

J. van Mierlo

FEHLERSUCHE UND ZUVERLÄSSIGKEIT IN GEODÄTISCHEN NETZEN

Bei der Punktbestimmung in Verdichtungsnetzen werden in der Regel die Koordinaten der Anschlußpunkte als endgültig und fehlerfrei (nicht stochastisch) angesehen. Die Koordinaten einmal bestimmter Punkte werden durch eine Netzverdichtung nicht geändert. Diese Methode des Aufbaues geodätischer Netze ist noch immer von großer praktischer Bedeutung. Durch die neueren Messungen wird lediglich überprüft, ob Lageveränderungen einzelner Anschlußpunkte vermutet werden müssen, welche deshalb nicht länger als unverändert beibehalten werden können.

Für die Prüfung der Festpunktkoordinaten benötigen wir deren Kovarianzmatrix. Diese Matrix ist im allgemeinen nicht bekannt. Jedoch besteht nun die Möglichkeit, die Kovarianzmatrix durch ein geeignetes Modell zu ersetzen, womit Aussagen über Fehler in den Festpunktkoordinaten recht gut möglich sind. Mit Hilfe statistischer Tests können wir die Messungen kontrollieren. Die Tests sind u.a. abhängig von der (a priori) Kovarianzmatrix. Die Beobachtungen (Richtungen, Strecken) und die Festpunktkoordinaten sollen aufgrund der Kenntnis ihrer Kovarianzmatrizen - wenn möglich - getrennt geprüft werden. Die Kovarianzmatrix der Beobachtungen ist im Gegensatz zur Kovarianzmatrix der Festpunktkoordinaten einfacher und i. a. zuverlässiger zu ermitteln. Auf diese Weise wird erreicht, daß wir mit kontrollierten Beobachtungen die Festpunktkoordinaten prüfen können. Nach dieser Prüfung werden die Koordinaten der Neupunkte berechnet, wobei sich die Festpunktkoordinaten nicht ändern.

Nicht nur Angaben zur Zuverlässigkeit der Beobachtungen, der Fest- und Neupunktkoordinaten sind erforderlich, sondern auch Angaben zur Genauigkeit der Neu- und Festpunkte. Die Kovarianzmatrizen der Koordinaten der Neu- und Festpunkte werden zur Bestimmung der äußeren Zuverlässigkeit benötigt. Sollte bei der Berechnung der Kovarianzmatrix der Neupunkte die Kovarianzmatrix der Festpunkte nicht berücksichtigt werden, wäre die berechnete Kovarianzmatrix zu optimistisch und nahezu ohne Bedeutung.

Wenn möglich, muß man die Prüfung der Festpunktkoordinaten und die Prüfung der Beobachtungen nach einer gemeinsamen Ausgleichung vermeiden. Das bedeutet für den Netzaufbau, daß die Koordinaten aller Punkte in einem lokalen Koordinatensystem zu berechnen sein müssen (freies Netz). Die Beobachtungen werden dann in einer ersten Stufe der Ausgleichung überprüft (freie Netzausgleichung). In der zweiten Stufe der Ausgleichung werden die Festpunktkoordinaten kontrolliert (Anschluß an die Festpunkte). Ist ein derartiger Netzaufbau z. B. aus finanziellen Gründen nicht durchzuführen, dann sind die Fehler in den Beobachtungen und den Festpunktkoordinaten nicht immer oder schwierig zu trennen.

Der Ausgleichungsansatz

Die Ausgleichung kann nach bedingten oder vermittelnden Beobachtungen erfolgen. In der heutigen Praxis werden beide Verfahren angewandt, obwohl die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen den Vorzug genießt. Für die Lokalisierung der Fehler ist eine bedingte Ausgleichung sehr geeignet, weil die Widersprüche die Fehlersuche erleichtern: Die Testgrößen sind alle von den Widersprüchen abhängig.

Im folgenden beschränken wir uns auf zweidimensionale geodätische Netze. Die Übertragung der Gedanken auf ein- oder dreidimensionale Netze ist nicht schwierig. Ein Verdichtungsnetz besteht aus Fest- und Neupunkten. Die notwendigen Messungen zur Berechnung der Neupunktkoordinaten bilden einen Beobachtungsvektor l , dessen Kovarianzmatrix K_{ll} wir als bekannt voraussetzen.

$$K_{ll} = \sigma_0^2 Q_{ll} : \text{stochastisches Modell}$$

$$\sigma_0^2 : \text{Varianzfaktor}$$

Die Kovarianzmatrix der Festpunktkoordinaten l_F bezeichnen wir mit K_{FF} , sie wird ebenfalls als bekannt vorausgesetzt. Die Festpunktkoordinaten l_F und die Beobachtungen l korrelieren i.a. nicht.

Die Gesamtkovarianzmatrix K lautet dann

$$K = \begin{pmatrix} K_{FF} & 0 \\ 0 & K_{ll} \end{pmatrix} \quad \text{stochastisches Modell} \quad (1)$$

Den Unbekanntenvektor \tilde{x} , der die Koordinaten sämtlicher Netzpunkte enthält, können wir in zwei Subvektoren aufteilen (die Orientierungsunbekannten usw. sind eliminiert worden).

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_F \\ \tilde{x}_N \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{Festpunktkoordinaten} \\ \rightarrow \text{Neupunktkoordinaten} \end{array} \quad (2)$$

Bezeichnen wir die Näherungswerte mit l_F^0 , l_0 und x_F^0 , x_N^0 , so erhalten wir das linearisierte funktionale Modell mit

$$\begin{aligned} \tilde{l} &= l_0 + \Delta \tilde{l} ; & \tilde{x}_N &= x_N^0 + \Delta \tilde{x}_N \\ \tilde{l}_F &= l_F^0 + \Delta \tilde{l}_F ; & \tilde{x}_F &= x_F^0 + \Delta \tilde{x}_F \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{l}_F &= \Delta \tilde{x}_F \\ \Delta \tilde{l} &= (A_F \ A_N) \begin{pmatrix} \Delta \tilde{x}_F \\ \Delta \tilde{x}_N \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Setzen wir in (4) $\tilde{x}_F = 0$, d. h. die Festpunktkoordinaten werden nicht stochastisch angenommen, so erhalten wir das einfache funktionale Modell

$$\tilde{l} = A_N \Delta \tilde{x}_N . \quad (5)$$

Dieses Modell wird i. a. zur Berechnung der Neupunktkoordinaten angewandt. Die Neupunktkoordinaten ergeben sich dann aus der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen

$$\Delta \hat{x}_N = (A_N^T P_{11} A_N)^{-1} A_N^T P_{11} \Delta l \quad (6)$$

$$\text{mit } P_{11} = Q_{11}^{-1} \text{ (Gewichtsmatrix)} \quad (6a)$$

Die berechnete Kovarianzmatrix der Neupunktkoordinaten

$$\sigma_o^2 (A_N^T P_{11} A_N)^{-1} \quad (7)$$

ist von geringer Bedeutung: Die Fehlerellipsen der Neupunkte sind alle zu klein !

Setzen wir

$$B = (A_N^T P_{11} A_N)^{-1} A_N^T P_{11} , \quad (8)$$

so ergibt sich

$$\Delta \hat{x}_N = B \Delta l . \quad (9)$$

Für die Berechnung der Kovarianzmatrix der Neupunktkoordinaten müssen wir die Kovarianzmatrix der Festpunkte berücksichtigen. Zur Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes schreiben wir dazu, siehe (4), (5),

$$\Delta \hat{x}_N = B (\Delta l - A_F \Delta l_F) . \quad (10)$$

Aus (10) und (1) folgt

$$\sigma_o^2 Q_{NN} = \sigma_o^2 B (Q_{11} + A_F Q_{FF} A_F^T) B^T$$

Setzen wir

$$B Q_{11} B^T = (Q_{NN})_{Q_{FF}} = 0 , \quad (11)$$

so erhalten wir

$$\sigma_0^2 Q_{NN} = \sigma_0^2 (Q_{NN})_{Q_{FF}} = 0 + \sigma_0^2 \Delta Q \quad (12)$$

mit

$$\Delta Q = B A_F Q_{FF} A_F^T B^T \quad (13)$$

ΔQ ist der Einfluß der Festpunktkoordinaten..

Die Neupunktkoordinaten korrelieren nun mit den Festpunktkoordinaten.

Aus (10) folgt mit (1)

$$\sigma_0^2 Q_{x_N, x_F} = - \sigma_0^2 B A_F Q_{FF} \quad (14)$$

Die Kovarianzmatrix der Neu- und Festpunktkoordinaten erhalten wir aus (1), (12), (13), und (14)

$$\sigma_0^2 \begin{pmatrix} Q_{FF} & - Q_{FF} A_F^T B^T \\ - B A_F Q_{FF} & (Q_{NN})_{Q_{FF}} = 0 + \Delta Q \end{pmatrix} \quad (15)$$

Setzen wir in (15) $Q_{FF} = 0$, so erhalten wir die noch viel in der Praxis gebrauchte Kovarianzmatrix, welche zu einem zu optimistischen Resultat führt (vgl. Baarda 1956, 1967).

