

W. Förstner

THEORIE DER AUSSEREN ZUVERLÄSSIGKEIT

1. Einleitung

Die Verdichtung von geodätischen Grundlagennetzen hat nahezu immer mit Spannungen im übergeordneten System zu rechnen. Die Gründe dafür sind in der Berechnungsmethode, dem Netz- bzw. Blockaufbau und der Art der Überprüfung der Beobachtungen zu suchen.

Erst mit der elektronischen Rechentechnik war man in der Lage, die hohe Genauigkeit des Beobachtungsmaterials auf die Koordinaten zu übertragen. Die Planung der Netze und Blöcke dagegen ist in den meisten Fällen der Erfahrung überlassen. Während die übergeordnete Struktur der Netze ihrer Darstellbarkeit wegen meist zufriedenstellend ist, weisen insbesondere die örtlichen Systeme zu geringe Kontrollmöglichkeiten auf. Auch die Vorurteile gegen die photogrammetrische Methode der Punktbestimmung haben einen Grund darin, daß man der Kontrolle der Beobachtungen anfänglich oft zu wenig Beachtung schenkte, sondern sich auf die Ausgleichung verließ, die ja nur kleine Verbesserungen an den Beobachtungen zeigte. Die Folge waren, und sind z. T. noch schwach überbestimmte Netz- oder Blockteile, die nicht erkennbare grobe Fehler enthalten können.

Dies ist Grund genug, sich auch theoretisch mit der Auswirkung nicht erkennbarer Fehler auf das Ergebnis einer Ausgleichung zu befassen. Die Anwendung der Theorie könnte ein Rechenprogramm zum Ziel haben, das die mit einem Test aufgedeckten Fehler und die ungünstigste Auswirkung nicht erkennbarer Fehler dokumentiert, um dem "Benutzer" der Koordinaten ein objektives Bild über die Zuverlässigkeit des Ergebnisses zu vermitteln.

Die Zuverlässigkeit geodätischer oder photogrammetrischer Koordinaten wird, wie wir in den gestrigen Vorträgen hörten, wesentlich bestimmt von der Geometrie, dem verwendeten Testverfahren und den gewählten statistischen Parametern. Daraus leiten sich zunächst untere Grenzwerte für erkennbare grobe Fehler ab, die mit einer vorgegebenen Sicherheit aufdeckbar sind. Grobe Fehler, die kleiner sind als diese Grenzwerte, können unentdeckt bleiben. Dies ist ein Maß für die Kontrollierbarkeit der Beobachtungen und bestimmt die innere Zuverlässigkeit im Sinne BAARDAS (1967, 1968, 1976).

Entscheidend für die Brauchbarkeit des Ergebnisses ist nun, wie stark nicht erkennbare grobe oder systematische Fehler die Koordinaten verfälschen können. Dies führt auf den Begriff der äußeren Zuverlässigkeit, d. i. die Zuverlässigkeit der Koordinaten. Große unerkannte grobe Fehler haben nicht immer einen starken Einfluß auf das Ergebnis, insbesondere bei Beobachtungen mit großer Standardabweichung oder bei Beobachtungen, die im wesentlichen nur Hilfsgrößen wie Maßstabsfaktoren oder Transformationsparameter bestimmen, zur Festlegung der Koordinaten aber selbst wenig beitragen.

Die Trennung von Hilfsunbekannten und Koordinaten führt zurück auf die Analyse der Geometrie einer Ausgleichung. Die Aufteilung der Redundanz und der Zahl der Unbekannten in die Redundanzanteile r_i und die Anteile u_i an der Bestimmung der Unbekannten läßt sich in einfacher Weise auf zwei Gruppen von Unbekannten übertragen und ermöglicht eine einfache Definition und Interpretation der äußeren Zuverlässigkeit.

2. Äußere Zuverlässigkeit aller Unbekannten einer Ausgleichung

Wir betrachten zunächst den Einfluß von groben Fehlern auf alle Unbekannten. Die Trennung in Transformationsparameter und Koordinaten behandeln wir in Abschnitt 3.

2.1 Die Schätzungen \hat{x} für die Unbekannten x hängen linear von den Beobachtungen l ab:

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l. \quad (1)$$

Den Einfluß von einzelnen Beobachtungsfehlern der Größe $\nabla_0 l_i$ auf die Schätzung \hat{x} bezeichnen wir mit $\nabla_{0,i} x$. Wir erhalten unmittelbar (bei unkorrelierten Beobachtungen)

$$\nabla_{0,i} x = (A^T P A)^{-1} a_i p_i \nabla_0 l_i. \quad (2)$$

Der Vektor a_i enthält die Koeffizienten der Fehlergleichungen für die i -te Beobachtung. I. a. beeinflußt ein einzelner grober Fehler (fast) alle Unbekannte, wie es Fig. 1 (S. 3) für einen Teil eines Polygonnetzes zeigt. Der Streckenfehler führt zu einer flächenhaften Deformation des Netzes. Erst bei den Festpunkten klingt der Einfluß deutlich ab.

