

BEISPIELE ZUR SUCHE GROBER FEHLER UND ZUR ZUVERLÄSSIGKEIT

I. Fehlersuche mit statistischem Test bei der ausgleichenden Geraden

Das Beispiel der ausgleichenden Geraden soll die Wirkungsweise des statistischen Tests ("data-snooping") verdeutlichen. Der statistische Test, der die Geometrie der Ausgleichung über die Redundanzanteile  $r_i$  berücksichtigt, wird mit dem herkömmlichen Test verglichen.

1. Theorie

Es seien  $n$  Wertepaare  $(l_i, t_i)$  gegeben. Die  $t_i$  seien feste fehlerfreie Größen. Die  $l_i$  seien mit Meßfehlern  $\underline{\epsilon}_i$  behaftet, die unabhängig und gleichgenau seien ( $P=I$ ). Der Zusammenhang zwischen den  $l_i$  und den  $t_i$  sei linear:

$$l_i = \tilde{a} + \tilde{b} t_i + \underline{\epsilon}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

$\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$  sind die wahren Werte des konstanten und linearen Anteils. Sie sind unbekannt. Aus der Ausgleichung erhalten wir Schätzungen  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  und  $\hat{\epsilon}_i$  für diese Unbekannten und die wahren Meßfehler  $\underline{\epsilon}$ . Die üblichen Verbesserungen  $\underline{v}_i$  sind identisch mit den negativen  $\underline{v}_i = -\hat{\epsilon}_i$ . Dann gilt:

$$l_i = \hat{a} + \hat{b} t_i + \hat{\epsilon}_i \quad i = 1, \dots, n$$

oder

$$l_i + \underline{v}_i = \hat{a} + \hat{b} t_i, \quad i = 1, \dots, n$$

die bekannten Verbesserungsgleichungen. Wenn wir die Beobachtungen, die Verbesserungen bzw. Meßfehler, zu Vektoren  $\underline{l}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{\epsilon}$ , die Koeffizienten von  $\hat{a}$  und  $\hat{b}$  zu der Matrix  $A$  und die Unbekannten  $\hat{a}$  und  $\hat{b}$  zum Vektor  $\underline{x}$  zusammenfassen gilt:

$$\underline{l} + \underline{v} = A \underline{\hat{x}}$$

$$\underline{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix}, \quad \underline{\hat{x}} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}.$$

Die Normalgleichungen für  $\underline{\hat{x}}$  lauten:

$$N \underline{\hat{x}} = \underline{h}$$

mit

$$N = A^T A = \begin{pmatrix} n & [t_i] \\ [t_i] & [t_i^2] \end{pmatrix}, \quad \underline{h} = A^T \underline{l} = \begin{pmatrix} [l_i] \\ [t_i l_i] \end{pmatrix}$$

Das Normalgleichungssystem läßt sich leicht lösen, wenn  $N$  Diagonalgestalt hat. Wir erreichen das, indem wir die  $t_i$  auf den Schwerpunkt  $t_0$  reduzieren, d. h.

$$\bar{t}_i = t_i - t_0 \quad \text{mit} \quad t_0 = \frac{[t_i]}{n}$$

einführen. Wir erhalten dann als Lösung von den Normalgleichungen

$$\hat{a} = \frac{[l_i]}{n}; \quad \hat{b} = \frac{[\bar{t}_i l_i]}{[\bar{t}_i^2]}$$

Für den Test benötigen wir die Gewichtskoeffizientenmatrix der Verbesserungen:

$$Q_{VV} = I - AN^{-1}A^T$$

Ihre Elemente lassen sich explizit angeben, z.B.:

$$q_{v_i v_i} = 1 - (1 \ \bar{t}_i) \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{[\bar{t}_i^2]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{t}_i \end{pmatrix}$$

also:

$$q_{v_i v_i} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\bar{t}_i^2}{[\bar{t}_i^2]} \quad i \neq j$$

$$q_{v_i v_j} = -\frac{1}{n} - \frac{\bar{t}_i \cdot \bar{t}_j}{[\bar{t}_i^2]}$$

Das Diagonalelement  $q_{v_i v_i}$  ist identisch mit dem Redundanzanteil  $r_i$ , da  $P = I$  angenommen wurde. Mit dem durchschnittlichen Abstand  $\bar{t} = \sqrt{[\bar{t}_i^2]}/n$  der Stützpunkte vom Schwerpunkt gilt

$$r_i = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \frac{\bar{t}_i^2}{\bar{t}^2}$$

Der Redundanzanteil hängt also ab

1. von der Zahl der Punkte. Je mehr Punkte vorhanden sind, desto größer ist  $r_i$ , d. h. umso besser sind die Beobachtungen kontrollierbar.
2. vom Abstand  $\bar{t}_i$  des Punktes  $i$  vom Schwerpunkt. Je weiter ein Punkt vom Schwerpunkt entfernt ist, umso kleiner ist  $r_i$ , d. h. umso schlechter ist seine Kontrollierbarkeit.

Der Abstand  $\bar{t}_i$  bezieht sich dabei auf den durchschnittlichen Abstand  $\bar{t}$ . Das bedeutet, daß vor allem isolierte Punkte schlecht kontrollierbar sind (vgl. 2.1).

## 2. Zahlenbeispiel

2.1 Gegeben sei:

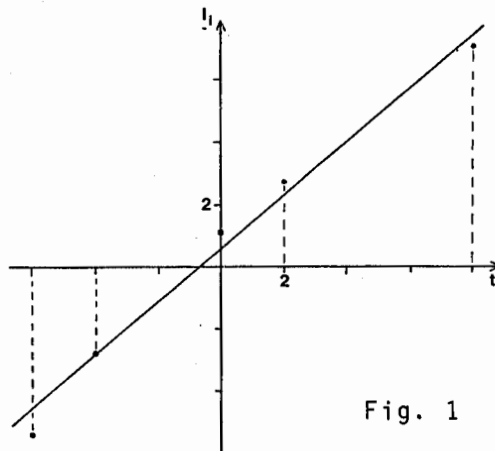
$\tilde{a} = 1 \quad \tilde{b} = 1, \quad \sigma_0 = 0.4, \quad P = I$   
 und die Werte  $t_i$  aus folgender Tabelle.

$i$	$t_i$	$\tilde{t}_i$	$\varepsilon_i$	$\underline{l}_i$	$\hat{\varepsilon}_i := -v_i$	$r_i$	$\hat{v}_i$	$w_i$	$v_0 l_i$	$\delta'_{0,i}$
1	-6	-5	-0.4	-5.4	-0.67	0.500	-1.34	-2.37	2.26	5.7
2	-4	-3	+0.2	-2.8	+0.18	0.667	0.27	0.55	1.95	4.9
3	0	1	+0.1	1.1	+0.58	0.800	0.73	1.62	1.79	4.5
4	2	3	-0.3	2.7	+0.43	0.767	0.56	1.22	1.82	4.6
5	8	9	-2.0	7.0	-0.52	0.267	-1.95	-2.52	3.08	7.7

Den wahren Wert der Beobachtungen erhalten wir aus  $\tilde{l}_i = \tilde{a} + \tilde{b} t_i$ . An den wahren Werten bringen wir die Fehler  $\varepsilon_i$  an, wobei Punkt 5 grob verfälscht wird (vgl. Fig. 1). Die Beobachtungen sind  $l_i = \tilde{l}_i + \varepsilon_i$ . Für die Ausgleichung stehen nur die Beobachtungen  $l_i$  zur Verfügung. Die Konstruktion der  $l_i$  aus wahren Werten dient nur der Beurteilung des Testverfahrens.

Die Normalgleichungen lauten:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 120 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 105. \end{pmatrix},$$

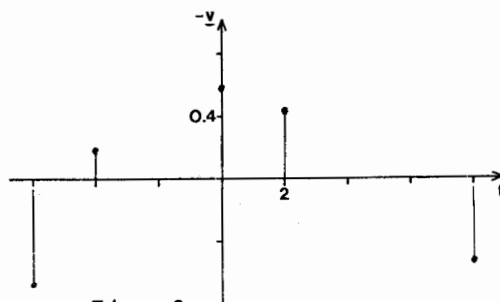


woraus sich die Schätzungen

$$\hat{a} = 0.52, \quad \hat{b} = 0.875$$

ergeben. Daraus erhält man die in der Tabelle angegebenen Schätzwerte  $\hat{\varepsilon}_i$  für die Beobachtungsfehler. Die ausgleichende Gerade ist in der Figur dargestellt. Eine vorläufige Beurteilung ist möglich:

- a) Der grobe Fehler in der 5. Beobachtung zeigt sich kaum in der zugehörigen Verbesserung ( $v_5 = 0.52$ ). Die größte Verbesserung hat  $l_1$  ( $v_1 = 0.67$ ). Ein automatisiertes Verfahren zur Fehlersuche, das als Kriterium die größte Verbesserung verwendet, versagt hier. Mehr noch, es eliminiert eine Beobachtung, die stark zur Kontrolle beiträgt. Die Berücksichtigung von Vorzeichen führt hier nicht weiter.
- b) Trägt man sich allerdings die Verbesserungen in einer Graphik auf (vgl. Fig. 2) so erkennt man den Ausreißer, da man sich



nacheinander eine Gerade durch je 4 Punkte vorstellt, d. h. jeweils einen Punkt eliminiert. Die ersten 4 Punkte passen im Vergleich zu der Genauigkeit von  $\sigma_0 = 0.4$  gut.