Die allgemeine gewichtete Fehlerquadratsumme, Ω (weiter der Kürze halber Fehlerquadratsumme genannt), welche aus der Ausgleichung von (5) ermittelt wird

$$\Omega = v^T P_{11} v \quad (16)$$

mit

$$v = A_N \Delta x_N - \Delta l \quad \text{und}$$

$$P_{11} = Q_{11}^{-1} \quad ,$$

können wir zur Prüfung des Varianzfaktors σ_0^2 nicht anwenden. Verwenden wir die Testgröße

$$\frac{\Omega}{n-u} / \sigma_0^2 = F_{n-u, \infty} \quad \begin{matrix} u: & \text{Anzahl der Unbekannten} \\ n: & \text{Anzahl der Beobachtungen} \end{matrix} \quad (17)$$

dann wird beim Testen die Nullhypothese H_0 , d. h. das funktionale Modell und das stochastische Modell, wegen Vernachlässigung von Q_{FF} zu oft abgelehnt (vgl. Baarda 1967 § 3.3. Effects of the assumption of a covariance matrix).

Das funktionale Modell (5) dürfen wir nur zur Berechnung der Neupunktkoordinaten anwenden, zum Testen muß dagegen das funktionale Modell (4) verwendet werden.

Die Gleichung (10) dient auch zur Berechnung der äußeren Zuverlässigkeit. Die Auswirkung eines Fehlers ∇l_i in der Beobachtung l_i auf die Neupunktkoordinaten ist

$$\nabla x_{N,i} = B \nabla l_i. \quad (18a)$$

Die Auswirkung eines Fehlers $\nabla l_{F,j}$ ist

$$\nabla x_{N,j} = - B A_F \nabla l_{F,j}. \quad (18b)$$

Ein Zuverlässigkeitskriterium erhalten wir aus "der gewichteten Norm des Koordinatenverfälschungsvektors". Dazu müssen wir die Kovarianzmatrix (15) anwenden.

Beispiel Vorwärtsschnitt

Ein Beispiel wird den Sachverhalt verdeutlichen. Es sei ein ebener Vorwärtsschnitt mit einer überschüssigen Beobachtung angegeben. Korrelationen werden nicht angenommen. Die Standardabweichung der Winkel sei

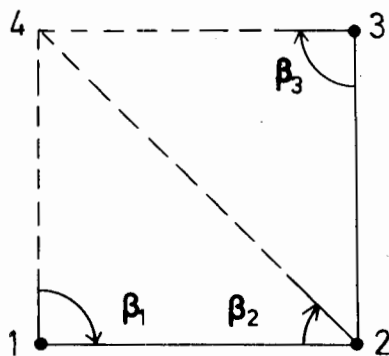


Abb. 1

$$\sigma_{\beta_1} = \sigma_{\beta_2} = \sigma_{\beta_3} = \sigma_{\beta}$$

Für die Kovarianzmatrix der Festpunktkoordinaten der Punkte 1, 2, 3 nehmen wir einfachheitshalber eine Diagonalmatrix mit gleichen Diagonalelementen d^2 . Die Festpunkte und der Neupunkt bilden etwa ein Quadrat mit den Seiten s . Da nur eine Bedingungsgleichung vorliegt, sind die Testgrößen $\frac{v}{\sigma_v}$ alle identisch, obwohl die Redundanzanteile verschieden sind.

Die Bedingungsgleichung lautet:

$$1n \frac{\tilde{s}_{2,4}}{s_{2,1}} + 1n \frac{\tilde{s}_{2,3}}{s_{2,4}} - 1n \frac{\tilde{s}_{2,3}}{s_{2,1}} = 0. \quad (19)$$

Die ersten beiden Verhältnisse werden mit dem Sinussatz berechnet, das letzte Verhältnis folgt aus den Koordinaten der Festpunkte. Die linearisierte Bedingungsgleichung erhält bei Vernachlässigung von d^2 folgende einfache Gestalt:

$$\Delta\tilde{\beta}_1 + 2 \Delta\tilde{\beta}_2 - \Delta\tilde{\beta}_3 = 0 . \quad (20)$$

Die Varianz des Widerspruches y ist also

$$\sigma_y^2 = 6 \sigma_\beta^2 \quad (21)$$

und die Testgröße ist schließlich

$$w = \frac{y}{\sigma_y} = \frac{y}{\sigma_\beta \sqrt{6}} = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad (22)$$

Als Nullhypothese H_0 wird angenommen, daß die Erwartungswerte $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_2$, und $\tilde{\beta}_3$ die Bedingungsgleichung erfüllen. Die Nullhypothese wird abgelehnt für den Fall

$$\frac{yy}{\sigma_y^2} > F_{1-\alpha_0; 1, \infty} = \chi^2_{1-\alpha_0; 1} \quad \text{oder} \quad (22a)$$

$$\left| \frac{y}{\sigma_y} \right| > k = \sqrt{F_{1-\alpha_0; 1, \infty}} .$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art ist die Signifikanzzahl α_0 .

Angenommen, die Beobachtung β_i ($i = 1, 2, 3$) sei um einen Betrag $\nabla\beta_i$ falsch, dann gilt

$$\begin{aligned} i = 1 & \quad \nabla y = \nabla\beta_1 \\ i = 2 & \quad \nabla y = 2\nabla\beta_2 \\ i = 3 & \quad \nabla y = \nabla\beta_3 \end{aligned} \quad (23)$$

Das Signifikanzniveau $1-\alpha_0$ und die Mindestsicherheit β_0 (Macht) des Tests legen den Nichtzentralitätsparameter λ_0 fest. Zum Beispiel

für $\alpha_0 = 1\%$ und $\beta_0 = 80\%$ ist $\lambda_0 = 17$.

Es sei

$$\lambda_0 = \lambda(\alpha_0, \beta_0) \quad (24)$$

und

$$\lambda_0 = \frac{\nabla_0 y \nabla_0 y}{\sigma_y^2} \quad (\text{vgl. Baarda 1956, 1967})$$

woraus folgt

$$\nabla_0 y = \sigma_y \sqrt{\lambda_0} \quad (25)$$

Die Grenzwerte für einen Fehler $\nabla_0 \beta_i$ ($i = 1, 2, 3$) lassen sich aus (23) und (25) ermitteln. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \nabla_0 \beta_1 &= \sigma_y \sqrt{\lambda_0} \\ \nabla_0 \beta_2 &= \frac{1}{2} \sigma_y \sqrt{\lambda_0} \\ \nabla_0 \beta_3 &= \sigma_y \sqrt{\lambda_0} \end{aligned}$$

oder mit $\sigma_y^2 = 6 \sigma_\beta^2$ und $\sqrt{\lambda_0} = \delta_0$ (26)

$$\left. \begin{aligned} \nabla_0 \beta_1 = \nabla_0 \beta_3 &= \sigma_\beta \cdot \frac{\delta_0}{\sqrt{\frac{1}{6}}} \quad (\text{Redundanzanteil } \frac{1}{6}) \\ \nabla_0 \beta_2 &= \sigma_\beta \cdot \frac{\delta_0}{\sqrt{\frac{4}{6}}} \quad (\text{Redundanzanteil } \frac{4}{6}) \end{aligned} \right\}$$

Die Grenzwerte sind verschieden, aber die Testgröße $\frac{v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{y}{\sigma_y}$ kann einen Fehler nicht lokalisieren.

Falls wir $\lambda_0 = 17$ und $\sigma_\beta = 10^{-5}$ Rad. wählen, ist

$$\begin{aligned} \nabla_0 \beta_1 = \nabla_0 \beta_3 &= 6,4 \text{ mgon} \\ \nabla_0 \beta_2 &= 3,2 \text{ mgon} \end{aligned} \quad (27)$$

Diese Grenzwerte sind zu klein, weil wir die Kovarianzmatrix der Festpunktkoordinaten vernachlässigt haben. Die linearisierte Bedingungsgleichung wird mit $d^2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} &\tilde{\Delta}\beta_1 + 2 \tilde{\Delta}\beta_2 - \tilde{\Delta}\beta_3 + \\ &+ \frac{x_{2,1} - y_{2,1}}{(s_{2,1})^2} \tilde{\Delta}x_1 + \frac{x_{2,1} + y_{2,1}}{(s_{2,1})^2} \tilde{\Delta}y_1 + \\ &- \frac{x_{2,3} - y_{2,3}}{(s_{2,3})^2} \tilde{\Delta}x_3 - \frac{x_{2,3} + y_{2,3}}{(s_{2,3})^2} \tilde{\Delta}y_3 + \quad (28) \\ &+ \left[\frac{-x_{2,1} + y_{2,1}}{(s_{2,1})^2} + \frac{x_{2,3} - y_{2,3}}{(s_{2,3})^2} \right] \tilde{\Delta}x_2 + \\ &+ \left[\frac{-x_{2,1} - y_{2,1}}{(s_{2,1})^2} + \frac{x_{2,3} + y_{2,3}}{(s_{2,3})^2} \right] \tilde{\Delta}y_2 = 0 \end{aligned}$$

Die Varianz des Widerspruches wird jetzt

$$\sigma_y^2 = 6 \sigma_\beta^2 + \frac{8d^2}{s^2} \quad (29)$$

wobei $s = s_{1,2} = s_{2,3}$.