Für jede Beobachtung l_i erhält man einen Vektor $\nabla_{0,i} x$. Man kann für jede Koordinate den maximalen Einfluß $\max_j (\nabla_{0,i} x_j)$ unerkenntbarer Fehler $\nabla_0 l_i$ bestimmen. Dies ist ein sehr anschauliches Maß für die äußere Zuverlässigkeit. Die Berechnung erfordert die Bestimmung von $n \times u$ Einflußgrößen. Bei kleinen Blöcken oder Netzen ist dieser Aufwand tragbar. Bei Netzen oder Blöcken mit mehreren hundert Punkten und in Folge dessen mit vielleicht mehr als 1000 Beobachtungen ist dieses Maß für die Beurteilung wirtschaftlich nicht mehr vertretbar. Außerdem werden andere aus den Koordinaten ableitbare Größen wie Strecken oder Winkel, d. h. die Nachbarschaft der Punkte u. U. vergleichsweise stärker verfälscht.

2.2 Wir fragen daher nach dem Einfluß nicht erkennbarer grober Fehler auf Koordinaten, Richtungen, Flächen usw., allgemein auf eine Funktion f der Unbekannten \hat{x} . Sie sei in linearer (oder linearisierter) Form gegeben

$$f = e_1 \hat{x}_1 + e_2 \hat{x}_2 + \dots + e_u \hat{x}_u = e^T \hat{x}. \quad (3)$$

Der Einfluß $\nabla_{0,i} f$ eines groben Fehlers $\nabla_0 l_i$ auf die Funktion f ist

$$\nabla_{0,i} f = e^T \nabla_{0,i} x = e^T Q_{xx} a_i p_i \nabla_0 l_i. \quad (4)$$

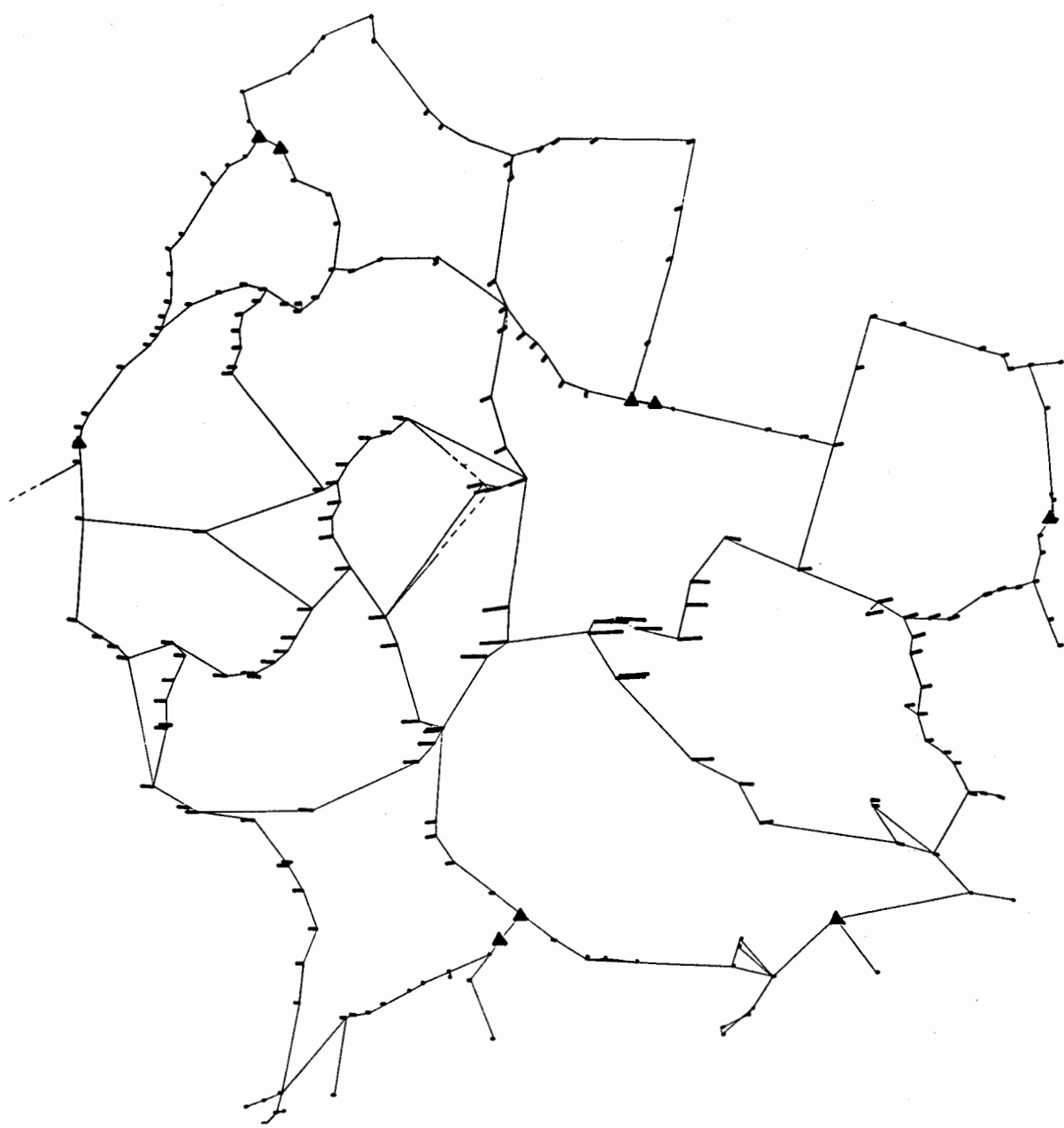


Fig. 1 Auswirkung eines Streckenfehlers in einem Polygonnetz

- Fehlervektoren —————
- Strecken- und Richtungsmessungen —————
- nur Richtungsmessung - - - - -
- Festpunkte ▲