Für eine weitere Beurteilung verwenden wir die Redundanzanteile, bzw. hier die gesamte Matrix  $Q_{VV}P_{11}$ :

$$Q_{VV}P_{11} = Q_{VV} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 15 & -12 & -6 & -3 & +6 \\ -12 & 20 & -6 & -4 & +2 \\ -6 & -6 & 24 & -6 & -6 \\ -3 & -4 & -6 & 23 & -10 \\ +6 & +2 & -6 & -10 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Die Matrix  $Q_{VV}P_{11}$  verbindet die ursprünglichen Beobachtungen  $\underline{l}$  mit den Verbesserungen:

$$-\underline{v} = \hat{\underline{\epsilon}} = Q_{VV}P_{11} \underline{l}$$

Wir hätten also die Verbesserungen auch unmittelbar, ohne den Umweg über die Unbekannten  $\hat{\underline{a}}$ ,  $\hat{\underline{b}}$ , bestimmen können. Z.B. gibt:

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{30} (15 \ -12 \ -6 \ -3 \ +6) \begin{pmatrix} -5.4 \\ -2.8 \\ 1.1 \\ 2.7 \\ 7.0 \end{pmatrix} = -0.67.$$

Umgekehrt kann man die Auswirkung  $\nabla_i v$  eines einzelnen Fehlers  $\nabla l_i$  auf die Verbesserungen mit Hilfe der Spalten von  $Q_{VV}P_{11}$  bestimmen. Z.B. führt der Fehler  $\nabla l_5 = 2$  auf folgende Veränderung des Verbesserungsvektors

$$-\nabla_5 v = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} +6 \\ +2 \\ -6 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} +0.40 \\ +0.13 \\ -0.40 \\ -0.66 \\ +0.27 \end{pmatrix}.$$

Aus den Spalten von  $Q_{VV}P$  kann man also unmittelbar ablesen, in welcher Verbesserung ein grober Fehler sich am deutlichsten zeigt, wenn man von zufälligen Fehlern absieht. In diesem Fall ( $\underline{l}_5$ ) wird bei großen groben Fehlern i. a.  $\underline{v}_4$  betragsmäßig am größten sein. In unserem speziellen Fall ist der Fehler mit  $5 \sigma_0$  so klein, daß die übrigen zufälligen Fehler diesen Effekt verwischen.

Vergleicht man aber diesen Vektor  $\nabla_5 v$  mit dem Vektor  $\underline{v}$  (vgl. Fig. 2), so erkennt man die Ähnlichkeit. Tatsächlich führt auch der Vergleich von  $\underline{v}$  mit den verschiedenen Vektoren  $\nabla_i v$  auf die normierten Verbesserungen  $\underline{w}_i$ . Die Prüfung des gesamten Vektors  $\underline{v}$  ist identisch mit der Prüfung der Verbesserungen, ergibt also keinen besseren Test.

b) Die Redundanzanteile, d. s. die Diagonalelemente der Matrix  $Q_{VV}P_{11}$ , unterscheiden sich deutlich. Der Redundanzanteil des isoliert liegenden Punktes 5 ist mit  $r_5 = 0.267$  am kleinsten, er ist insbesondere kleiner als  $r_1 = 0.500$ . Daher kann sich wegen  $\nabla v_i = -r_i \nabla l_i$  ein Fehler in  $\underline{l}_5$  nicht so deutlich zeigen wie ein gleich großer Fehler in  $\underline{l}_1$ .

Wir können diese Information auch dazu nutzen, die Größe des ursprünglichen Fehlers zu schätzen:

$$\hat{\underline{\nabla l}}_i = \frac{-\underline{v}_i}{r_i}$$

(vgl. Tabelle), auch wieder nur für größere grobe Fehler. In unserem Fall stimmt  $\hat{v}_5 = 1.95$  recht gut mit  $\varepsilon_5 = -2.0$  überein. Die Werte  $\hat{v}_i$  sind ein wertvolles Hilfsmittel bei der Datenbereinigung. Sie sind identisch mit den Abweichungen zwischen  $l_i$  und dem "extrapolierten" Wert  $l_i$  nach einer Ausgleichung ohne die Beobachtung  $l_i$ . Die direkte Berechnung der  $\hat{v}_i$  ersetzt so das oft praktizierte systematische Probieren. Da die  $\hat{v}_i$  aber in Abhängigkeit von der Geometrie verschieden genau sind ( $\sigma_{\hat{v}_i} = \sigma_{l_i} / \sqrt{r_i}$ ), können wir sie nicht als Testgröße heranziehen.

c) Dazu verwenden wir die normierte Verbesserung

$$\underline{w}_i = \frac{-v_i}{\sigma_{l_i} \sqrt{r_i}} = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{l_i} \sqrt{r_i}}$$

Sie ist gleichzeitig ein Test von  $\hat{v}_i$  ! Die Berücksichtigung der Geometrie über die Redundanzanteile führt nun zu einer richtigen Lokalisierung der grob falschen Beobachtung.

Der Unterschied der Testgrößen  $\underline{w}_1 = -2.37$  und  $\underline{w}_5 = 2.52$  ist zwar gering, doch genügt dieser kleine Unterschied im Prinzip für eine richtige Lokalisierung. Unter idealen Bedingungen<sup>1)</sup> weist nämlich die größte normierte Verbesserung auf die tatsächlichen grob falschen Beobachtungen hin.

Die größte normierte Verbesserung ist allerdings so klein, daß man bei einem Signifikanzniveau von  $S = 95\%$  ( $k = 2.58$ ) die Beobachtungen akzeptieren muß.

d) Betrachten wir daher die Grenzwerte für erkennbare grobe Fehler  $v_0 l_i$ . Sie liegen zwischen 1.8 und 3.1 bzw.  $4.5 \sigma_0$  und  $7.7 \sigma_0$ . Der grobe Fehler  $v_5 = 2$  ist kleiner als der entsprechende Grenzwert  $v_0 l_5 = 3.08$ , weshalb man auch nicht damit rechnen kann, diesen Fehler aufzudecken, zumindest nicht unter den Voraussetzungen ( $\sigma_0 = 0.4$ ,  $\delta_0 = 4$ ), die für die Berechnung dieses Grenzwertes gelten.

Wir wollen nun untersuchen wie sich ein 6. Punkt in der Nähe des isolierten Punktes 5 auf die Geometrie und die Fehlersuche auswirkt.

1) Diese idealen Bedingungen sind gegeben,

- a) wenn nur ein grober Fehler vorliegt
- b) wenn keine zufälligen Fehler vorhanden wären
- c) wenn eine Lokalisierung prinzipiell möglich ist.

Zu a) Weitere grobe Fehler können die Fehlersuche wesentlich erschweren, vor allem wenn sich die groben Fehler verstärken. Da man i. a. mit mehreren groben Fehlern rechnen muß, ist es sinnvoll mindestens auch die Beobachtung mit der zweitgrößten Verbesserung zu verdächtigen.

Zu b) Die Lokalisierung eines einzelnen großen groben Fehlers ist damit praktisch gesichert (mit Ausnahme von c)).

Zu c) Die Lokalisierung ist prinzipiell nicht möglich, wenn die Testgrößen  $\underline{w}_i$  100%ig korreliert sind. Dann sind die Testgrößen identisch. Dies gilt etwa für die 6 Strecken in einem Diagonalen Viereck (Redundanz=1) oder für Streckenfehler in einem gestreckten Polygonzug. Von der Fehlerlokalisierung her betrachtet, ist es daher z.B. sinnvoll, Polygonzüge nicht ganz gestreckt anzulegen; genauer so, daß alle Seiten verschiedene Richtungswinkel aufweisen.

2.2 Die Daten für die ausgleichende Gerade sind der Tabelle zu entnehmen.

$i$	$t_i$	$\varepsilon_i$	$\underline{l}_i$	$\hat{\varepsilon}_i = -v_i$	$r_i$	$\hat{\underline{v}}_i$	$\underline{w}_i$	$\nabla_0 \underline{l}_i$	$\delta'_{0,i}$
1	-7	-0.4	-5.4	-0.60	0.507	-1.18	-2.10	2.24	5.6
2	-5	+0.2	-2.8	+0.18	0.667	+0.27	+0.55	1.95	4.9
3	-1	+0.1	-1.1	+0.44	0.827	+0.53	+1.33	1.76	4.4
4	+1	-0.3	2.7	+0.22	0.827	+0.27	+0.61	1.76	4.4
5	+7	-2.0	7.0	-0.93	0.507	-1.83	-3.26	2.24	5.6
6	+5	-0.2	6.8	+0.69	0.667	+1.03	+2.11	1.95	4.9

$$N = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 150 \end{pmatrix}, \quad \underline{h} = \begin{pmatrix} 9.4 \\ 136.4 \end{pmatrix}, \quad \hat{\underline{a}} = 1.57, \quad \hat{\underline{b}} = 0.91$$

- Der Vergleich der Verbesserungen zeigt, daß jetzt die größte Verbesserung ( $\underline{v}_5 = -0.93$ ) auf die tatsächliche falsche Beobachtung weist. Damit scheint der statistische Test überflüssig. Jedoch ist die Verbesserung mit ca.  $2 \sigma_0$  zu klein als daß man wirklich einen Fehler vermuten würde.
- Die normierte Verbesserung ist auf  $\underline{w}_5 = 3.26$  angestiegen und liegt damit deutlich über dem kritischen Wert  $k = 2.56$ . Die Ursache liegt in der wesentlich verbesserten Kontrollierbarkeit.
- Der Redundanzanteil  $r_5 = 0.51$  ist jetzt fast doppelt so hoch wie vorher, daher lassen sich Fehler ab  $\nabla_0 \underline{l}_5 = 2.24 = 5.6 \sigma_0$  mit größerer als 97.5 % Sicherheit aufdecken. D. h. aber auch: Der Fehler  $\nabla \underline{l}_5 = 2 < 2.24$  ist nur mit geringerer Sicherheit als 97.5 % feststellbar.
- Die neu hinzukommende Beobachtung  $\underline{l}_6$  kann wegen  $\underline{w}_6 < 2.56$  akzeptiert werden. Hätte man die Daten sequentiell geprüft, d. h. hätte man eine Beobachtung nach der anderen zur Ausgleichung herangezogen und hätte nur die jeweils neu hinzukommende Beobachtung geprüft, hätte man den groben Fehler in  $\underline{l}_5$  nicht entdeckt. Dies ist eine Schwäche sequentieller Prüfverfahren.

## II. Fehlersuche in einem photogrammetrischen Bündelblock

An einem photogrammetrischen Bündelblock sollen die Vorteile des statistischen Tests gegenüber dem üblichen Testverfahren aufgezeigt werden.