Für den Fall $d^2 = 0$ erhalten wir (21).

Setzen wir z. B. $d = 1$ cm, $s = 1$ km, $\lambda_0 = 17$, $\sigma_\beta = 10^{-5}$ Rad., so erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla_0 \beta_1 = \nabla_0 \beta_3 &= 9,8 \text{ mgon} \\ \nabla_0 \beta_2 &= 4,9 \text{ mgon} \end{aligned} \quad (30)$$

Wir bemerken, daß die Grenzwerte aus (30) größer als die Grenzwerte aus (27) sind. Bei Berücksichtigung der Kovarianzmatrix der Festpunkte wird die Testgröße $\frac{y}{\sigma}$ kleiner, d. h. das Risiko, daß die Nullhypothese verworfen wird, wenn keine Fehler vorliegen, ist geringer.

Die Grenzwerte für einen Fehler in einer der Koordinaten, z. B. $\nabla_0 x_1$, können wir berechnen aus

$$\nabla_0 y = \sigma_y \sqrt{\lambda_0} = \frac{x_{2,1} - y_{2,1}}{(s_{2,1})^2} \nabla_0 x_1$$

oder

$$\nabla_0 x_1 = s_{2,1} \sigma_y \sqrt{\frac{\lambda_0}{1 - \sin^2 \phi_{2,1}}}, \quad \phi_{2,1} \neq \frac{\pi}{4} \quad (31)$$

In ähnlicher Weise können wir die Grenzwerte der übrigen Festpunktkoordinaten berechnen.

Nehmen wir weiter an $\phi_{2,1} = \pi/2$, so erhalten wir für die Kovarianzmatrix des Neupunktes ohne Berücksichtigung der Festpunkte:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x_4}^2 & \sigma_{x_4 y_4} \\ \sigma_{y_4 x_4} & \sigma_{y_4}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.83 & -0.17 \\ -0.17 & 0.83 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Diese Kovarianzmatrix ergibt sich aus der Ausgleichung nach dem funktionalen Modell (5)

$$\begin{pmatrix} \Delta \tilde{\beta}_1 \\ \Delta \tilde{\beta}_2 \\ \Delta \tilde{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \tilde{x}_4 \\ \Delta \tilde{y}_4 \end{pmatrix} \quad (33)$$

wobei $\Delta \tilde{\beta}$: rad
 $\Delta \tilde{x}_4, \Delta \tilde{y}_4$: km = 10^5 cm

Dieses Modell (33) dürfen wir nur zur Berechnung der Koordinaten des Neupunktes anwenden, nicht zur Berechnung der Testgrößen $w_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{y}{\sigma_y}$ und der Grenzwerte $\nabla_{\circ} \beta : (27)$.

Das funktionale Modell aus (4) ist für diese Berechnungen erforderlich. Wir erhalten

$$(\Delta l_F)^T = (\Delta \tilde{x}_1, \Delta \tilde{y}_1, \Delta \tilde{x}_2, \Delta \tilde{y}_2, \Delta \tilde{x}_3, \Delta \tilde{y}_3)^T$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \tilde{\beta}_1 \\ \Delta \tilde{\beta}_2 \\ \Delta \tilde{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & | & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \tilde{x}_1 \\ \Delta \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \Delta \tilde{x}_3 \\ \Delta \tilde{y}_3 \\ \hline \Delta \tilde{x}_4 \\ \Delta \tilde{y}_4 \end{pmatrix} \quad (34)$$

$A_F \qquad \qquad \qquad A_N$

Den Zuschlag ΔQ aus (13) können wir zunächst mit dem stochastischen Modell

$$10^{-10} \cdot \begin{pmatrix} d^2 & & & & & \\ & d^2 & 0 & 0 & & \\ & & \ddots & & & \\ & 0 & & d^2 & & \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

berechnen.

$$\text{Es sei } \sigma_{\circ}^2 \Delta Q = \frac{1}{9} d^2 \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ -4 & 29 \end{pmatrix}$$

Setzen wir $d = 3$ cm, so erhalten wir für die Kovarianzmatrix des Neupunktes mit Berücksichtigung der Festpunktkoordinaten

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x_4}^2 & \sigma_{x_4 y_4} \\ \sigma_{y_4 x_4} & \sigma_{y_4}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.83 & -4.17 \\ -4.17 & 29.83 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Die Fehlerellipsen aus (32) und aus (36) sind in Abb. 2 dargestellt. Die Matrix aus (36) müssen wir zur Berechnung des Zuverlässigkeitskriteriums $\bar{\delta}_{\circ,i}$ (vgl. Baarda 1976, 1977) anwenden. Aus diesem Beispiel wird deutlich, wie stark die Genauigkeits- und Zuverlässigkeitsangaben vom Modell und vom Rechenverfahren abhängen.

Der Statistische Test

Als Nullhypothese wird angenommen, daß die Beobachtungen fehlerfrei seien, ihre Erwartungswerte die Bedingungsgleichungen erfüllen und weiterhin die Beobachtungen

mit angenommener Kovarianzmatrix normalverteilt seien. Die Alternativhypothese H_a lautet: Die Beobachtung l_j ist um einen Betrag ∇l_j falsch oder

$$E(\tilde{l}|H_a) = E(\tilde{l}|H_0) + e_j \nabla \quad (37)$$

mit $e_j^T = (0 \ 0 \dots \ 1 \ 0 \ 0)$.

Wir testen die Hypothese, daß kein Fehler vorliegt. Mit der Testgröße

$$w_j = \frac{v_j}{\sigma_{v_j}}$$

kann diese Annahme für den Fall, daß die Beobachtungen nicht korrelieren, überprüft werden. Führt der Test zur Ablehnung von H_0 , so entscheiden wir uns für die Alternativhypothese.

Die Bedingungsgleichungen seien

$$U(\tilde{l} - a_0) = 0 \quad (38)$$

Die Widersprüche seien

$$y = U(\tilde{l} - a_0)$$

Unter der Nullhypothese H_0 gilt für die Erwartungswerte

$$E(y) = \tilde{y} = 0$$

und unter der Alternativhypothese H_a

$$E(y|H_a) = \Delta y = U e_j \nabla \quad (\nabla \text{ ist ein Skalar}). \quad ((39)$$

Baarda transformiert die Widersprüche in solcher Weise, daß der Fehler ∇l_j nur in einem der transformierten Widersprüche zum Ausdruck kommt. Wir nehmen an, daß es durch Umnummerierung immer möglich ist, daß l_n die Beobachtung ist, welche getestet werden soll. Schreiben wir demnach

$$l^T = (\bar{l}^T, l_n) \quad \text{mit} \quad (40)$$

$$\bar{l}^T = (l_1, l_2, l_3 \dots l_{n-1})$$

so können wir die Bedingungsgleichungen in folgende zwei Gruppen zerlegen:

$$\begin{aligned} \bar{U}(\bar{l} - \bar{a}_0) = 0 & \rightarrow \text{Widersprüche } y_1 \\ U(\tilde{l} - \bar{a}_0) + u_n \tilde{l}_n = 0 & \rightarrow \text{Widerspruch } y_2 \end{aligned} \quad (41)$$

Die 2. Gruppe besteht nur aus einer Bedingungsgleichung. Die Beobachtung l_n tritt in der 1. Gruppe nicht auf. Ein Fehler ∇l_n hat auf die Widersprüche y_1 keine Auswirkung. Unter der Alternativhypothese gilt

$$\begin{aligned} \nabla y_1 &= 0 \\ \nabla y_2 &= u_n \nabla l_n \end{aligned} \quad (42)$$

In bekannter Weise erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \frac{\Omega}{b} \mid H_0 &= F_{b,\infty} \\ \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \frac{\Omega}{b} \mid H_a &= F'_{b,\infty}; \end{aligned} \quad (43)$$

mit $\Omega = y^T P_{yy} y$ (Fehlerquadratsumme)
 b : Anzahl der Bedingungsgleichungen
 λ : Nichtzentralitätsparameter

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \nabla y^T P_{yy} \nabla y \quad (44)$$

P_{yy} : Gewichtsmatrix der Widersprüche .