Der Faktor $e^T Q_{XX} a_i$ ist das (mit Q_{XX} gewogene) Skalarprodukt der Vektoren e und a_i . Es ergibt sich aus

$$e^T Q_{XX} a_i = |e| \cdot |a_i| \cdot \cos(e, a_i) \quad (5)$$

oder anschaulich als das Produkt der Längen der beiden Vektoren und dem cosinus des eingeschlossenen Winkels. Sind die Vektoren parallel, ist $\cos(e, a_i) = \pm 1$; sind sie orthogonal, ist $\cos(e, a_i) = 0$. Da nun $|\cos(e, a_i)| \leq 1$ ist, gilt

$$e^T Q_{XX} a_i \leq |e| |a_i| = \sqrt{e^T Q_{XX} e} \sqrt{a_i^T Q_{XX} a_i} \quad (6)$$

So erhalten wir schließlich eine Ungleichung für den Einfluß, die mit $\nabla_{0,i} l_i = \sigma_0 \delta_0 / \sqrt{r_i p_i}$ zunächst in

$$\nabla_{0,i} f \leq \sqrt{e^T Q_{XX} e} \sqrt{a_i^T Q_{XX} a_i} p_i \sigma_0 \delta_0 / \sqrt{r_i p_i} \quad (7)$$

übergeht. Nun ist aber die Standardabweichung von \underline{f}

$$\sigma_f = \sigma_0 \sqrt{e^T Q_{XX} e} \quad (8)$$

$a_i^T Q_{XX} a_i$ ist als Gewichtungskoeffizient der ausgeglichenen Beobachtung \hat{l}_i wesentlicher Bestandteil des Anteils u_i der Beobachtung an der Bestimmung der Unbekannten

$$u_i = (A (A^T P A)^{-1} A^T P)_{ii} = a_i^T (A^T P A)^{-1} a_i p_i \quad (9)$$

Wenn wir nun Gl. (8) und (9) in Gl. (7) berücksichtigen, erhalten wir

$$\nabla_{0,i} f \leq \sigma_f \delta_0 \sqrt{\frac{u_i}{r_i}} \quad (10)$$

In Analogie zur Trennung des Grenzwerts $\nabla_{0,i} l_i$ in $\sigma_{l_i} \cdot \delta_{0,i}'$ definieren wir hier das Maß

$$\bar{\delta}_{0,i} = \delta_0 \sqrt{\frac{u_i}{r_i}} = \delta_0 \sqrt{\frac{1-r_i}{r_i}} \quad (11)$$

für die äußere Zuverlässigkeit der Unbekannten. Damit wird aus Gl. (10) schließlich

$$\nabla_{0,i} f \leq \sigma_f \cdot \bar{\delta}_{0,i} \quad (12)$$

Wir können mit Gl. (12) für jede beliebige Funktion der Unbekannten abschätzen, um welchen Betrag diese Funktion maximal durch einen nicht erkennbaren Fehler verfälscht werden kann. Dazu benötigen wir die Standardabweichung σ_f der Funktion \underline{f} .

Wie wir bei der Einführung des Ungleichheitszeichens Gl. (6) gesehen haben, kann es Funktionen geben, die entweder überhaupt nicht oder maximal von einem Fehler betroffen werden. Das Gleichheitszeichen in Gl. (12) gilt für $e = \pm a_i$ ($\cos(e, a_i) = \pm 1$), d. h. die ausgeglichene Beobachtung

$$\hat{l}_i = a_i^T \hat{x}$$

In Netzen ohne Maßstabsunbekannte ist das bei Streckenfehlern die relative Lage der betreffenden Punkte in Richtung der Strecke.

2.3 Das Beispiel der Fig. 2 soll dies veranschaulichen (vgl. Vortrag von Herrn Prof. v. MIERLO). Der Punkt N wird von den drei Punkten P_1 , P_2 und P_3 aus über die Winkel β_1 , β_2 und β_3 bestimmt. Die Winkel seien gleichgenau und unkorreliert

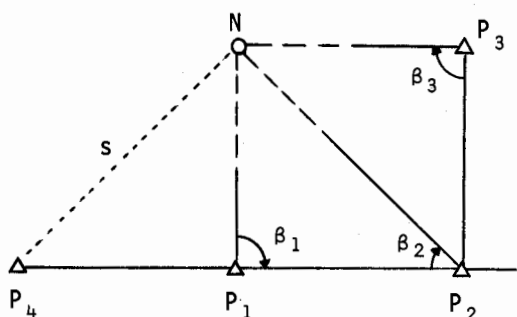


Fig. 2
 Überbestimmter
 Vorwärtsschnitt

($P = I$). Die Fehlergleichungsmatrix und die Inverse Q_{xx} der Normalgleichungsmatrix lauten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_{xx} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die Redundanzanteile r_i ergeben sich zu

$$r_1 = r_3 = 1/6, \quad r_2 = 2/3.$$

Die zugehörigen Grenzwerte sind (mit $\delta_0 = 4$)

$$\nabla_0 \beta_1 = \nabla_0 \beta_3 = \sigma_0 \delta_0 \sqrt{6} = 9.8 \sigma_0, \quad \nabla_0 \beta_2 = \sigma_0 \delta_0 \sqrt{\frac{3}{2}} = 4.9 \sigma_0.$$