Der Block besteht aus 4 Bildern, die einen Streifen bilden. Der Bildmaßstab beträgt ca. 1:7500. Die Längsüberdeckung beträgt 60 %. Es sind 4 Vollpaßpunkte ( $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$ ,  $\underline{z}$ ) und ein zusätzlicher Höhenpaßpunkt gegeben. Der Block ist in Fig. 1 dargestellt. Die Nummern der Bilder

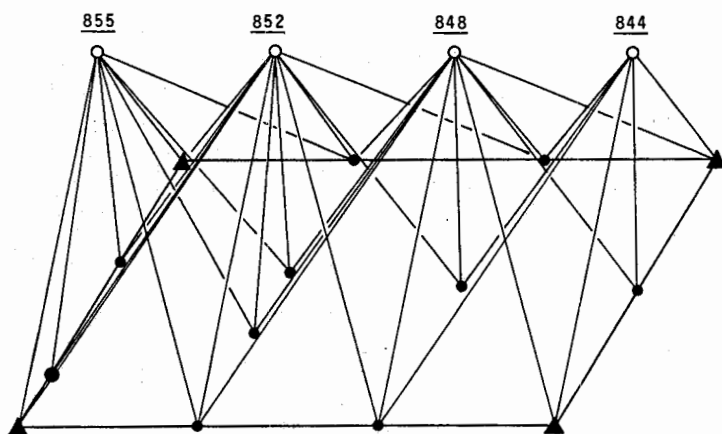


Fig. 1 Schrägbild eines Bündelblocks

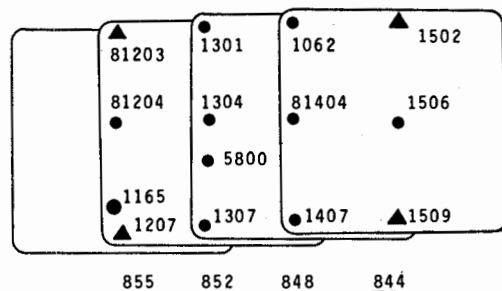


Fig. 2 Punkt- und Bildnumerierung

und Punkte sind der Fig. 2 zu entnehmen.

Der Block enthält insgesamt 14 Punkte, die je zur Hälfte in 2 bzw. 3 Bilder gemessen sind. Bei der Ausgleichung sind die Koordinaten der Bildpunkte  $\underline{x}$  und  $\underline{y}$  als gleichgenau und unkorreliert mit einer Standardabweichung von  $\sigma_x = \sigma_y = 3.0 \mu\text{m}$  angenommen. Um auch die Paßpunkte überprüfen zu können, werden ihre Koordinaten als Beobachtungen mit  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 1.2 \text{ cm}$  behandelt und erhalten somit auch Verbesserungen, die getestet werden können.

Die Gesamtredundanz von  $r = 17$  verteilt sich recht ungleichmäßig auf die Beobachtungen. Die Redundanzanteile  $r_i$  sind in Fig. 3 dargestellt (vgl. S. 4 ff).

Sie schwanken zwischen 0 in den 2-fach Punkten am Rand und 0.54 in den 3-fach Punkten im Innern des Blockes. Besonders klein sind die Redundanzanteile der Paßpunkte  $r_x \approx 0.05$  und  $r_z \approx 0.015$ .

Die zugehörigen Grenzwerte sind aus der Fig. 4 zu entnehmen. In den Paßpunkten lassen sich mit dem statistischen Test erst Fehler ab 20 cm bzw. 30 cm aufdecken. Denn es zeigen sich nur 2-5 % der Fehler in den Verbesserungen der Paßpunkte. Abgesehen von den x-Koordinaten der beiden genannten Punkte sind die Bildkoordinaten kontrollierbar, wenn auch stark unterschiedlich. Die y-Koordinaten sind im Durchschnitt wesentlich besser kontrollierbar als die x-Koordinaten, in denen Fehler bis ca.  $14 \sigma = 42 \mu\text{m}$  unentdeckt bleiben können.

Wir wollen nun die Verbesserungen und die normierten Verbesserungen für 5 Fälle betrachten:

- 1) Originaldaten
- 2 - 4) je ein grober Fehler in der
  - x-Koordinate von Punkt 1307, Bild 855,  $\nabla l = 63 \mu\text{m}$ ,
  - y- " " " 1062, Bild 844,  $\nabla l = 100 \mu\text{m}$ ,
  - z- " vom PP 1509,  $\nabla l = 1 \text{ m}$ .
- 5) drei grobe Fehler

### 1. Originaldaten (Fig. 5, 6)

Die x-Koordinate des Punktes 1062 im Bild 848 (Fig. 5) hat die größte Verbesserung von  $5.9 \mu\text{m}$ . Bei einer Genauigkeit von  $\sigma_{1j} = 3 \mu\text{m}$  wird sie wohl in der Praxis akzeptiert werden. Die normierten Verbesserungen widerlegen dies (Fig. 6). Die normierte Verbesserung an diesem Punkt ist  $\underline{w}_j = 3.41$ . Die x-Koordinate dieses Punktes im Nachbarbild 852 weist sogar ein größeres  $\underline{w}_j = 3.43$  auf. Der Unterschied ist allerdings sehr klein. Dies ist ein Hinweis darauf, daß eine Lokalisierung allein auf der Grundlage der vorliegenden Informationen nicht möglich ist (vgl. 2)).

Da der kritische Wert  $k = 3.3$  kaum überschritten wird, akzeptieren wir die Beobachtungen (etwa weil kein Grund für eine Elimination gegeben ist).

### 2. Grober Fehler in Punkt 1307 (Fig. 7, 8)

Wir verfälschen nun die x-Koordinate des Punktes 1307 im Bild 855 um  $\nabla l = 63 \mu\text{m}$ , indem wir die Ziffern 07 in der Koordinate  $x = 82570.4 \mu\text{m}$  vertauschen.

Die größte Verbesserung  $\underline{v} = 17.3 \mu\text{m}$  (Fig. 7) tritt an diesem Punkt (1307) auf, jedoch im Bild 852. Die tatsächlich falsche Beobachtung erhält eine deutlich kleinere Verbesserung von  $10.0 \mu\text{m}$ .

Die normierten Verbesserungen (Fig. 8) der x-Koordinaten dieses Punktes in den 3 betroffenen Bildern sind nahezu gleich groß. Eine leicht ansteigende Tendenz zur tatsächlichen Fehlerquelle ist festzustellen.

Dies weist, wie schon erwähnt, darauf hin, daß eine Lokalisierung nicht möglich ist. Dies ist plausibel, da ein Fehler in der x-Koordinate eines 2-fachen Punktes prinzipiell nicht entdeckbar ist, und daher bei Weglassen eines der drei Strahlen keinen Widerspruch auftritt.

Hier zeigt sich die deutliche Überlegenheit des statistischen Tests, der keine Lokalisierbarkeit vortäuscht, sondern im Gegenteil auf die Nichtlokalisierbarkeit hinweist.



Selbstverständlich wäre es günstiger, solche Situation zu vermeiden. Bei Bündelblöcken ist das prinzipiell nur durch höhere Überdeckung zu erreichen. Praktisch werden allerdings grobe Fehler nur in wenigen Fällen innerhalb der Kernebenen bleiben, d. h. keine reinen x-Koordinatenfehler sein, sondern auch in gewissem Maß die y-Koordinate verfälschen. Diese lassen sich weitaus leichter lokalisieren.

### 3. Grober Fehler in Punkt 1062 (Fig. 9, 10)

Um dies zu zeigen, bringen wir in der y-Koordinate im Punkt 1062 im Bild 844 einen 100  $\mu\text{m}$  - Fehler an.

Die zugehörige Verbesserung ist mit -12.1  $\mu\text{m}$  deutlich die größte Verbesserung im ganzen Block. Die Normierung (Fig. 10) über den Redundanzanteil ändert dies nicht.

Allgemein bilden y-Koordinatenfehler in Bündelblöcken keine Schwierigkeiten bei der Lokalisierung.

### 4. Grober Fehler im Punkt 1509 (Fig. 11, 12)

Dagegen sind Paßpunktfehler schwer aufdeckbar. Dazu bringen wir in der z-Koordinate des Paßpunktes 1509 einen 1 m - Fehler an. Das Ergebnis der Ausgleichung ist in Fig. 11 dargestellt. Die Verbesserungen an den Paßpunkten bleiben unter 2 cm und lassen keinen Paßpunktfehler vermuten. Vielmehr könnte man den Bildpunkt 81203 verdächtigen, der dem grobfalschen Paßpunkt gegenüberliegt. Die Verbesserung  $\underline{v}_x$  dieses Punktes ist größer als der 3-fache Betrag der durchschnittlichen Verbesserungen. Eine Lokalisierung des Fehlers scheint gewährleistet.

Auch hier belehrt uns der statistische Test eines besseren (Tab. 12). Die verdächtige Koordinate erhält eine normierte Verbesserung von 6.30, während 3 der 5 Paßpunkte eine nahezu gleiche Testgröße  $\sim 11$  aufweisen. Die übrigen 2 Paßpunkte 1165 und 1207 kontrollieren sich gegenseitig. Da der Punkt 1165 in der Nähe von 1207 und nicht in der Mitte zwischen 82103 liegt, kann man praktisch nicht entscheiden, welcher der 3 Paßpunkte 81203, 1502 oder 1509 grob falsch ist, lediglich eine schwache Tendenz zugunsten des tatsächlich richtigen Punktes 81203 ist festzustellen.

Gerade bei heterogenen Beobachtungen, d. h. Beobachtungen mit unterschiedlicher Dimension oder stark unterschiedlichen Gewichten lohnt es sich, die Geometrie beim Test zu berücksichtigen. Offensichtlich würden Näherungswerte für die Redundanzanteile hier zwar zur Erkennung der Fehler führen, aber keinen Hinweis über die Nichtlokalisierbarkeit geben.

### 5. Mehrere grobe Fehler

Der einfache statistische Test, d. i. der Test auf einen groben Fehler ist allerdings nicht in der Lage bei Fehlerhäufungen die groben Fehler richtig zu lokalisieren. Dies zeigt der Block mit allen 3 Fehlern gemeinsam (Fig. 13, 14). Zwar ist eine teilweise Lokalisierung möglich - der Punkt 1062 wird verdächtigt, doch ist eine Nachmessung unumgänglich.