Bei der gruppenweisen Ausgleichung gelangen wir zum selben Ergebnis wie bei der Ausgleichung in einem Guß. Die Ausgleichung der 1. Gruppe für sich allein liefert die Fehlerquadratsumme

$$\Omega_1 = y_1^T P_{y_1 y_1} y_1 \quad (45)$$

mit $P_{y_1 y_1}$: Gewichtsmatrix der Widersprüche y_1 .

Aus der Ausgleichung der 2. Gruppe erhalten wir

$$\Omega_2 = y_2^T p_2 y_2 \quad (46)$$

mit p_2 : Gewicht des Widerspruchs y_2 nach der Ausgleichung der 1. Gruppe.

Aus Ω_1 können wir einen Schätzwert für den Varianzfaktor σ_0^2 ermitteln.

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\Omega_1}{b-1} \quad (47)$$

Dieser Schätzwert wird durch die Alternativhypothese (42) nicht beeinflusst. Unter H_a gilt auch

$$\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\sigma_0^2} \mid H_a = F_{b-1,\infty}$$

Es ergibt sich auch ein Schätzwert aus der 2. Stufe der Ausgleichung

$$\hat{\sigma}_2^2 = \Omega_2 = p_2 \cdot y_2 \cdot y_2.$$

Unter der Nullhypothese H_0 gilt

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \Omega_2 \mid H_0 &= \chi_1^2 = F_{1,\infty} \\ \text{oder} \left(\frac{y_2}{\sigma y_2} \right)^2 \mid H_0 &= \chi_1^2 = F_{1,\infty} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Unter der Alternativhypothese H_a gilt

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \Omega_2 \mid H_a &\equiv F'_{1,\infty;\lambda} = \chi^2_{1;\lambda} \\ \text{oder} \left(\frac{y_2}{\sigma y_2} \right)^2 \mid H_a &= F'_{1,\infty;\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$$\text{mit } \lambda = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \nabla y_2 \cdot p_2 \cdot \nabla y_2 = \left(\frac{\nabla y_2}{\sigma y_2} \right)^2. \quad (51)$$

Wir haben nun die Teststatistik $\left(\frac{y_2}{\sigma y_2} \right)^2$ erhalten, die bereits Baarda angegeben hat (vgl. Baarda 1968).

Die Beobachtung l_n wird getestet mit

$$w_n = \frac{y_2}{\sigma y_2}. \quad (52)$$

$$\text{und i. a. } w_i = \frac{v_i}{\sigma v_i} \quad (i = 1 \dots n), \quad (53)$$

wobei v_i aus der Ausgleichung in einem Guß berechnet wird (vgl. Baarda 1968).

Wie wir festgestellt haben, wird Ω_1 nicht durch den Fehler ∇l_n beeinflusst. Aus diesem Grunde ist es möglich, eine andere Teststatistik zu verwenden. Wir bilden die Teststatistik (vgl. Baarda (1960), Heck (1980))

$$\frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \equiv F_{1,b-1} = t_{b-1}^2 \quad (54)$$

Die Zufallsvariable t_{b-1} hat die Studentsche t-Verteilung mit $b-1$ Freiheitsgraden. Die Berechnung von Ω_1 ist recht einfach.

Es sei

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 ,$$

wobei Ω aus der Ausgleichung in einem Guß folgt. Für unkorrelierte Beobachtungen geht die Teststatistik (54) über in

$$\bar{w}_i = \frac{v_i}{\hat{\sigma}_{v_i}} \quad \text{für } i = 1 \dots n \dots n \quad (55)$$

mit $\hat{\sigma}_{v_i}^2 = \hat{\sigma}_{1,i}^2 Q_{v_i v_i}$

worin $Q_{v_i v_i}$ der Gewichtskoeffizient der Verbesserung v_i ist.

Die Teststatistik \bar{w}_i hat also eine t-Verteilung von Student mit $b-1 = n-u-1$ Freiheitsgraden. Die Begründung für den Test mit der t-Verteilung geht eigentlich auf Baarda zurück (vgl. Baarda 1956, 1960, 1967). Mit wachsender Anzahl Bedingungsgleichungen strebt die Verteilungsfunktion der t-Verteilung gegen die Verteilungsfunktion der Normalverteilung mit dem Mittelwert 0 und der Varianz 1.

Für korrelierte Beobachtungen hat die Teststatistik \bar{w}_i auch eine t-Verteilung. Es gilt

$$\bar{w}_i = \frac{e_i^T P_{11} v}{\hat{\sigma}_{1,i} \sqrt{e_i^T P_{11} Q_{vv} P_{11} e_i}} \quad (56)$$

Die Berechnung von $\hat{\sigma}_{1,i}$ oder $\Omega_{1,i}$ ist recht einfach. Es sei

$$\Omega = \Omega_{1,i} + \Omega_{2,i} \quad , \quad i = 1 \dots n \quad (57)$$

wobei Ω aus der Ausgleichung in einem Guß ermittelt wird. Es ist nicht notwendig, daß Ω aus einer bedingten Ausgleichung berechnet wird, eine vermittelnde Ausgleichung ist ohne weiteres möglich. Die Berechnung von $\Omega_{2,i}$ ist nach (49)

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{2,i} &= \sigma_o^2 w_i w_i & i = 1 \dots w \\ \text{mit} & \\ w_i &= \frac{e_i^T P_{11} v}{\sigma_o \sqrt{N_i}} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

mit

$$N_i = e_i^T P_{11} Q_{vv} P_{11} e_i \quad (59)$$

Für unkorrelierte Beobachtungen gilt

$$\Omega_{2,i} = \sigma_0^2 \left(\frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \right)^2 \quad (i = 1 \dots n) \quad (60)$$

Mit (57) und (58) erhalten wir $\Omega_{1,i} = \Omega - \Omega_{2,i}$

woraus folgt

$$\hat{\sigma}_{1,i}^2 = \frac{\Omega_{1,i}}{b-1} \quad (61)$$

womit wir die Teststatistik \bar{w}_i aus (56) berechnen können. Die praktische Bedeutung dieses Tests ist noch nicht völlig klar. Die Unsicherheit über den Wert des Varianzfaktors wird mit diesem Test zwar eliminiert, die Unsicherheit über die Gewichtskoeffizientenmatrix ist damit aber nicht aufgehoben (vgl. Baarda (1967)). Die Macht des Tests ist bei der t-Verteilung einfach zu berechnen.

Die Teststatistik

$$\tau_i = \frac{v_i}{\hat{\sigma}_{v_i}} \quad (62)$$

mit

$$\hat{\sigma}_{v_i}^2 = \hat{\sigma}^2 Q_{v_i} v_i \quad \text{und}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\Omega}{b} = \frac{\Omega}{n-u}$$

hat die Tau-Verteilung (vgl. Pope (1975)).

Im Gegensatz zu $\hat{\sigma}_{1,i}^2$ aus (61) ist der Schätzwert $\hat{\sigma}^2$ unter $H_{a,i}$ verfälscht. Die Berechnung der Macht des Tau-Tests ist sehr kompliziert.

Die Teststatistik von Baarda (58) und die Teststatistik (56) haben aus diesem Grunde einen Vorzug. Die Testgröße, die Baarda angegeben hat, werden wir weiter anwenden.

Gruppenweise Ausgleichung eines Lagenetzes

Angenommen sei, daß wir alle Beobachtungen ohne Hilfe von Festpunktkoordinaten prüfen können. Die linearisierten Bedingungsgleichungen können wir in zwei Gruppen einteilen.

$$\begin{pmatrix} U_{1,1} & 0 \\ U_{2,1} & U_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{T}_1 \\ \tilde{T}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (63)$$

Darin bedeutet \tilde{l}_1 den Vektor der Erwartungswerte der Beobachtungen und \tilde{l}_2 den Vektor der Erwartungswerte der Festpunktkoordinaten. Wir gehen aus von korrelierten Beobachtungen. Gegeben sei die Kovarianzmatrix

$$\sigma_o^2 \cdot \begin{pmatrix} Q_{1,1} & 0 \\ 0 & Q_{2,2} \end{pmatrix} . \quad (64)$$

Die Ausgleichung der 1. Gruppe

Die Beobachtungen l_1 werden mit Hilfe der Ausgleichung der 1. Gruppe geprüft. Einen Schätzwert für den Varianzfaktor erhalten wir aus

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\Omega_1}{b_1} , \quad (65)$$

b_1 ist die Anzahl der Bedingungsgleichungen der 1. Gruppe. Die aus der 1. Gruppe hervorgehenden ausgeglichenen und akzeptierten Beobachtungen werden in die 2. Gruppe eingesetzt. Für die Prüfung der Festpunktkoordinaten sei $Q_{2,2} \neq 0$. Die Fehlerquadratsumme aus der Ausgleichung der 2. Gruppe bezeichnen wir mit Ω_2 .