Die Maße für die äußere Zuverlässigkeit erhalten wir nach Gl. (11) zu

$$\bar{\delta}_{0,1} = \bar{\delta}_{0,3} = \delta_0 \sqrt{5} = 8.9, \quad \bar{\delta}_{0,2} = \delta_0 / \sqrt{2} = 2.8.$$

Betrachten wir die Auswirkung $\nabla_{0,2}^x$ eines nicht erkennbaren groben Fehlers $\nabla_0 l_2$ auf die x-Koordinate des Punktes N. Die Berechnung des tatsächlichen Einflusses nach Gl. (2) ergibt

$$\nabla_{0,2}^x = \sigma_0 \delta_0 \sqrt{1/3}.$$

Die in Gl. (12) behauptete theoretische Grenze

$$\sigma_f \cdot \bar{\delta}_{0,i} = \sigma_0 \delta_0 \sqrt{5/12}$$

wird eingehalten.

Da der grobe Fehler in l_2 sich quer zur Richtung P_2N am stärksten auswirkt, wird etwa für die - nicht an der Ausgleichung teilnehmende - Strecke $s = \overline{P_4N}$ das Gleichheitszeichen in Gl. (12) gelten. Tatsächlich erhalten wir für die zugehörige linearisierte Funktion $\underline{f} = \underline{ds} = (\underline{dx} + \underline{dy})/\sqrt{2}$

$$\nabla_{0,2}^s = \sigma_0 \delta_0 \sqrt{1/3} = \sigma_s \cdot \bar{\delta}_{0,2}.$$

2.4 Die i. a. komplizierte Berechnung der r_i bzw. der u_i läßt sich (vgl. gestrige Übung zur ausgleichenden Geraden) für einige geodätische Grundaufgaben deutlich vereinfachen. Betrachten wir daher als zweites Beispiel die überbestimmte ebene Ähnlichkeitstransformation, die für sich oder als Teilaufgabe innerhalb einer iterativen Lösung der räumlichen Ähnlichkeitstransformation ihre Bedeutung hat (vgl. Abschn. 3.3).

Für gleichgenaue und unkorrelierte Koordinaten von n identischen Transformationspunkten erhalten wir die Redundanzanteile

$$r_i = r_{x_i} = r_{y_i} = 1 - 1/n - s_i^2 / [s_i^2], \quad (13)$$

wobei s_i den Abstand des Punktes i vom Schwerpunkt bezeichnet. Daraus ergeben sich die Anteile u_i an der Bestimmung der Transformationsparameter

$$u_i = u_{x_i} = u_{y_i} = 1/n + s_i^2 / [s_i^2]. \quad (14)$$

Für ein Standardmodell mit 6 Punkten (vgl. Fig. 3) erhalten wir die Werte

$$u_i = 1/6 + 1/22 = 0.212 \quad \text{für } i = 1, 2;$$

$$u_i = 1/6 + 5/22 = 0.394 \quad \text{für } i = 3 - 6.$$

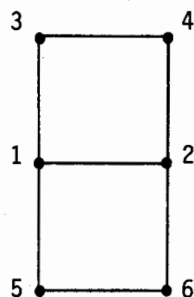


Fig. 3
Modell mit 6 Punkten

Daraus ergeben sich die Maße $\bar{\delta}_{0,i}$ für die äußere Zuverlässigkeit

$$\bar{\delta}_{0,i} = \delta_0 \sqrt{7/26} = 2.1 \quad \text{für } i = 1, 2;$$

$$\bar{\delta}_{0,i} = \delta_0 \sqrt{13/20} = 3.2 \quad \text{für } i = 3 - 6.$$

Grobe Fehler in den Eckpunkten haben erwartungsgemäß den stärksten Einfluß auf die Orientierung des Modells. Das bedeutet aber auch, daß die Transformationsparameter bei der Lageblockausgleichung Fehler in den Eckpunkten der Modelle stark absorbieren.

3. Äußere Zuverlässigkeit der Koordinaten

3.1 Wir untersuchen daher den Einfluß nicht erkennbarer grober Fehler auf einen Teil der Unbekannten, die Koordinaten. Dazu gehen wir zunächst zurück auf das der Ausgleichung zugrunde liegende mathematische Modell. Den Vektor x der u Unbekannten teilen wir auf in zwei Teilvektoren t und k für die u_t Transformationsparameter und die u_k Koordinaten. Die Fehlergleichungsmatrix A enthält die entsprechenden Teilmatrizen B und C . Wir erhalten so das Modell

$$\underline{l} + \underline{v} = A \hat{x} = B \hat{t} + C \hat{k}, \quad P = Q^{-1}. \quad (16)$$

Die Normalgleichungen lauten

$$\begin{aligned} N \hat{x} &= \begin{pmatrix} N_{tt} & N_{tk} \\ N_{kt} & N_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{h}_t \\ \underline{h}_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^T P B & B^T P C \\ C^T P B & C^T P C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B^T P \underline{l} \\ C^T P \underline{l} \end{pmatrix} \\ &= A^T P A \hat{x} - A^T P \underline{l} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Elimination der uns nicht interessierenden Transformationsparameter \hat{t} führt auf das reduzierte System

$$\bar{N} \hat{k} - \bar{h} = (N_{kk} - N_{kt} N_{tt}^{-1} N_{tk}) \hat{k} - (\underline{h}_k - N_{kt} N_{tt}^{-1} \underline{h}_t) = 0. \quad (18)$$

Durch Ausmultiplizieren kann man zeigen, daß es sich mit der reduzierten Fehlergleichungsmatrix

$$\bar{C} = C - B N_{tt}^{-1} N_{tk} \quad (19)$$

auch als

$$\bar{C}^T P \bar{C} \hat{k} - \bar{C}^T P \underline{l} = 0 \quad (20)$$

darstellen läßt. Die Matrix \bar{C} enthält die reduzierten Fehlergleichungskoeffizienten \bar{c}_i^T als Zeilen.