Die Darstellung in den Figuren ist punktbezogen, z. B.

Punkt	1301			
	0.132	0.392	0.0673	x
	0.198	0.262	0.156	y
Bild	<u>855</u>	<u>852</u>	<u>848</u>	

Die Werte in der linken, mittleren bzw. rechten Spalte beziehen sich auf den Punkt im linken, mittleren bzw. rechten Bild. Die 1., 2. bzw. bei Paßpunkten auch die 3. Zeile beziehen sich auf die x-, y- bzw. z-Koordinate, z. B.

Punkt	1165			
		0.309	0.311	x
		0.303	0.301	y
	0.0140			z
Bild	↑	<u>855</u>	<u>852</u>	

im Höhenmodell (Höhenpaßpunkt).

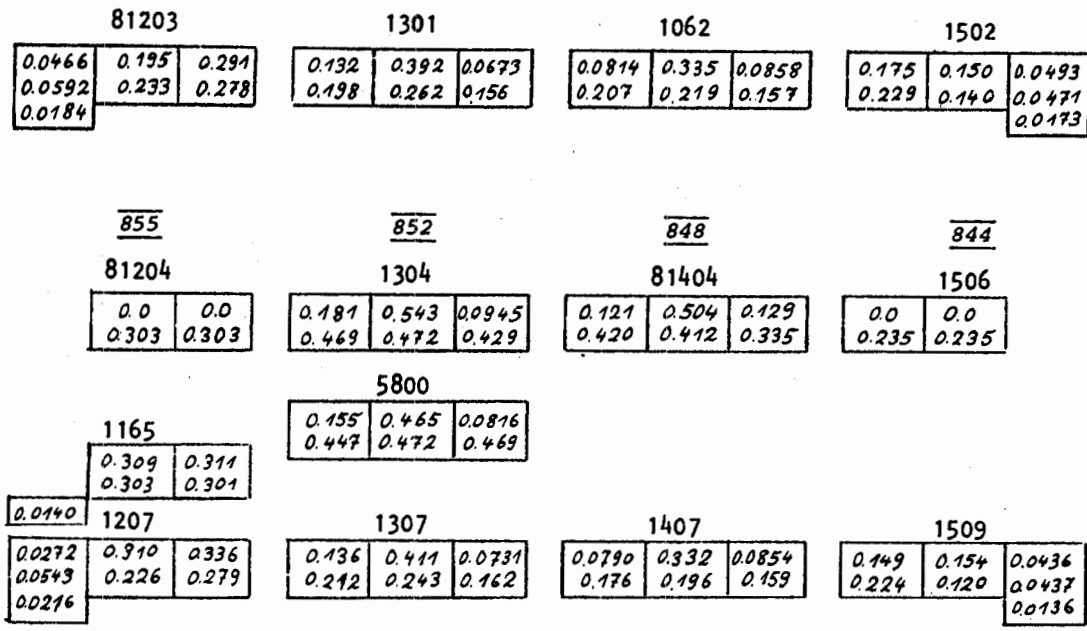


Fig. 3 Redundanzanteile  $r_i$

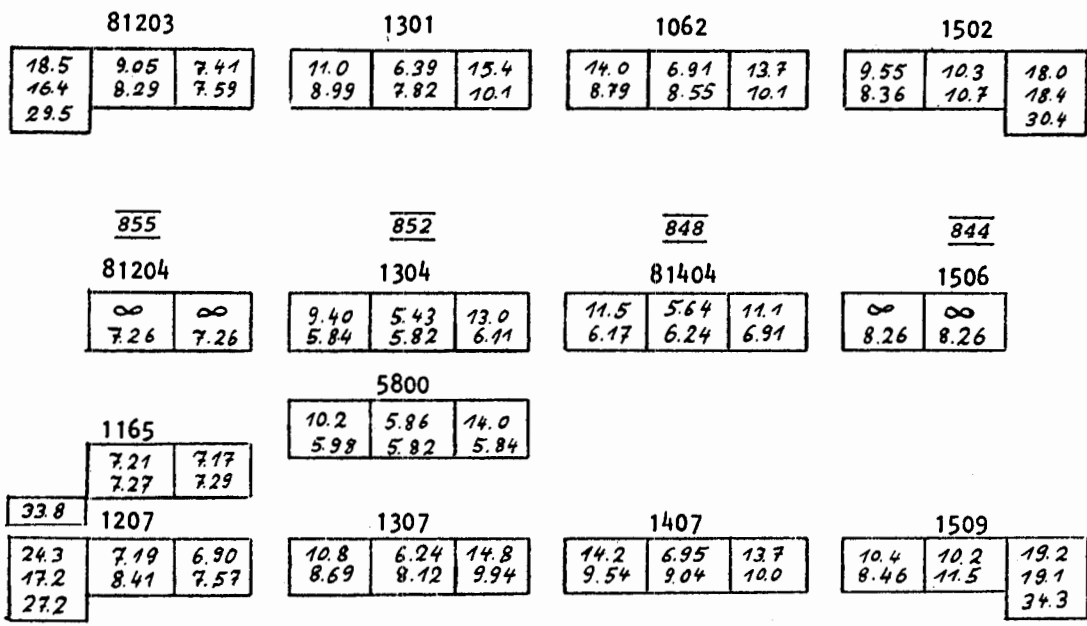


Fig. 4 Kontrollierbarkeitswerte  $\delta'_{oi}$

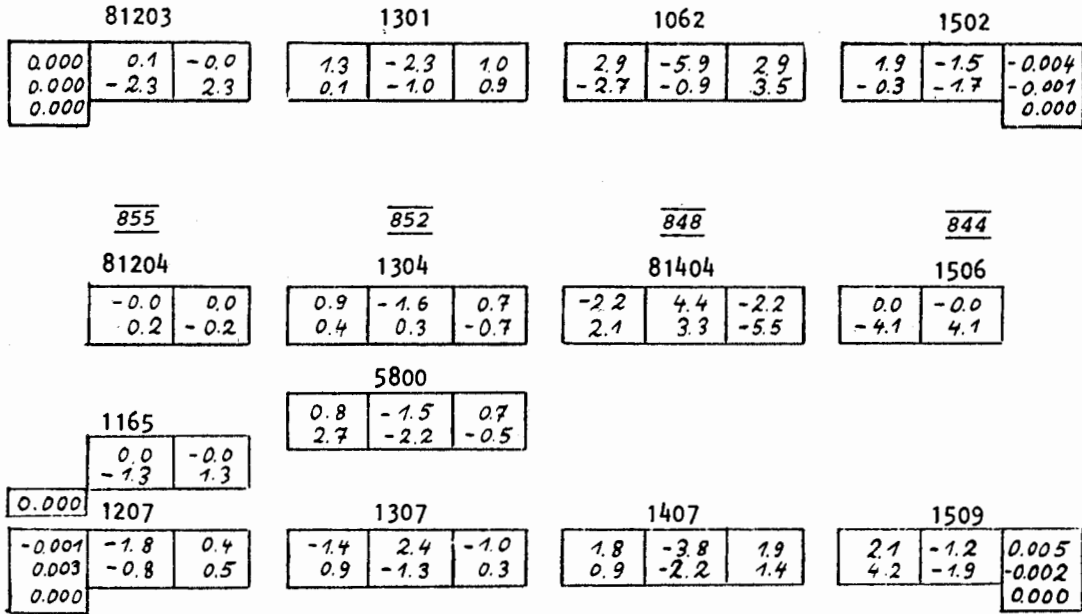


Fig. 5 Verbesserungen  $v_i$ , ohne grobe Fehler

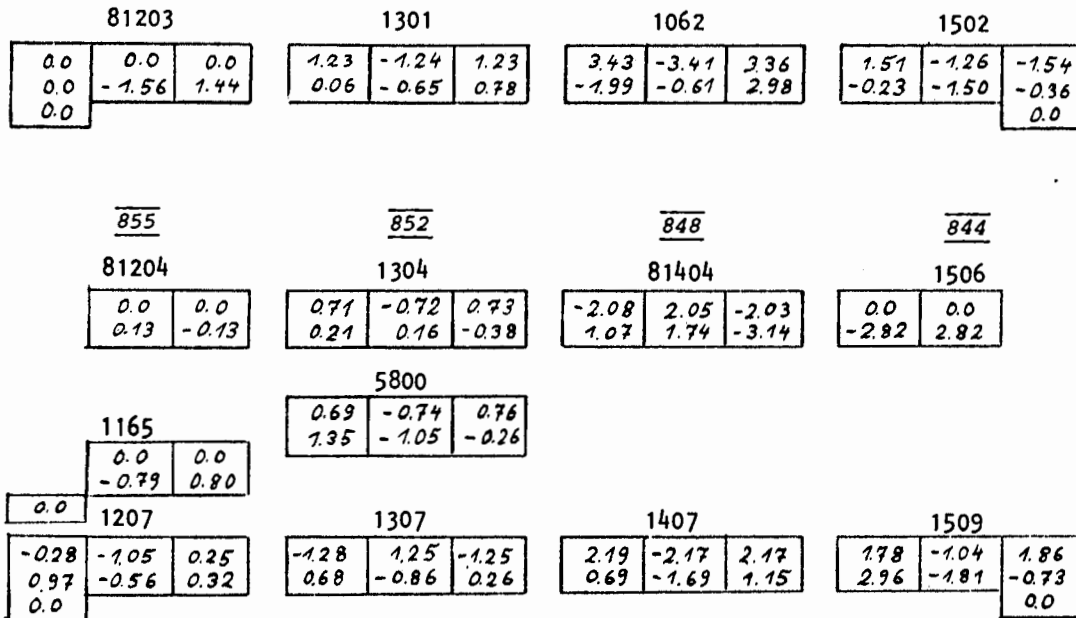


Fig. 6 Testgrößen  $w_i$ , ohne grobe Fehler

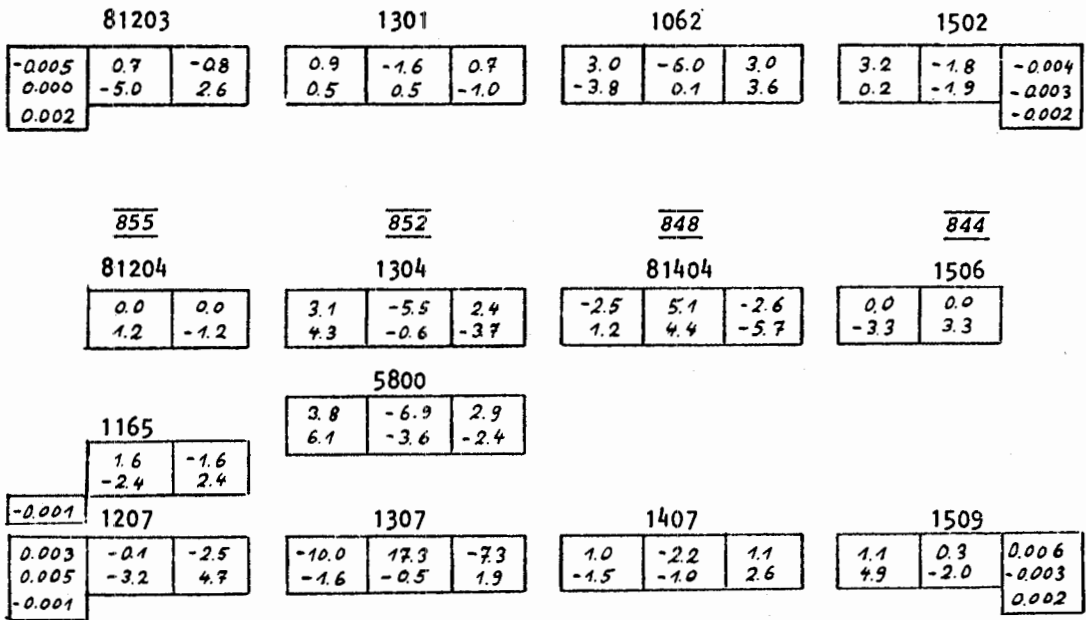


Fig. 7 Verbesserungen  $v_i$ , VP 1307,  $\tilde{\sigma}_x = 63 \mu\text{m}$

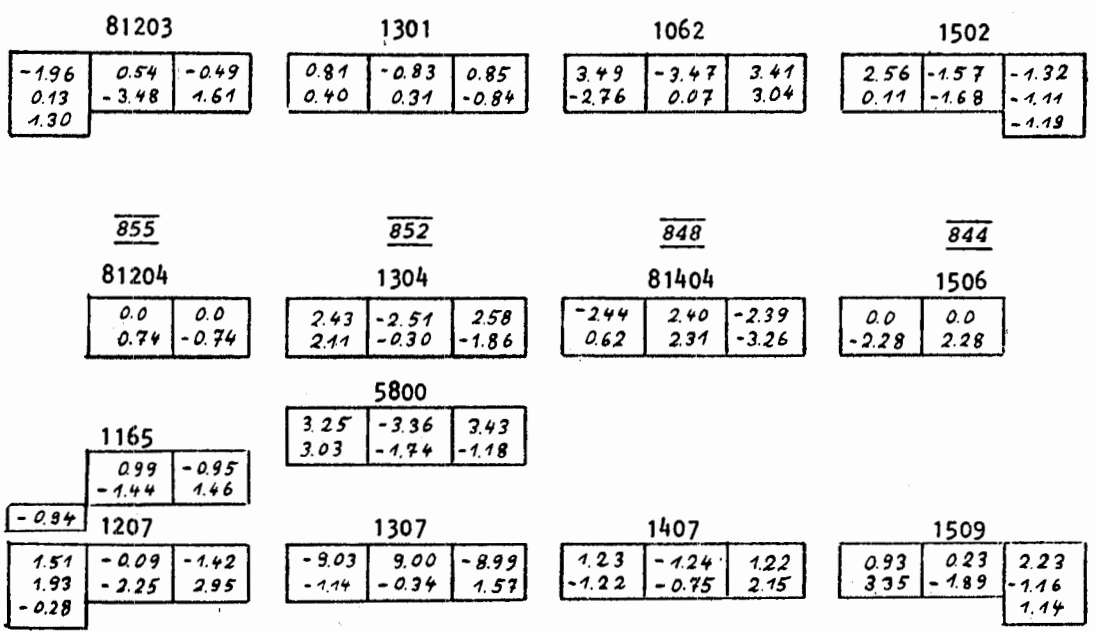


Fig. 8 Testgrößen  $w_i$ , VP 1307,  $\tilde{\sigma}_x = 63 \mu\text{m}$