Für den Fall

$$\left. \frac{\Omega_2}{b_2 \sigma_o^2} \equiv F_{b_2, \infty} > F_{1-\alpha} ; b_2, \infty \right\} \quad (66a)$$

oder

$$\left. \frac{\Omega_2}{b_2} / \frac{\Omega_1}{b_1} \equiv F_{b_2, b_1} > F_{1-\alpha} ; b_2, b_1 \right\} \quad (66b)$$

wird die Nullhypothese abgelehnt, d. h. im allgemeinen werden dann Fehler in den Festpunktkoordinaten angenommen.

Ist $b_2 = 1$, so erhalten wir den besonderen Fall, der zum Studentschen Test führt (siehe (54)).

Prüfung der Festpunktkoordinaten

Die Alternativhypothese H_{aj} lautet: die Koordinate $x_j(y_j)$ eines Festpunktes P_j ist um einen Betrag ∇x_j (∇y_j) falsch oder zerstört.

Die entsprechende Teststatistik wird mit

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_{x_1} \\ \bar{v}_{y_1} \\ \bar{v}_{x_2} \\ \bar{v}_{y_2} \\ \vdots \\ \bar{v}_{y_k} \\ \bar{v}_{y_k} \end{pmatrix} = Q_{22}^{-1} \begin{pmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ \vdots \\ v_{x_k} \\ v_{y_k} \end{pmatrix} \quad (67)$$

zu $w_j = \frac{\bar{v}_{x_j}}{\sigma_{\bar{v}_{x_j}}} \quad j = 1 \dots k$
 (Kontrolle x_j)

und $w'_j = \frac{\bar{v}_{y_j}}{\sigma_{\bar{v}_{y_j}}} \quad$ (Kontrolle y_j) .

Die Testgrößen aus (68) sind von der angenommenen Kovarianzmatrix der Festpunkte stark abhängig. Die Grenzwerte der Festpunktkoordinaten hängen gleicherweise von $\sigma_0^2 Q_{22}$ ab. Wir werden diese Abhängigkeit anhand eines Beispiels später verdeutlichen.

Es ist auch möglich, die folgende Hypothese zu prüfen: die beiden Koordinaten x_j und y_j eines Festpunktes P_j sind um einen Betrag ∇x_j und ∇y_j falsch.

Schreiben wir

$$\nabla x_j = k \nabla y_j \quad ,$$

dann können wir die Teststatistik von Baarda anwenden (vgl. Baarda (1968), van Mierlo (1977)). Wir setzen nun voraus, daß die Konstante k unbekannt sei.

Der Punkt P_j hat einen Anteil an Ω_2 . Dieser Anteil sei $\Omega_{2,j}$. Im Prinzip können wir diesen Anteil aus einer Ausgleichung mit und ohne Teilnahme von P_j ermitteln

$$\Omega_{2,j} = \Omega_2(\text{mit } P_j) - \Omega_2(\text{ohne } P_j) \quad (69)$$

Mit $\Omega_{2,j}$ ist eine neue Teststatistik zu bilden (vgl. Pelzer (1974), Koch (1979))

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Omega_{2,j}}{2\sigma_o^2} &\equiv F_{2,\infty} \\ \text{oder} \\ \frac{\Omega_{2,j}}{2} / \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{b_1 + b_2 - 2} &\equiv F_{2,b_1 + b_2 - 2} \end{aligned} \right\}$$

Die Testgrößen (70) sind invariant gegenüber einer S-Transformation. Unter der Alternativhypothese H_{aj} erhalten wir

$$\frac{\Omega_{2,j}}{2\sigma_o^2} | H_{aj} \equiv F'_{2,\infty,\lambda_j} \quad (71)$$

mit

$$\lambda_j = \frac{1}{\sigma_o^2} \begin{pmatrix} \nabla x_j \\ \nabla y_j \end{pmatrix}^T P_{jj} \begin{pmatrix} \nabla x_j \\ \nabla y_j \end{pmatrix} \quad (72)$$

P_{jj} in (72) ist die Gewichtsmatrix der Widersprüche (Klaffungen) im Festpunkt P_j , welche nach dem Anschluß an die übrigen Festpunkte hervorgerufen werden. Die Minimalsicherheit (Macht) des Test β_j hängt von α und λ_j ab.

$$\beta_j = P \left(\frac{\Omega_{2,j}}{2\sigma_o^2} > F_{1-\alpha; 2, \infty} \mid H_{aj} \right) \quad (73)$$

Falls wir für β_j einen Wert β_o annehmen, können wir auf einen Wert für den Nichtzentralitätsparameter schließen:

$$\lambda_o = \lambda(\alpha, \beta_o) \quad (74)$$

(74) mit (72) gibt

$$\frac{1}{\sigma_o^2} \cdot \begin{pmatrix} \nabla x_j \\ \nabla y_j \end{pmatrix}^T P_{jj} \begin{pmatrix} \nabla x_j \\ \nabla y_j \end{pmatrix} = \lambda_o \quad (75)$$

Grenzwerte für eine Punktzerstörung lassen sich ohne weitere Annahme aus (75) nicht berechnen. (75) ist die Gleichung einer Ellipse. Setzen wir

$$\nabla x_j = k \nabla y_j \quad (76)$$

so können wir die entsprechenden Grenzwerte berechnen. In Abb. 3 sind diese Grenzwerte und die Ellipse aus (75) dargestellt. Wir können diese Ellipse als "Grenzwertellipse" oder "Nablaellipse" bezeichnen (vgl. van Mierlo (1978)).

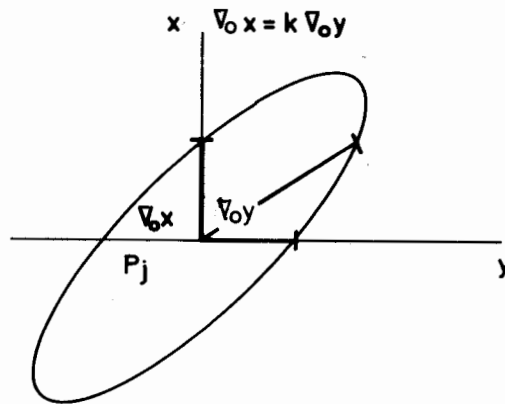


Abb.3 Grenzwertellipse

In jedem Festpunkt können wir eine Grenzwertellipse darstellen. Diese Ellipsen zeigen, wie gut die Festpunkte in verschiedenen Richtungen kontrolliert sind.

Für (70) schreiben wir mit

$$\frac{\begin{pmatrix} \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{pmatrix}^T P_{jj} \begin{pmatrix} \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{pmatrix}}{2 \sigma_o^2} = F_{2, \infty} \quad (77)$$

wobei x_j und y_j die Widersprüche in P_j sind, siehe (72).

Die Nullhypothese wird abgelehnt für den Fall

$$\frac{1}{\sigma_o^2} \begin{pmatrix} \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{pmatrix}^T P_{jj} \begin{pmatrix} \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{pmatrix} > 2 F_{1-\alpha; 2, \infty} \quad (78)$$

Wir können (78) als eine "Konfidenzellipse" bezeichnen. Diese Ellipse ist ähnlich der Grenzwertellipse (75).

In der Praxis werden hauptsächlich die Testgrößen (68) verwendet. Die Testgröße (70) oder (77) wird bei der Analyse von Deformationsmessungen verwendet, siehe z. B. Pelzer (1974), Niemeier (1979), Koch (1979).

Der Einfluß der Kovarianzmatrix der Testpunkte auf das Ergebnis. Beispiel

Bei dem Netz, Abb. 4, handelt es sich um ein Polygonnetz 4. Ordnung. Das Netz enthält 10 geschlossene Polygonzüge und 6 Festpunkte. Die Netzausgleichung können wir in zwei Gruppen ausführen. In der 1. Stufe der Ausgleichung handelt es sich um 30 Bedingungsgleichungen: in jedem geschlossenen Polygonzug 3 Bedingungsgleichungen.