Damit ist formal völlige Analogie zum ursprünglichen Normalgleichungssystem hergestellt, wenn wir A durch \bar{C} und a_i^T durch \bar{c}_i^T ersetzen. Die Argumentation, die oben (Gl. (3) - (12)) zum Maß der äußeren Zuverlässigkeit führte, können wir nun vollständig übernehmen und müssen nur Gl. (9) in

$$u_{k_i} = (\bar{C} (\bar{C}^T P \bar{C})^{-1} \bar{C}^T P)_{ii} = \bar{c}_i^T (\bar{C}^T P \bar{C})^{-1} \bar{c}_i p_i \quad (9a)$$

ändern und in Gln. (10) und (11) u_i durch u_{k_i} ersetzen. Denn wir erhalten aus Gl. (9a) nur den Anteil der Beobachtungen an der Bestimmung der unbekanntenen Koordinaten. Aus Gl. (10) und (11) wird damit

$$\nabla_{0,i}^f \leq \sigma_f \delta_0 \sqrt{\frac{u_{k_i}}{r_i}} \quad (10a)$$

und

$$\bar{\delta}_{0,i} = \delta_0 \sqrt{\frac{u_{k_i}}{r_i}}. \quad (11a)$$

Gl. (12) bleibt unverändert.

3.2 Die Interpretation von Gl. (9a) wird klarer, wenn wir den restlichen Anteil u_{t_i} untersuchen, den die Beobachtungen zur Bestimmung der Transformationsparameter beitragen. Für ihn gilt

$$u_{t_i} = (B (B^T P B)^{-1} B^T P)_{ii} = b_i^T (B^T P B)^{-1} b_i p_i. \quad (21)$$

Falls keine Koordinaten zu bestimmen sind, sind die Fehlergleichungsmatrizen A und B identisch. Dann geht u_{t_i} in u_i (Gl. (9)) über.

Durch Addieren von Gln. (21) und (9a) erhalten wir, wenn wir Gl. (19) berücksichtigen

$$u_i = u_{t_i} + u_{k_i}. \quad (22)$$

Daraus folgt die wichtige Zerlegung

$$\boxed{r_i + u_{t_i} + u_{k_i} = 1} \quad (23)$$

Die einzelnen Komponenten r_i , u_{t_i} und u_{k_i} geben uns ein vollständiges Bild darüber, wie sich die Information einer einzelnen Beobachtung auf die Verbesserungen, die Transformationsparameter und die Koordinaten verteilt (vgl. Fig. 4).

Durch Umstellung in Gl. (23) können wir den Anteil u_{k_i} auch anders deuten. Der Redundanzanteil r_i' , den wir erhalten, wenn die Koordinaten der Neupunkte festgehalten werden, ist

$$r_i' = 1 - u_{t_i} \quad (24)$$

Er ist immer größer, höchstens gleich dem Redundanzanteil r_i . Denn die Kontrollierbarkeit der Beobachtungen wird durch Festhalten der Neupunkte erhöht. Der Verlust an lokaler Überbestimmung ist aber

$$r_i' - r_i = u_{k_i} \quad (25)$$

gerade der Anteil u_{k_i} , der für die Festlegung der Neupunkte benötigt wird.

Wir erhalten damit schließlich als Maß für die äußere Zuverlässigkeit

$$\bar{\delta}_{0,i} = \delta_0 \sqrt{\frac{u_{k_i}}{r_i}} = \delta_0 \sqrt{\frac{1-u_{t_i}-r_i}{r_i}} = \delta_0 \sqrt{\frac{r_i'-r_i}{r_i}} \quad (26)$$

$\bar{\delta}_{0,i}$ wird kleiner, d. h. die äußere Zuverlässigkeit wächst

- mit wachsendem Redundanzanteil (in Zähler und Nenner), d. h. mit wachsender Überbestimmung,
- mit wachsendem u_{t_i} , d. h. wachsender Absorption der Fehler durch die Transformationsparameter.