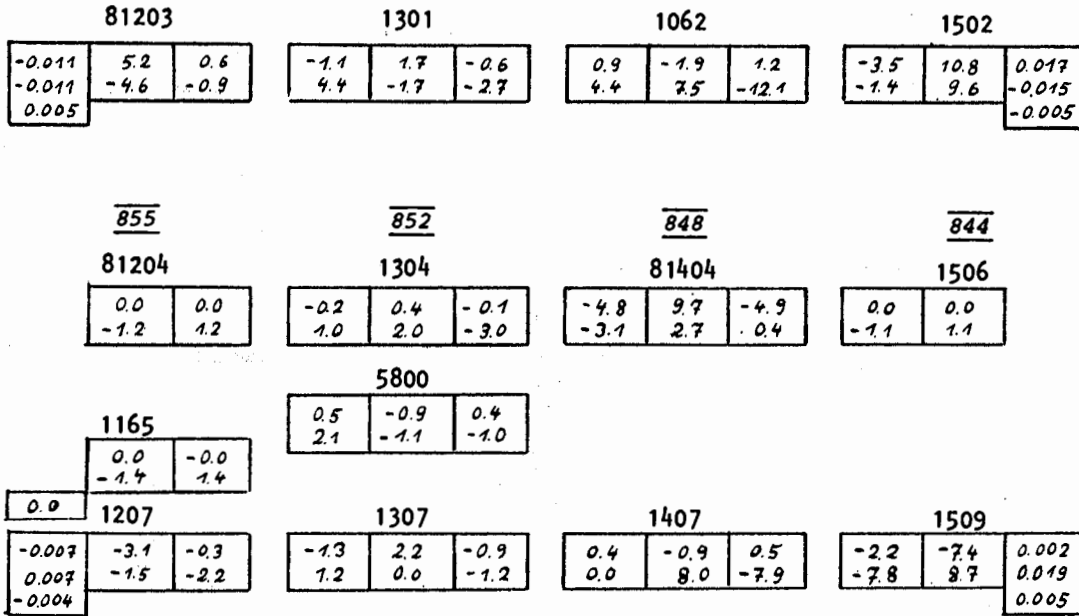


Fig. 9 Verbesserungen  $v_i$ , VP 1062,  $\tilde{v}_y = 100 \mu\text{m}$

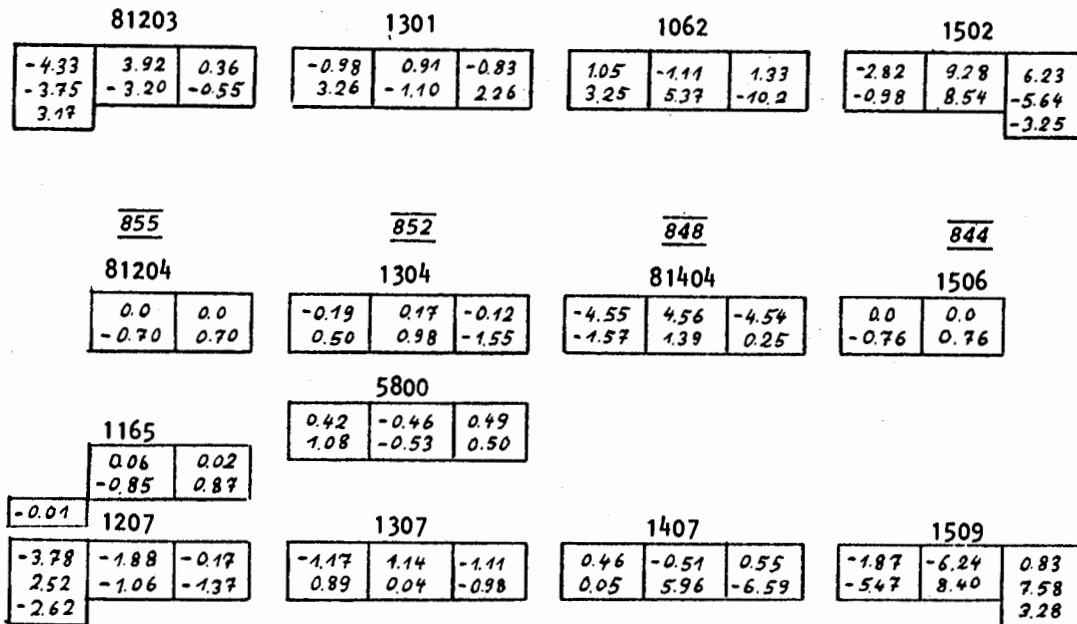


Fig. 10 Testgrößen  $w_i$ , VP 1062,  $\tilde{v}_y = 100 \mu\text{m}$

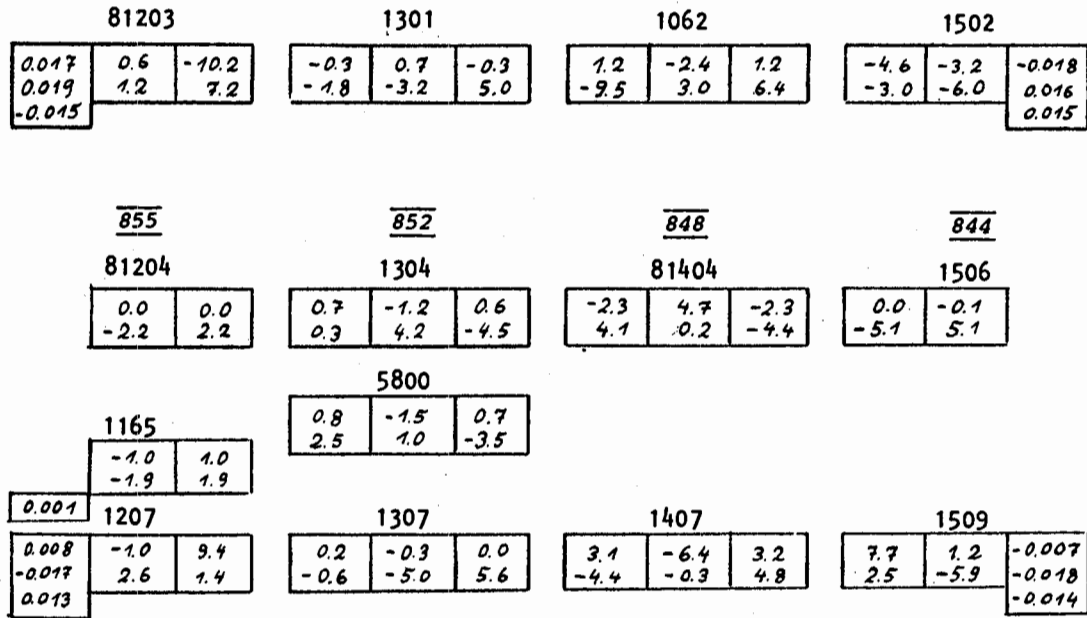


Fig. 11 Verbesserungen  $v_i$ , PP 1509,  $\tilde{\sigma}_z = 1$  m

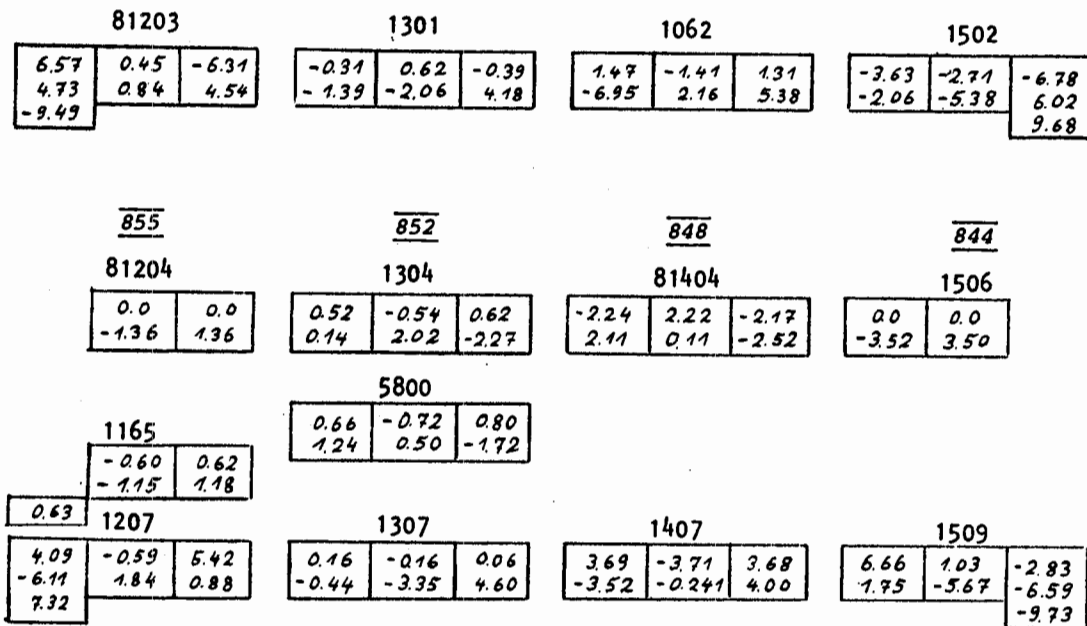


Fig. 12 Testgrößen  $w_i$ , PP 1509,  $\tilde{\sigma}_z = 1$  m

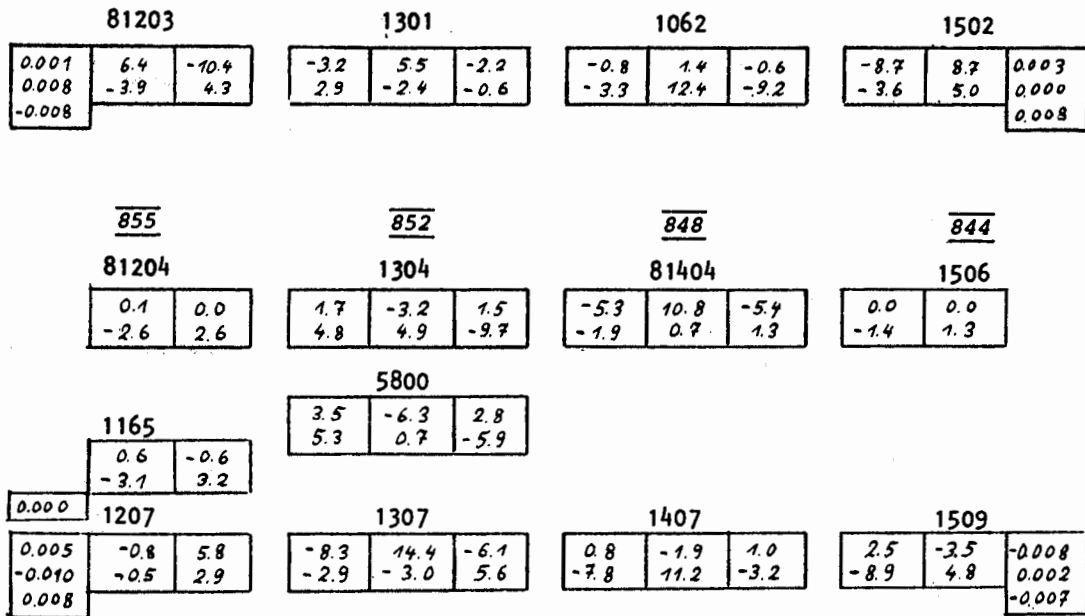


Fig. 13 Verbesserungen  $v_i$ , 3 grobe Fehler

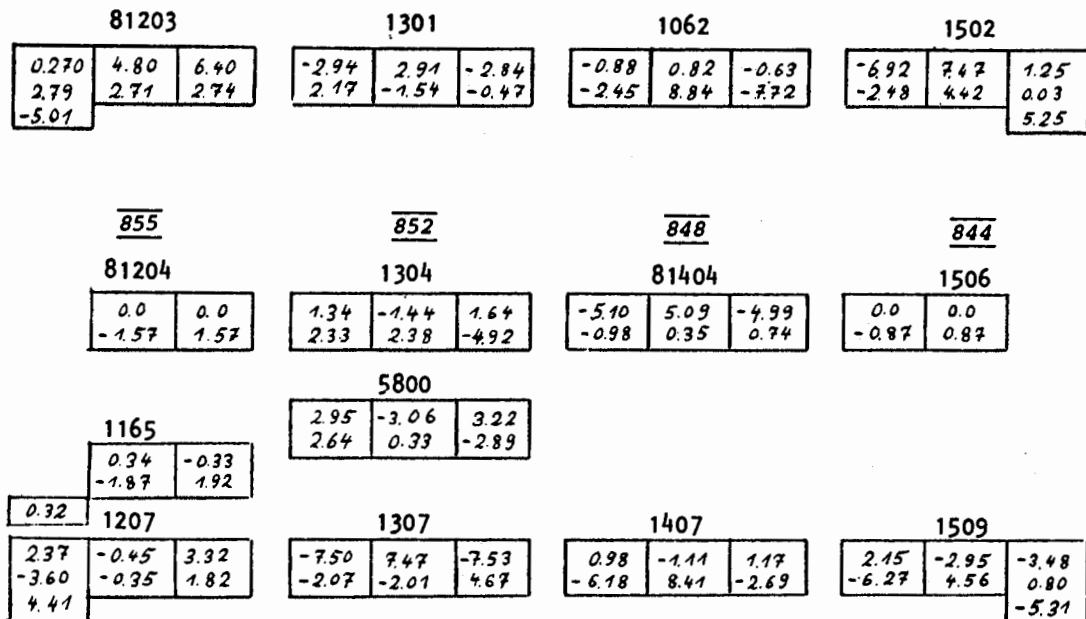


Fig. 14 Testgrößen  $w_i$ , 3 grobe Fehler



**III. Interpretation der Zuverlässigkeitsmaße in einem photogrammetrischen**

**Bündelblock**

1. Das Beispiel soll das Maß  $\bar{\delta}_{0,i}$  für die äußere Zuverlässigkeit an Hand eines Bündelblocks erläutern. Insbesondere geht es um die Frage, wie die Ungleichung

$$\nabla_{0,i} f \leq \bar{\delta}_{0,i} \sigma_f \quad (1)$$

in praktischen Fällen interpretiert werden kann und inwieweit einfache Funktionen  $f$ , speziell die Koordinaten selbst, die Ungleichung erfüllen.