Angenommen sei $\sigma_r = 1,0 \text{ mgon}$ $\alpha_o = 1 \%$
 $\sigma_s = 1 \text{ cm}$ $\beta_o = 80 \%$

Die gemessenen Richtungen und Strecken werden, wo möglich, in der 1. Stufe der Ausgleichung geprüft. Fehler in den Beobachtungen konnten nicht erkannt werden. In Tab. 1 ist das Ergebnis des Tests für einige Beobachtungen dargestellt, siehe Spalte 2 und 3,

	1. Stufe		1. + 2. Stufe	
	w	\sqrt{l}	w	\sqrt{l}
$r_{19,5}$	- 0,75	66,7	5,1	59,8
$r_{27,29}$	0,5	68,1	2,2	66,8
$r_{13,1}$	0,8	91,0	14,5	80,6
$r_{7,17}$	- 0,3	78,1	6,1	70,6
$s_{19,5}$	- 0,4	7,9	- 5,5	7,1
$s_{41,37}$	- 0,6	7,7	- 1,6	7,5
$s_{7,9}$	0,7	9,4	5,4	9,3
$s_{47,23}$	1,5	7,9	2,1	7,9
Ω	16,2		1348,6	(Festpunkte nicht stochastisch)
$\hat{\sigma}^2 / \sigma_o^2$	0,54		35,49	

Tab. 1 Testgröße und Grenzwerte eines Lagenetzes

Mit den ausgeglichenen Beobachtungen werden in einem örtlichen System die Koordinaten aller Punkte berechnet, worauf das Netz durch eine Ähnlichkeitstransformation an die Festpunkte 1 und 103 angeschlossen wird. Dadurch entstehen i.a. an den übrigen Anschlußpunkten Klaffungen. Nach der 2. Stufe der Ausgleichung sind diese Klaffungen nicht mehr vorhanden. Zuerst müssen die Koordinaten der Anschlußpunkte geprüft werden. Dazu ist eine Kovarianzmatrix der Festpunkte erforderlich. Wir nehmen hierfür die Kriterienmatrix von Baarda: die Punktfehlerellipsen und die relativen Fehlerellipsen sind Kreise mit verschiedenen Halbmessern (vgl. Baarda (1973)). Die Größe dieser Halbmesser können wir durch die Wahl verschiedener Parameter, mit denen die Kriterienmatrix berechnet wird, ändern. Beschränken wir uns auf einen Parameter c^2 .

Die Größen der Halbmesser der Fehlerkreise sind proportional zu c .
 Für $c^2 = 0$ wird die Kriterienmatrix zur Nullmatrix (vgl. Baarda (1973), (1977)).

Nach einigen Proberechnungen für Verdichtungsnetze 4. Ordnung wird festgestellt, daß $c^2 = 10$ ein reeller Wert ist. Die Kriterienmatrix von Baarda mit $c^2 = 10$ wird in diesem Beispiel angewandt zur

- Prüfung der Festpunktkoordinaten und Berechnung der Grenzwerte dieser Koordinaten
- Prüfung der Beobachtungen und Berechnung der entsprechenden Grenzwerte
- Berechnung der Verbesserungsvektoren der Koordinaten infolge des Anschlusses
- Berechnung der Fehlerquadratsumme Ω_2 .

Die Grenzwerte der Richtungen und Strecken werden bei einer Gesamtausgleichung kleiner (vgl. Baarda (1968)). Die Redundanzanteile werden größer oder identisch, aber niemals kleiner. Es gilt

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega.$$

Als Testgröße verwenden wir zuerst, siehe Tabelle 2,

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} \frac{\Omega_2}{8} = 6.76 >> F_{0.95;8,\infty}.$$

Zwei Festpunkte werden verworfen, die Punkte 9 und 107. Voraussetzung ist, daß $c^2 = 10$ einen reellen Wert darstellt.

Für $c^2 = 1$, $c^2 = 0,1$ und $c^2 = 0$ sind die Testgrößen w für die Festpunktkoordinaten, die Richtungen und Strecken berechnet. Die Koordinaten der Festpunkte 9 und 107 werden für alle c^2 -Werte verworfen, aber auch andere Koordinaten werden abgelehnt. Bei einer Gesamtausgleichung wird sogar bei $c^2 = 1$ die Richtung 13-1 verworfen. Der Schätzwert für die Gewichtseinheit oder den Varianzfaktor wird bei kleinerem Wert von c^2 größer. Im Fall $c^2 = 0$ können die Festpunktkoordinaten nicht geprüft werden. Obwohl keine Beobachtungsfehler vorliegen, wird wegen $c^2 = 0$ auf Beobachtungsfehler geschlossen, siehe Tab. 1. Der Schätzwert $\hat{\sigma}^2$ ist bei $c^2 = 0$ ohne Bedeutung !

Für die Berechnung der Koordinaten der Neupunkte müssen wir $c^2 = 0$ setzen. Die Koordinaten aus der 1. Stufe der Ausgleichung werden durch diesen Anschluß verbessert. Die Verbesserungsvektoren sind in Abb. 7 dargestellt. Zusätzlich sind die Verbesserungsvektoren infolge einer Helmerttransformation in Abb. 8 dargestellt. Die Koordinaten mit ihrer Kovarianzmatrix hängen vom Rechenverfahren ab.

Möglicherweise müssen die Beobachtungen und die Festpunktkoordinaten getrennt geprüft werden, besonders wenn kein guter Ersatz für die Kovarianzmatrix der Festpunkte zur Verfügung steht.

1		2	3	4	5	6	7
Koordinate		1. + 2. Stufe $c^2 = 10$		1. + 2. Stufe $c^2 = 1$		1. + 2. Stufe $c^2 = 0.1$	
Richtung Strecke		w	∇l	w	∇l	w	∇l
1	y	3.2	9.2	6.7	5.6	9.8	5.0
	x	-.1	8.6	-1.6	4.5	-6.1	3.6
103	y	1.9	10.9	.1	6.3	-4.0	5.2
	x	1.2	11.8	2.9	7.9	3.8	7.3
5	y	1.5	12.4	2.2	5.0	-4.6	3.2
	x	-1.7	14.1	-5.5	7.0	-8.0	5.2
107	y	4.3	4.7	12.3	1.6	25.2	.7
	x	-1.2	8.7	.5	7.3	7.5	6.7
9	y	-6.1	4.4	-15.9	1.7	-28.9	.9
	x	.2	6.4	-1.3	4.2	-3.3	3.8
127	y	-1.8	9.7	.5	5.6	3.9	4.7
	x	1.3	10.3	6.1	6.0	11.3	4.7
R 19-5		.9	66.4	1.1	64.5	-2.0	61.3
R 27-29		-.8	67.8	-1.0	67.2	-1.8	66.6
R 13-1		-1.4	89.3	-4.6	85.8	-11.0	82.2
R 7-17		-.4	77.1	-3.0	74.0	-5.6	71.2
S 19-5		.7	7.7	2.2	7.4	4.5	7.2
S 41-37		.9	7.6	1.4	7.5	1.7	7.4
S 7-9		-.2	8.0	-1.5	7.3	-6.0	7.0
S 47-23		-1.5	7.9	-1.7	7.9	-2.0	7.9
$\hat{\sigma}^2/\sigma^2$		1.85		8.70		25.22	
Ω_1		16.2		16.2		16.2	
Ω_1		54.1		314.4		942.2	
Ω		70.3		330.6		958.4	

Tab. 2

Literatur

- Baarda, W, D. de Groot; F. Harkink (1956 - Handleiding voor de technische werkzaamheden van het kadaster - 's-Gravenhage, 1956.
- Baarda, W. (1960) - Precision, Accuracy and Reliability of Observations - Report I.A.G. Symposium, Lisbon, 1960. Reprint, Delft, 1965.
- (1967) - Statistical concepts in Geodesy - Neth. Geod. Comm., Publ. on Geodesy, New Series 2, No. 4, Delft,
- (1968) - A testing procedure for use in geodetic networks - Neth. Geod. Comm., Publ. on Geodesy, New Series 2, No. 5, Delft.
- (1973) - S-Transformations and criterion matrices - Neth. Geod. Comm., Publ. on Geodesy, New Series 5, No. 1, Delft.
- (1976) - Reliability and precision of networks - VII Int. Kurs für Ingenieurmessungen hoher Präzision 29. Sept.- 8. Okt. '76. Beiträge, Band I, T.H. Darmstadt, Inst. für Geodäsie.
- (1977) - Measures for the accuracy of geodetic networks - I.A.G. Int. Symp. on Optimization of Design and Computation of Control Networks, Sopron, Hungary, 1977.
- Förstner, W.(1979) - Das Rechenprogramm TRINA für geodätische Lagernetze in der Landesvermessung, NÖV Nordrhein-Westfalen, 12. Jahrgang, Heft 2.
- Heck, B. (1980) - Der Einfluß einzelner Beobachtungen auf das Ergebnis einer Ausgleichung und die Suche nach Ausreißern in den Beobachtungen, in Vorbereitung.
- Koch, K.R.; Fritsch, D. (1979) - Multivariate Hypothesis tests for detecting recent crustal movements - Paper presented at the Symp. Recent Crustal Movements, I.U.G.G., Canberra, 1979.
- Mierlo, J. van (1977) - Systematic investigations on the stability of control points - XV FIG Congress of Surveyors, Stockholm, Paper 606.2.
- (1978) - A testing procedure for analysing geodetic deformation measurements, Presented paper to II nd. Int. Symp. on deformation measurements by geodetic methods, Commission 6, FIG, Bonn 1978.
- Niemeier, W. - Zur Kongruenz mehrfach beobachteter geodätischer Netze, Wiss. Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen an der TU Hannover, Nr. 88, 1979
- Pelzer, H. - Neuere Ergebnisse bei der statistischen Analyse von Deformationsmessungen, XIV. FIG-Kongreß, Washington, Paper 608.3, 1974
- Pope, A.J. (1975) The statistics of residuals and the detection of outliers - Paper presented at 16 th General Assembly of A.I.G., Grenoble