3.3 Das Beispiel greift den im Vortrag von Herrn SCHROTH dargestellten Modellblock auf (Fig. 5). Der freie Lageblock besteht aus 3 Streifen à 6 Modellen mit 6 Punkten pro Modell an den Standardstellen. Die Figur zeigt die Redundanzanteile r_i , die Kontrollierbarkeitswerte $\delta_{0,i}'$ und zusätzlich die Zuverlässigkeitsmaße $\bar{\delta}_{0,i}$ der Modellkoordinaten. Die Redundanzanteile wurden durch Simulation bestimmt und daraus die Kontrollierbarkeitswerte abgeleitet. Für die Berechnung der Zuverlässigkeitsmaße $\bar{\delta}_{0,i}$ benutzten wir die im Abschn. 2.4 theoretisch ermittelten Anteile u_{t_i} der Beobachtungen an der Bestimmung der Transformationsparameter. Wir erhalten etwa für den oberen Punkt im linken oberen Modell mit $r_i = 0.12$ und $u_{t_i} = 0.394$ nach Gl. (26)

$$\bar{\delta}_{0,i} = \delta_0 \sqrt{\frac{1-0.394-0.12}{0.12}} = 8.05.$$

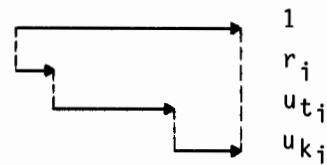


Fig. 4
 Anteil der Beobachtung $\frac{1}{i}$
 an der Bestimmung von $\hat{\underline{\epsilon}} = -\underline{v}$,
 $\hat{\underline{t}}$ und $\hat{\underline{k}}$

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| .12 | .12 | .13 | .13 | .13 |
| 12. | 12. | 11. | 11. | 11. |
| 8.1 | 8.1 | 7.7 | 7.7 | 7.7 |
| .34 | .34 | .34 | .34 | .34 |
| 6.9 | 6.9 | 6.9 | 6.9 | 6.9 |
| 4.6 | 4.6 | 4.6 | 4.6 | 4.6 |
| .13 | .24 | .26 | .27 | .28 |
| 11. | 8.2 | 7.8 | 7.7 | 7.6 |
| 7.7 | 4.9 | 4.6 | 4.5 | 4.3 |
| .13 | .26 | .29 | .30 | .31 |
| 11. | 7.8 | 7.4 | 7.3 | 7.2 |
| 7.7 | 4.6 | 4.2 | 4.0 | 3.9 |
| .34 | .34 | .35 | .35 | .35 |
| 6.9 | 6.9 | 6.8 | 6.8 | 6.8 |
| 4.6 | 4.6 | 4.5 | 4.5 | 4.5 |
| .13 | .26 | .29 | .30 | .31 |
| 11. | 7.8 | 7.4 | 7.3 | 7.2 |
| 7.7 | 4.6 | 4.2 | 4.0 | 3.9 |
| .13 | .24 | .26 | .27 | .28 |
| 11. | 8.2 | 7.8 | 7.7 | 7.6 |
| 7.7 | 4.9 | 4.6 | 4.5 | 4.3 |
| .34 | .34 | .34 | .34 | .34 |
| 6.9 | 6.9 | 6.9 | 6.9 | 6.9 |
| 4.6 | 4.6 | 4.6 | 4.6 | 4.6 |
| .12 | .12 | .13 | .13 | .13 |
| 12. | 12. | 11. | 11. | 11. |
| 8.1 | 8.1 | 7.7 | 7.7 | 7.7 |

Fig. 5 Zuverlässigkeit eines freien Blocks mit unabhängigen Modellen, 6 Punkte pro Bild, $r_i, \delta'_{0,i}, \bar{\delta}_{0,i}$

Für eine Strecke in einem geodätischen Netz mit demselben Redundanzanteil $r_i = 0.12$ und folglich derselben Kontrollierbarkeit ist $\bar{\delta}_{0,i} = 10.8$. Der Unterschied in der Auswirkung nicht erkennbarer grober Fehler ist der Absorption durch die Transformationsparameter zuzuschreiben.

Wie wir oben gesehen haben, beeinflussen Fehler in den Eckpunkten der Modelle die Transformationsparameter stärker als Fehler in der Mitte der Modelle. Daher wirken sich grobe Fehler in den Eckpunkten weniger stark (etwa $\bar{\delta}_{0,i} = 3.9$ für das mittlere Modell) auf das Ergebnis aus als grobe Fehler in der Streifenachse ($\bar{\delta}_{0,i} = 4.6$), obwohl die Kontrollierbarkeit in der Mitte ($\delta'_{0,i} = 6.8$) besser ist, d. h. kleinere grobe Fehler aufdeckbar sind als in der Ecke der Modelle ($\delta'_{0,i} = 7.2$ für das mittlere Modell). Auch in diesem Fall wäre die Auswirkung eines nicht erkennbaren Streckenfehlers auf die Koordinaten bei gleicher Kontrollierbarkeit ($r_i = 0.31, \delta'_{0,i} = 7.2$) deutlich größer: $\bar{\delta}_{0,i} = 6.0$ statt 3.9 im photogrammetrischen Modell.

Das Ergebnis läßt sich verallgemeinern (vgl. den folgenden Vortrag über die äußere Zuverlässigkeit photogrammetrischer Blöcke) und begründet die Überlegenheit von Richtungs- oder gar Winkelnetzen gegenüber Streckennetzen (vgl. FÜRSTNER, 1979 b).

4. Diskussion

4.1 Die Theorie der äußeren Zuverlässigkeit gibt uns zwei Hilfsmittel an die Hand, die Geometrie eines Netzes oder eines Blocks zu beurteilen:

- Eine obere Grenze für die Auswirkung nicht erkennbarer grober oder auch systematischer Fehler auf die Koordinaten, allg. einen Teil der Unbekannten einer Ausgleichung.
- Eine Aufteilung der Anzahl n der Beobachtungen, d. h. der Information, die in eine Ausgleichung fließt, in beobachtungsbezogene Anteile an der in der Ausgleichung zu bestimmenden Größen (Koordinaten, Transformationsparameter, Verbesserungen).

