: Der gefährliche Ort beim Rückwärtseinschneiden im Raume, Allgemeine Vermessungsnachrichten (1931), S. 273, 299, 313, 322, 344, 356.
- Plath, C.W.: Untersuchung über die Pothenot'sche Aufgabe, falls solche auf den Raum ausgedehnt wird, Archiv der Mathematik und Physik, C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung, Greifswald 1860.
- Schut, G.H.: Construction of Orthogonal Matrices and their Application in Analytical Photogrammetry, Photogrammetria (1958/59), XV, No. 4, S. 149-162.
- Schut, G.H.: On Exact Linear Equations for the Computation of the Rotational Elements of Absolute Orientation, Photogrammetria (1960/61), XVII, No. 1, S. 34-37.