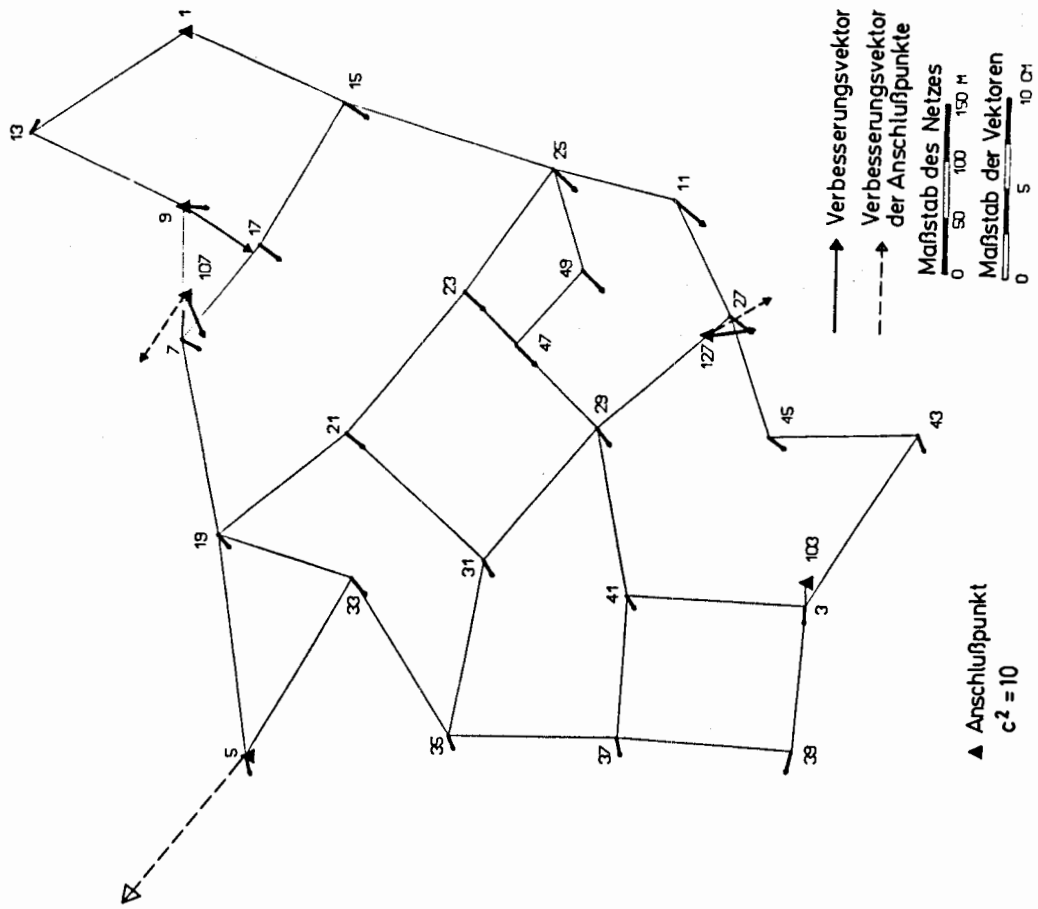


Abb. 4

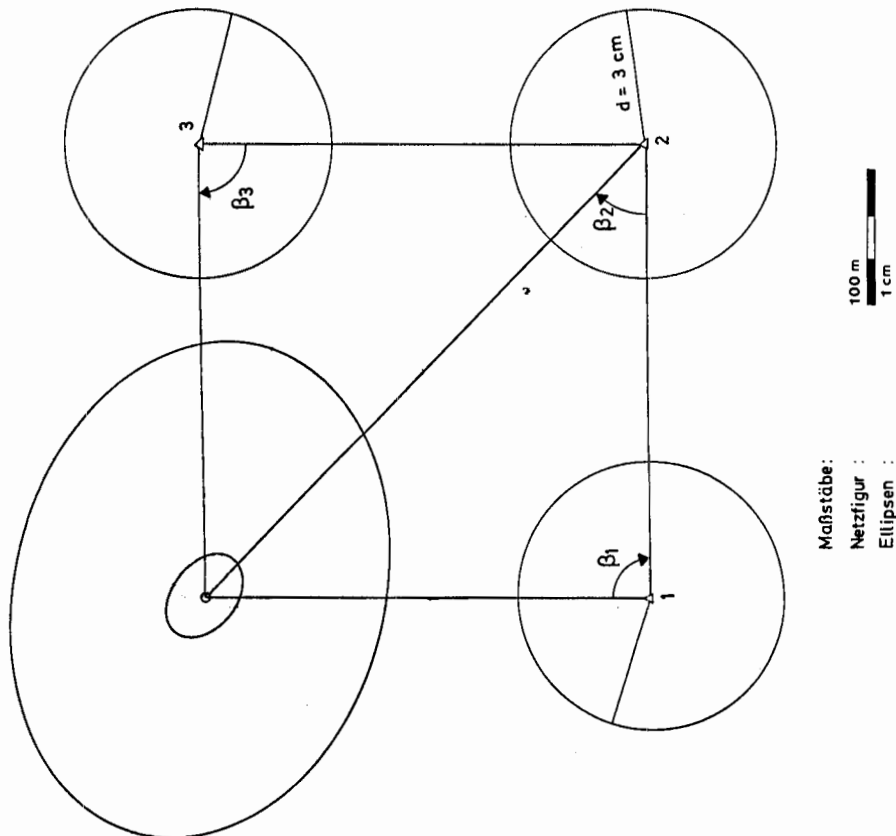


Abb. 2 Fehlerellipsen mit und ohne Berücksichtigung:
 der Kovarianzmatrix der Anschlußpunkte