4.2 Die obere Grenze, die durch Gl. (12) beschrieben ist, setzt voraus, daß die Genauigkeit der beurteilten Funktion bekannt ist. Eine Überprüfung der Genauigkeit des Ergebnisses, d. h. der Koordinaten ist daher notwendige Bedingung für die Beurteilung der äußeren Zuverlässigkeit.

Die Theorie von BAARDA schließt eine Überprüfung der Präzision der Koordinaten mit ein (BAARDA, 1973; vgl. Fig. 6).

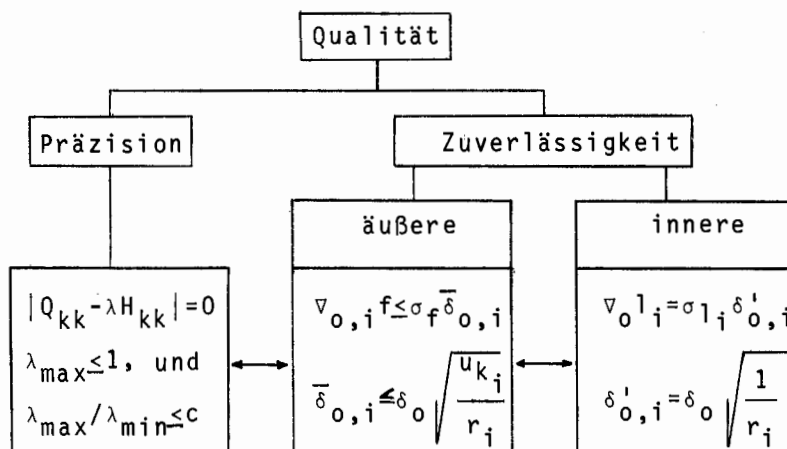


Fig. 6 Beurteilung der Qualität nach BAARDA

Die Gewichtskoeffizientenmatrix Q_{kk} der Koordinaten wird dazu mit einer im selben Koordinatensystem definierten Sollmatrix H_{kk} verglichen. Das durch die Matrix Q_{kk} beschriebene Ellipsoid soll vollständig innerhalb des durch H_{kk} beschriebenen Ellipsoids liegen. So wird geprüft, ob eine geforderte Genauigkeit eingehalten wird. Damit wird garantiert, daß die Standardabweichung σ_f der beurteilten Funktion (Koordinaten, Strecken, Richtungen usw.) nicht zu groß wird und so ein kleiner Wert $\bar{\delta}_{0,i}$ auch wirklich ein zuverlässiges Ergebnis kennzeichnet.

4.3 Es sollte aber auch überprüft werden, ob nicht eine obere Grenze der Präzision überschritten wird, d. h. an einzelnen Stellen zu genau und damit unwirtschaftlich gemessen wird. Das bedeutet, daß das durch Q_{kk} repräsentierte Ellipsoid möglichst Kugelgestalt haben sollte. Andernfalls kann die Zuverlässigkeit, absolut gesehen, gut sein ($\nabla_{0,i}$ klein), obwohl $\bar{\sigma}_{0,i}$ große Werte annimmt und so nicht mehr aussagekräftig ist.

Wegen des hohen numerischen Aufwandes, der mit dieser Art der Überprüfung der Genauigkeit anfällt, sollten andere evt. auch Näherungsmethoden entwickelt werden, die Präzision zu beurteilen.

4.4 Die bei der Beurteilung der Kontrollierbarkeit der Beobachtungen getroffenen Annahmen sind auch hier gültig. Falsche Angaben über die Genauigkeit der Beobachtungen führen u. U. zu irreführenden Schlußfolgerungen. Die Annahme nur eines einzelnen groben Fehlers läßt sich auf die Annahme erweitern, daß mehrere Fehlerursachen jeweils mehrere Beobachtungen verfälschen (FÜRSTNER, 1980). Die Fig. 7 zeigt die Grenzwertellipsen eines Bündelblocks mit drei Bildern und die dazugehörigen "Zuverlässigkeitsellipsen". Punktfehler haben nicht unbedingt in der Richtung den größten Einfluß auf das Ergebnis, in der sie am schlechtesten kontrollierbar sind. Ein Vergleich mit den Fehlerellipsen der Punkte erscheint für eine praxisorientierte Interpretation unbedingt notwendig.

4.5 Damit ist die Beurteilung der Koordinaten selbst angesprochen. Die Zuverlässigkeitswerte sind beobachtungsbezogen. Ein unmittelbarer Rückschluß auf die Verfälschung der von einer Beobachtung betroffenen Punkte ist allgemein nicht möglich, vor allem in schwach überbestimmten Netzen. In Netzen mit akzeptierbarer Zuverlässigkeit ($\bar{\sigma}_{0,i} \leq 10$) und in photogrammetrischen Blöcken kann man allerdings davon ausgehen, daß nur die unmittelbare Nachbarschaft einer grob falschen Beobachtung beeinflußt wird. Dies könnte die Grundlage für ein punktbezogenes Zuverlässigkeitsmaß sein (vgl. etwa FÜRSTNER, 1979).