In der Figur ist ein Bündelblock mit 4 Streifen à 9 Bildern dargestellt. Die Neupunkte bilden ein regelmäßiges Gitter mit der Gitterweite einer Basislänge. Es handelt sich um Weitwinkelaufnahmen mit dem Bildmaßstab 1:10 000. Die Bilder enthalten 6 bzw. 9 Punkte an den Standardstellen (Blockversion E 9). Die Bildkoordinaten werden als gleichgenau mit  $\sigma_x = \sigma_y = 10 \mu\text{m}$  unterstellt, die Paßpunkte seien fehlerfrei.

Die Ausgleichung erfolgte mit dem Programm DRAUS für die dreidimensionale Netzausgleichung von MAYER (ZfV 1979, S. 73), da dieses Programm die mittleren Fehler von Koordinaten und Strecken berechnen kann. Bei den Beobachtungen handelt es sich daher um Horizontalrichtungen bzw. Zenitwinkel, die im Projektionszentrum gemessen seien. Die mittleren Fehler der Richtungen sind so gewählt, daß die aus den Richtungen ableitbaren Bildkoordinaten die gleiche Genauigkeit von  $10 \mu\text{m}$  erhalten. Damit ist nicht nur die geometrische Struktur des Bündelblocks sondern auch die Genauigkeitsstruktur nachgebildet.