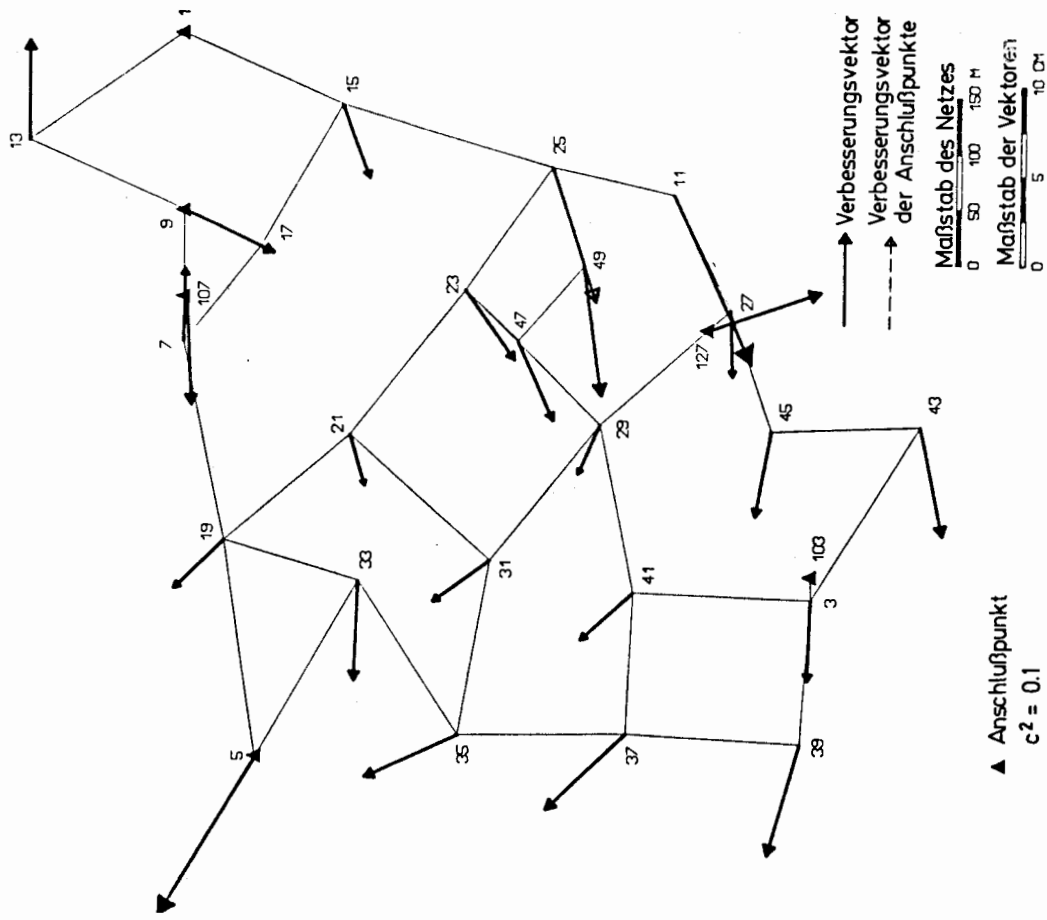


Abb. 6

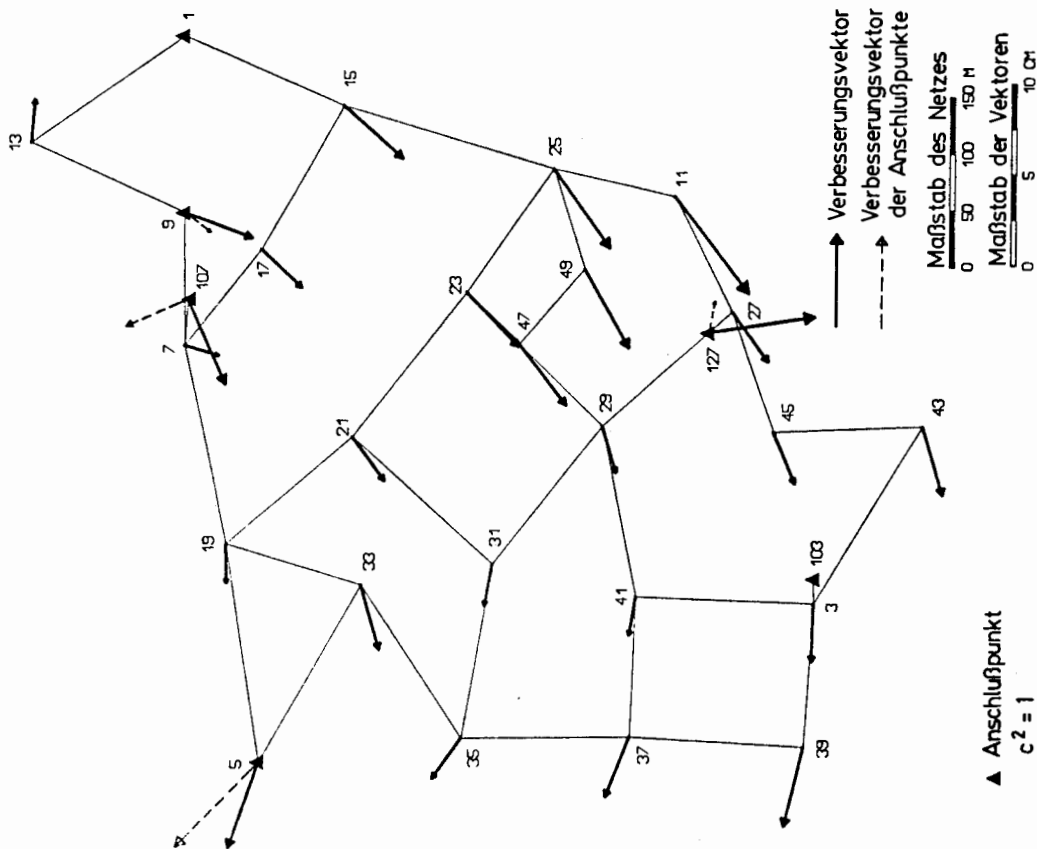


Abb. 5

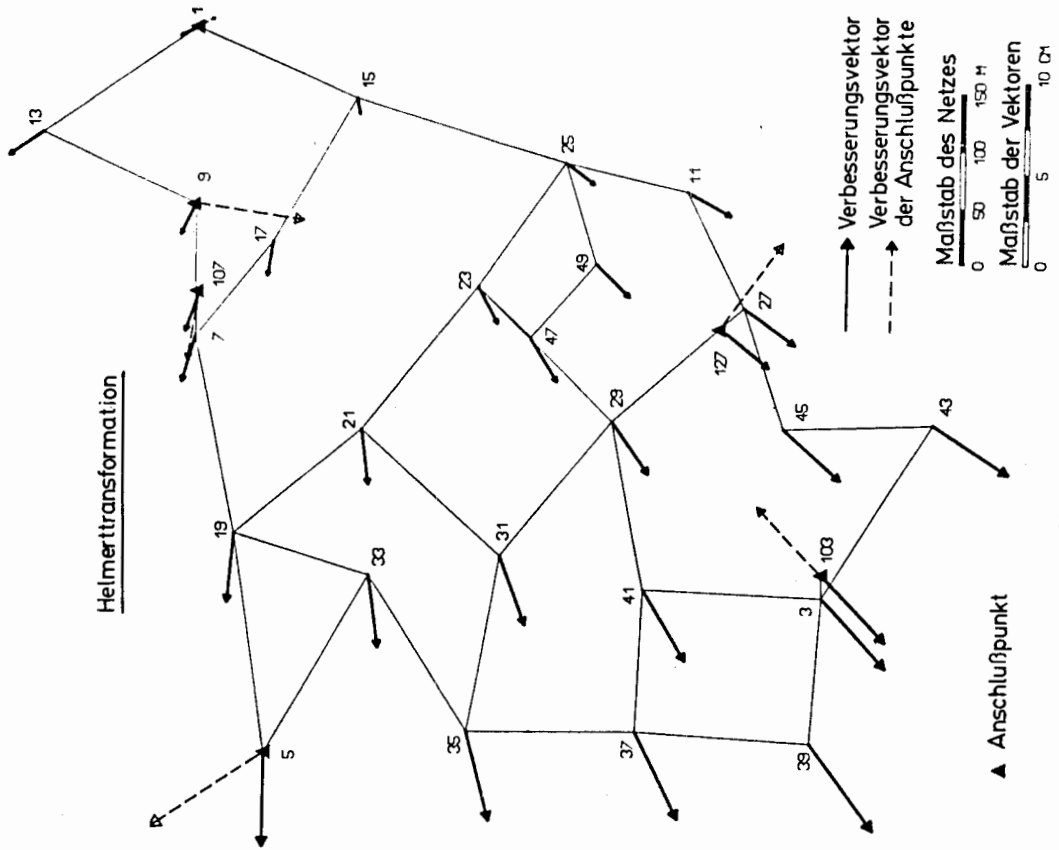


Abb. 8

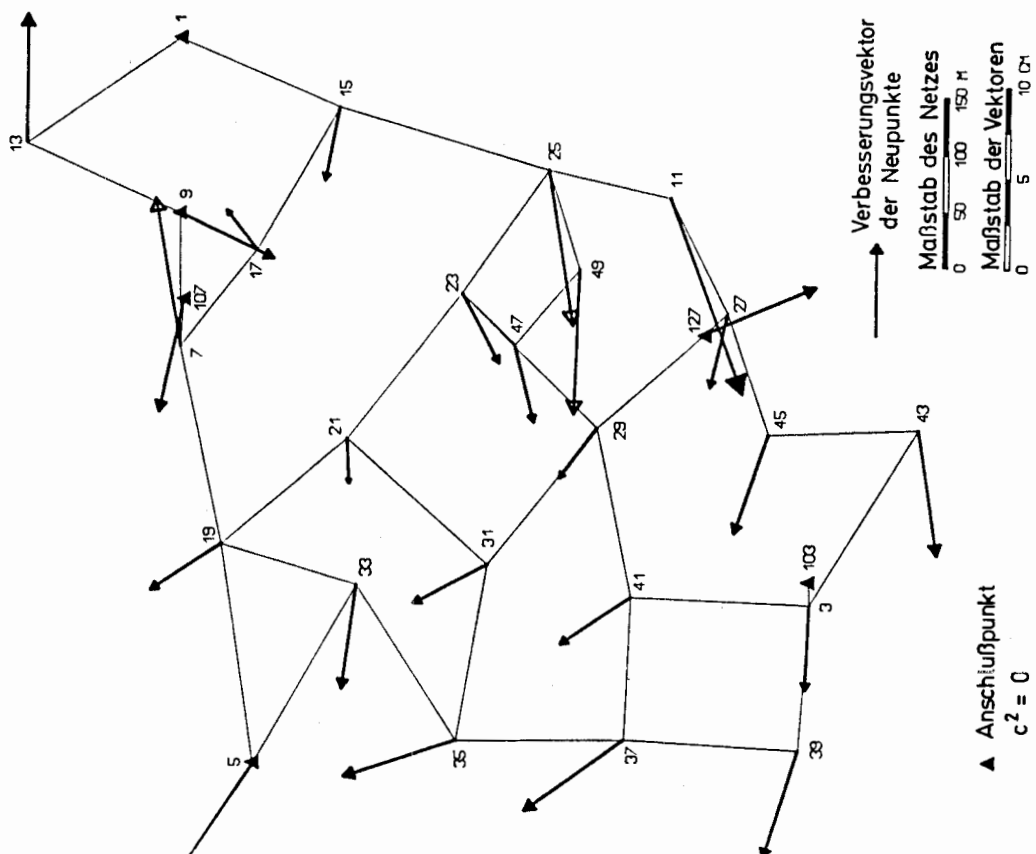


Abb. 7