Literatur

- BAARDA, W.: Statistical Concepts in Geodesy, Netherlands Geodetic Commission, New Series, Vol. 2, No. 4, Delft 1967
- BAARDA, W.: A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks, Neth. Geod. Comm., Vol. 2, No. 5, 1968
- BAARDA, W.: S-Transformations and Criterion Matrices, Neth. Geod. Comm., Vol. 5, No. 1, 1973
- BAARDA, W.: Reliability and Precision of Networks, Pres. Paper to VIIth Int. Course for Eng. Surveys of High Precision, Darmstadt 1976
- FÜRSTNER, W.: Das Rechenprogramm TRINA für geodätische Lagenetze in der Landesvermessung, Nachr. a. d. öff. Vermessungsdienst, Nordrhein-Westfalen, Heft 2, 1979
- FÜRSTNER, W.: On Internal and External Reliability of Photogrammetric Coordinates, Pres. Paper to ASP-ASCM-Convention, Washington 1979(b)
- FÜRSTNER, W.: Evaluation of Block Adjustment Results, Paper pres. to XIV Congr. of the Intern. Soc. for Photogrammetry, Hamburg 1980
- v. MIERLO, J.: A Testing Procedure for Analysing Geodetic Deformation Measurements, Pres. Paper to IInd Int. Symposium for Deformationmeasurements, FIG, Bonn 1978

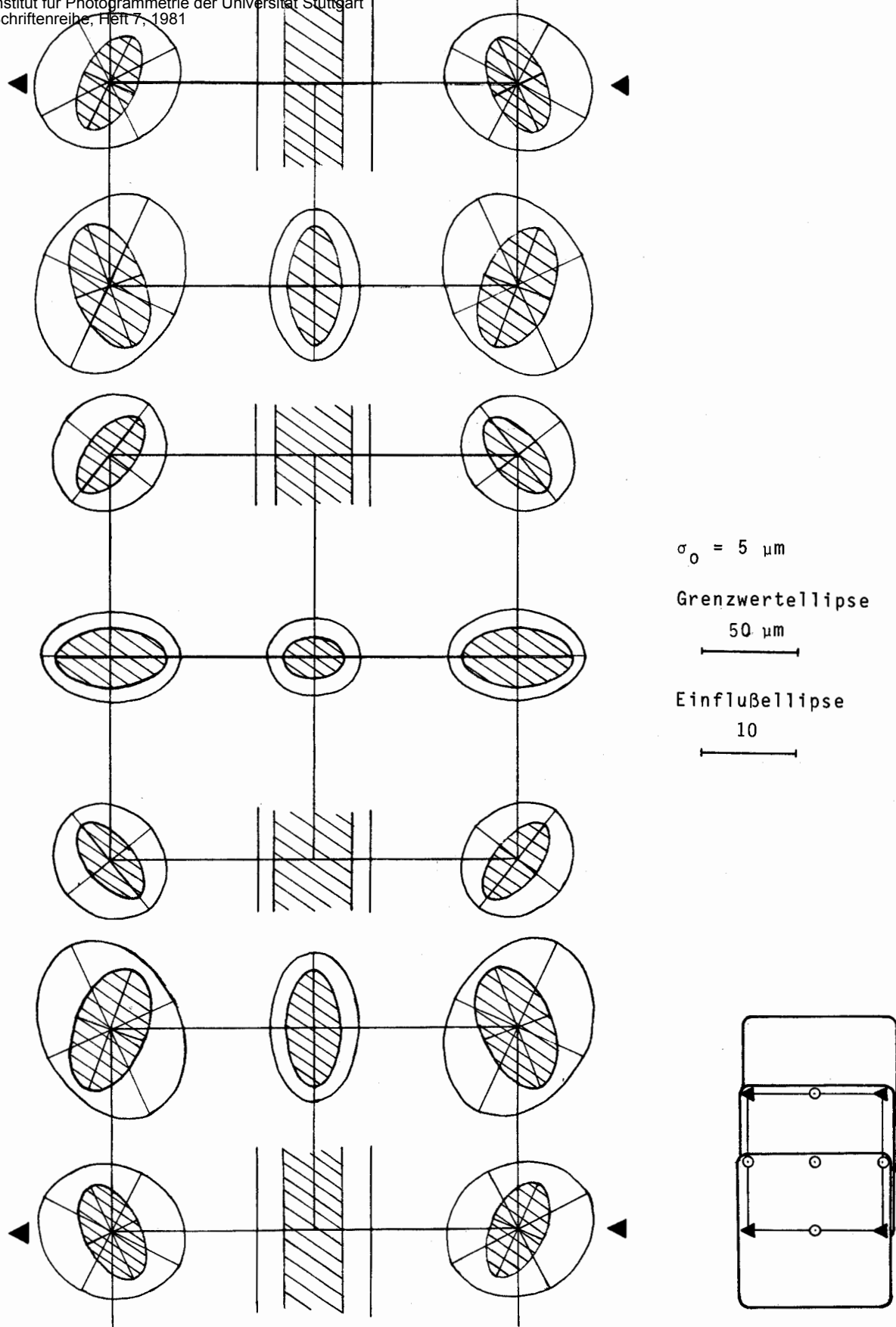


Fig. 7 Innere und äußere Zuverlässigkeit eines Bündelblocks, Grenzwert- bzw. Kontrollierbarkeitsellipsen und Einfluß- bzw. Zuverlässigkeitellipsen