2. An den ansonsten fehlerfreien Beobachtungen bringen wir jeweils getrennt 6 grobe Fehler der Größe  $0.005 \text{ gon}$  an. Wir erhalten nacheinander (vgl. Tabelle):

- den Redundanzanteil aus der (Änderung der) Verbesserung  $\nabla v_i$

$$r_i = - \nabla v_i / \nabla l_i; \quad (2)$$

- die Koordinatenverschiebungen  $\nabla_i x, \nabla_i y, \nabla_i z$  an den Zielpunkten bzw. an dem Punkt, der dem Zielpunkt am nächsten liegt;
- den Grenzwert  $\nabla_0 l_i$  für gerade erkennbare Fehler mit Hilfe des mittleren Fehlers  $\sigma l_i$  un dem Redundanzanteil  $r_i$

$$\nabla_0 l_i = \sigma l_i \delta_0 / \sqrt{r_i} \quad (\delta_0 = 4); \quad (3)$$

- den Einfluß eines groben Fehlers der Größe  $\nabla_0 l_i$  auf die Koordinaten,  $\nabla_{0,i} x, \nabla_{0,i} y, \nabla_{0,i} z$ ;
- die Genauigkeit der betreffenden Koordinaten  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ;
- den Einfluß des Fehlers  $\nabla_0 l_i$  auf die Koordinaten, bezogen auf die Genauigkeit;
- den Anteil  $u_{t_i}$  der Beobachtung an der Bestimmung der Orientierung der Kamera (vgl. Anhang 2.4, S. 184)

- das Zuverlässigkeitsmaß

$$\bar{\delta}_{0,i} = \delta_0 \sqrt{\frac{1 - r_i - u_{t_i}}{r_i}} \quad (4)$$

3. Wir können nun den Einfluß  $\nabla_{0,i}x$  mit dem theoretischen Maß  $\bar{\delta}_{0,i} \cdot \sigma_x$  oder auch den auf die Genauigkeit bezogenen Einfluß  $\nabla_{0,i}x/\sigma_x$  mit dem Zuverlässigkeitsmaß  $\bar{\delta}_{0,i}$  vergleichen:

$$\nabla_{0,i}x/\sigma_x \leq \bar{\delta}_{0,i}$$

Für die Funktion haben wir zunächst die Koordinaten selbst gewählt,  $f_1 = x$ ,  $f_2 = y$ ,  $f_3 = z$ .

Sie werden in Abhängigkeit von der Geometrie verschieden stark beeinflusst. Im einzelnen läßt sich folgendes beobachten:

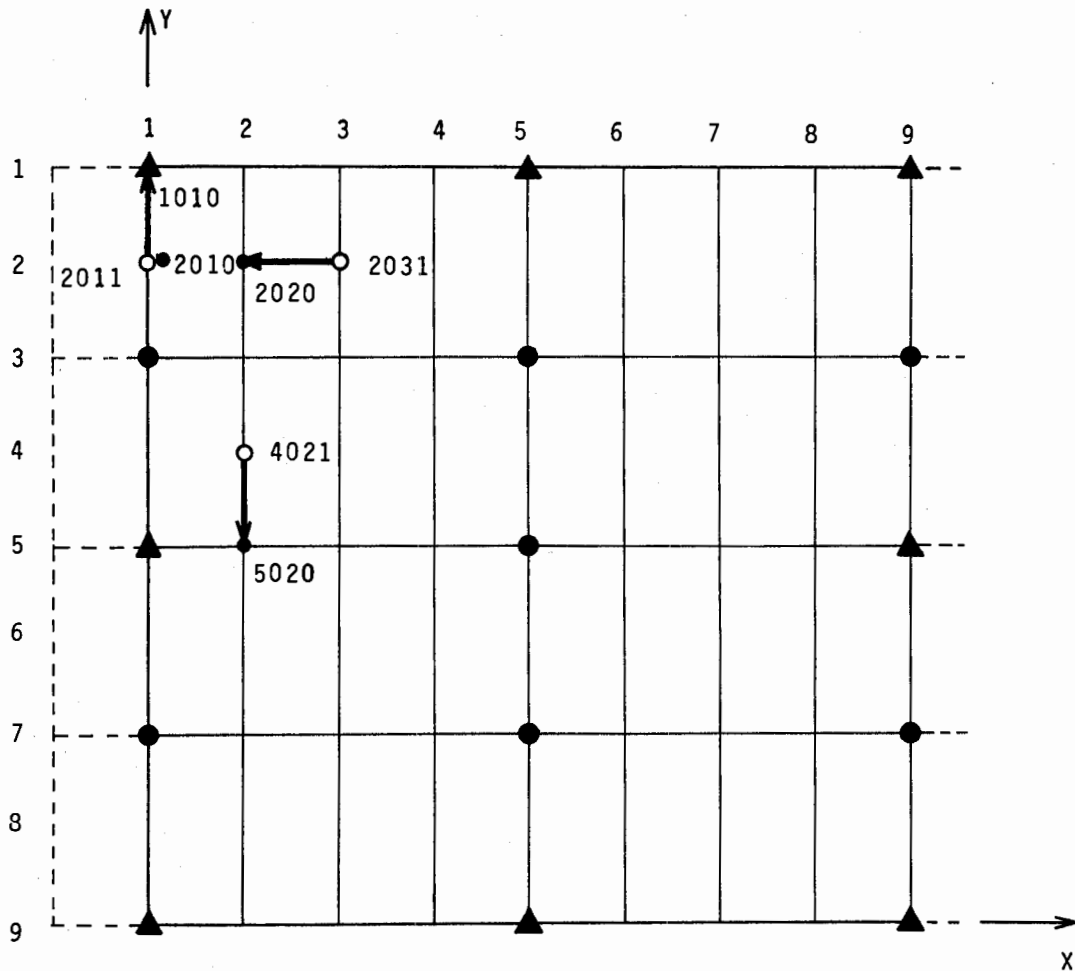
- Der Einfluß nicht erkennbarer Fehler auf die Neupunkte schwankt in der Lage zwischen 15 cm und 70 cm, in der Höhe zwischen 1 und 84 cm (Zeilen 10-12). Dies ist bei der gegebenen Genauigkeit der Bildkoordinaten von 10  $\mu$ m nicht hinreichend gut.
- Bezogen auf die jeweilige Genauigkeit der Koordinaten ist dieser Einfluß gering bis mäßig (Z. 16-18). Er erreicht im Extremfall nur das 5-fache des mittleren Fehlers.
- Die Verfälschung der Koordinaten erfolgt jeweils in der Richtung in der die Bildkoordinaten verfälscht sind. In Abhängigkeit von der Geometrie wird die z-Koordinate mitverfälscht, u. U. stärker als die Lagekoordinaten; vgl. Strahl 4021-5020, Zenitdistanz (y-Koordinate, Z. 18).
- In Zeile 21 ist angegeben, wieviel % der theoretischen Grenze  $\bar{\delta}_{0,i}$  von den ausgewählten Funktionen tatsächlich erreicht werden. Der Prozentsatz streut zwischen 40 und 70 %. Die theoretische Grenze wird von keiner dieser einfachen Funktionen erreicht. In den meisten Fällen wird sie etwa nur zur Hälfte ausgenutzt; die Ausnahme bildet die x-Koordinate des Punktes 2010. Die Werte deuten darauf hin, daß bei schwacher Geometrie der Spielraum eher ausgeschöpft wird als bei guter Geometrie. D. h. die Zuverlässigkeit ist tatsächlich besser als die ohnehin guten Werte vermuten lassen.

4. Um die Zuverlässigkeit der Nachbarschaft von Punkten zu überprüfen, ist in Zeilen 22-41 der Einfluß nicht erkennbarer Fehler auf jeweils 3 Strecken dargestellt. Hier kann man folgendes feststellen:

- Der Einfluß nicht erkennbarer Fehler auf die Nachbarschaft der Punkte liegt zwischen 13 und 62 cm. Wieder wird Punkt 2020 bzw. die Strecke 2010-2020 unzulässig stark verfälscht (Z. 32).
- Bezogen auf die erreichte Genauigkeit sind diese Werte akzeptierbar. Das bedeutet, daß sowohl die Zuverlässigkeit als auch die Genauigkeit zu verbessern wäre. Maßnahmen zur Erhöhung der Zuverlässigkeit führen (zumindest in der Photogrammetrie) i.a. auch zu einer höheren Genauigkeit.
- Der Vergleich der Zuverlässigkeit von Koordinaten und Strecken zeigt, daß die Nachbarschaft der Punkte unzuverlässiger bestimmt ist als die Punkte. Der Unterschied ist allerdings gering (vgl. Z. 21 und 35), bzw. spielt sich auf hohem Niveau ab. Daher kann man sich auf die Untersuchung der Zuverlässigkeit der Koordinaten beschränken und lokale Zuverlässigkeitsmaße benutzen, die rea-

listischer und zugleich günstiger sind.

Fig. 1



Paßpunkte:  $\sigma = 0$

▲ Vollpaßpunkte (X,Y,Z)

○ Projektionszentrum

● Höhenpaßpunkt (Z)

● Neupunkt

Programm: DRAUS (dreidimensionale Ausgleichung  
 geodätischer Netze)

1	Strahl	2031-2020		4021-5020		2011-1010	
		Zenit- distanz x	Horizon- talr. y	Zenit- distanz y	Horizon- talr. x	Zenit- distanz y	Horizon- talr. x
3	$\sigma_{l_i} (cc)$	29.38	63.66	29.38	63.66	29.38	63.66
4	$r_i$	.127	.384	.324	.479	.119	.125
5	Punkt	2020	2020	5020	5020	2010	2010
6	$\nabla x$ (m)	.0580	.0069	.0051	.0189	.0158	.0483
7	$\nabla y$ (m)	.0069	.0282	.0476	.0077	.0387	.0102
8	$\nabla z$ (m)	.1250	.0047	.0946	.0014	.0039	.0502
9	$\nabla_0 l_i (cc)$	330.	411.	206.	368.	340.	721.
10	$\nabla_0 x$ (m)	.383	.057	.021	.139	.107	.697
11	$\nabla_0 y$ (m)	.046	.232	.196	.057	.263	.147
12	$\nabla_0 z$ (m)	.826	.038	.390	.010	.027	.724
13	$\sigma_x$ (m)	.100	.100	.073	.073	.137	.137
14	$\sigma_y$ (m)	.120	.120	.080	.080	.141	.141
15	$\sigma_z$ (m)	.217	.217	.144	.144	.249	.249
16	$\nabla_0 x / \sigma_x$	<u>3.83</u>	0.57	0.28	<u>1.90</u>	0.78	<u>5.09</u>
17	$\nabla_0 y / \sigma_y$	0.38	<u>1.93</u>	2.45	0.71	<u>1.86</u>	1.04
18	$\nabla_0 z / \sigma_z$	3.81	<u>0.17</u>	<u>2.71</u>	0.07	0.11	2.91
19	$u_{t_i}$	.213	.269	.213	.269	.721	.471
20	$\bar{\delta}_{0i}$	9.14	3.81	4.78	2.91	4.63	7.21
21	% <sup>1)</sup>	42	51	57	65	40	71
22	Strecke	2010-2020	1020-2020	4020-5020	5010-5020	1010-2010	2010-2020
23	s (m)	1000.	1000.	1000.	1000.	1000.	1000.
24	$\nabla_0 s$ (m)	0.397	0.239	0.202	0.138	0.263	0.384
25	$\sigma_s$ (m)	0.136	0.139	0.091	0.073	0.141	0.136
26	$\nabla_0 s / \sigma_s$	2.92	1.72	2.22	1.89	1.86	2.82
27	%	32	45	46	65	40	39
30	Strecke	2020-2030	2020-3020	5020-6020	5020-5030	2010-3010	2010-2030
31	s (m)	1000.	1000.	1000.	1000.	1000.	2000.
32	$\nabla_0 s$ (m)	0.374	0.192	0.272	0.135	0.350	0.620
33	$\sigma_s$ (m)	0.101	0.094	0.091	0.075	0.139	0.153
34	$\nabla_0 s / \sigma_s$	3.70	2.04	2.99	1.80	2.52	4.05
35	%	40	54	63	62	54	56
36	Strecke	2020-2040	2020-4020	5020-7020	5020-5040	2010-4010	2010-3020
37	s (m)	2000.	2000.	2000.	2000.	2000.	1414.
38	$\nabla_0 s$ (m)	0.400	0.194	0.142	0.138	0.355	0.326
39	$\sigma_s$ (m)	0.117	0.124	0.099	0.090	0.183	0.132
40	$\nabla_0 s / \sigma_s$	3.42	1.56	1.56	1.53	1.94	2.47
41	%	37	41	33	53	42	34

1)  $(\nabla_0 k / \sigma_k) / \bar{\delta}_{0i} \cdot 100$

#### IV. Optimierung der Zuverlässigkeit eines photogrammetrischen Blocks

1. Am Beispiel eines photogrammetrischen Lageblocks mit unabhängigen Modellen soll die Wirkungsweise verschiedener Verfahren zur Verbesserung der Zuverlässigkeit demonstriert werden.

Gegeben sei der in Fig. 1 abgebildete schematische Block mit 6 Streifen à 12 Modellen mit 4 Verknüpfungspunkten pro Modell. Die 4 Paßpunkte in den Ecken (Abstand  $i = 12$  Basislängen) haben die gleiche Genauigkeit wie die Modell-

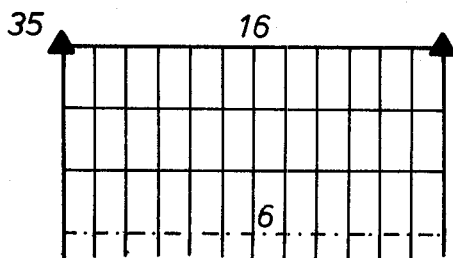


Fig. 1

Gegebener Block, äußere Zuverlässigkeit am Paßpunkt, Rand und Mitte des Blocks

$$\bar{\delta}_{\max} = 35$$

koordinaten. In der Figur sind die Zuverlässigkeitswerte  $\bar{\delta}_{0,i}$  für die drei typischen Stellen im Block dargestellt. Die Paßpunkte weisen mit  $\bar{\delta}_{0,i} = 35$  die schwächste Zuverlässigkeit auf. Grobe Fehler in den photogrammetrischen Verknüpfungspunkten am Rand des Blocks können mit  $\bar{\delta}_{0,i} = 16$  ebenfalls das Ergebnis unzulässig verfälschen. Die Zuverlässigkeit im inneren des Blocks ist mit  $\bar{\delta}_{0,i} = 6$  gerade noch akzeptierbar.

Wir wollen nun diese drei Schwächen des Blocks, zunächst einzeln, dann gemeinsam, durch möglichst einfache Maßnahmen beheben.

2. Die Schlechte Kontrollierbarkeit der Paßpunkte läßt sich durch Paßpunktgruppen verbessern. Für die Wahl der Punktverteilung innerhalb der Gruppe ist u. a. folgendes zu berücksichtigen:

- Die Punkte sollten, soweit dies innerhalb eine Punktgruppe möglich ist, unabhängig sein und daher möglichst weit auseinander liegen.
- Die Punkte sollten mindestens in zwei Modellen ( bei Bündeln in drei Bildern) liegen, um photogrammetrische und terrestrische Fehler trennen zu können.
- Die Zahl der Punkte sollte mindestens 3 sein, um die gegenseitige Lage der Punkte photogrammetrische über die Ähnlichkeit von Dreiecken kontrollieren zu können. Falls Nachmessungen der Paßpunkte nicht möglich oder erwünscht sind, sind 4 Punkte pro Gruppe empfehlenswert, da nur dann eine Lokalisierung eines einzelnen Paßpunktfehlers gewährleistet ist.

Bei kleinen Abständen innerhalb oder unter den Paßpunktgruppen ist die Kontrollierbarkeit innerhalb der Paßpunktgruppe höher, so daß man mit jeweils einem Punkt weniger (2 oder 3) auskommt.

- Eine gemeinsame Verschiebung der Paßpunktgruppe ist schwerer aufdeckbar als ein einzelner Paßpunkt!

Die Zuverlässigkeit einer Paßpunktgruppe mit 3 Punkten ist in Fig. 2 dargestellt. Die Verbesserung der Werte um den Faktor 4 an den Paßpunkten hat nahezu keinen Einfluß auf die Zuverlässigkeit der photogrammetrischen Punkte.

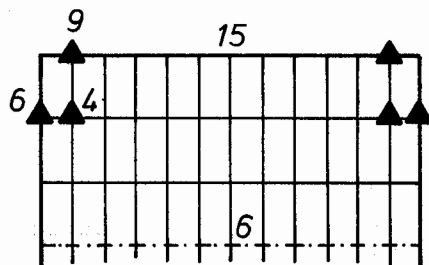


Fig. 2  
 Paßpunktgruppen zur Erhöhung der Zuverlässigkeit ( $\bar{\delta}_0$ ) im Paßpunktbereich

3. Die Schwäche der Randzonen des Blocks läßt sich prinzipiell auf zwei Arten beheben:

- Erhöhung der Überdeckungsverhältnisse am Rand des Blocks (vgl. Ackermann, 1966),
- Erweiterung des Blocks um 1/2 Streifenbreite bzw. Basislänge.

Die Wirkung der zweiten Methode zeigt Fig. 3. Schraffierte Blockteile werden nicht verwendet.

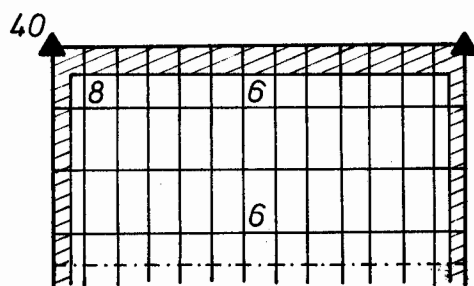


Fig. 3  
 Rändern des Blocks zur Erhöhung der Zuverlässigkeit ( $\bar{\delta}_0$ ) am Rand des Blocks

Die Zuverlässigkeitswerte gehen am Rand auf ca. die Hälfte zurück.

4. Die Zuverlässigkeit im inneren des Blocks kann man nur durch eine generelle Erhöhung der Verknüpfung erreichen, sei es durch höhere Überdeckung (Bündel) oder durch Punktgruppen (unabhängige Modelle). Die Verwendung von Verknüpfungspunktpaaren führt zu einer wesentlich besseren Zuverlässigkeit, wie es Fig. 4 zeigt. Der Abfall zum Rand hin ist noch deutlich zu erkennen.

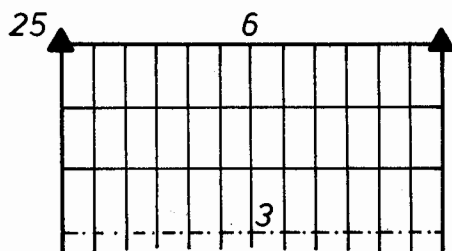


Fig. 4  
 Doppelpunkte zur Erhöhung der Zuverlässigkeit ( $\bar{\delta}_0$ ) der photogrammetrischen Messungen

Alle drei Methoden optimieren jeweils eine Komponente und sind nahezu unabhängig voneinander.

5. Wenn wir alle drei Methoden kombinieren, so erhalten wir den, von der Zuverlässigkeit her betrachtet, voll akzeptierbaren Block der Fig. 5.

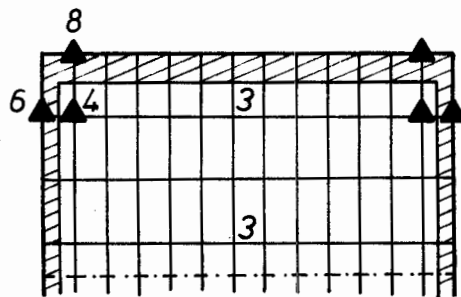


Fig. 5  
Optimierter Block, äußere Zuverlässigkeit an Paßpunkten, Rand und Mitte des Blocks (schraffierte Blockteile werden nicht verwendet)

$$\bar{\delta}_{\max} = 4$$

Nicht erkannte grobe Fehler können die Koordinaten nun nur noch bis zum 4-fachen ihres mittleren Fehlers  $\sigma_k$  verfälschen

#### Literatur:

Ackermann, F.: On the Theoretical Accuracy of Planimetric Block Triangulation, Photogrammetria, 21, 1966, S. 145-170