

H. Klein, W. Förstner

## STRATEGIEN FÜR DIE FEHLERSUCHE IN DER AEROTRIANGULATION

---

### 1. Einleitung

Die vorangehenden Vorträge haben den theoretischen Rahmen für das Problem der groben Datenfehler in photogrammetrischen Blöcken gesteckt. Es ging u.a. um die prinzipiellen Voraussetzungen für die Fehlersuche, die wir durch die Kontrollierbarkeit der Beobachtungen objektiv beschreiben können. Dabei wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß die groben Fehler mit den vorgeschlagenen Tests auch unter realistischen Bedingungen gefunden werden können.

Statistische Tests zur Datenbereinigung treten den in der Praxis vorkommenden groben Fehlern mit mathematischer Strenge entgegen. Die guten Erfolge vergleichsweise einfacher Tests wie das "data-snooping" rechtfertigen die vereinfachte Betrachtungsweise bei der Beurteilung der Zuverlässigkeit photogrammetrischer Blöcke oder geodätischer Netze.

Für statistische Tests lassen sich immer Fehler konstruieren, die sich mit Hilfe dieser Tests einwandfrei lokalisieren lassen, bei denen aber andere - manuelle, visuelle oder vereinfachte - Methoden nur unter Schwierigkeiten oder gar nicht zum Erfolg führen. Es lassen sich andererseits für alle diese Tests Gegenbeispiele konstruieren, bei denen sie versagen oder der nötige Aufwand für die Praxis nicht mehr akzeptierbar ist, eine visuelle Fehlersuche aber zumindest bei einiger Erfahrung des Bearbeiters keine Schwierigkeiten bereitet. Denn die Voraussetzungen, unter denen die Tests optimal sind, lassen sich in aller Regel nicht einhalten. Beispiele, in denen das dem Test zugrunde gelegte mathematische Modell nicht hinreichend berücksichtigt wird, sind:

- Fehlerhäufungen; nur, wenn sich grobe Fehler nicht gegenseitig beeinflussen, führt ein eindimensionaler Test zum Ziel. Die Fehlerhäufung entspricht nicht dem angenommenen mathematischen Modell.
- Störung der Linearität der Ausgleichung; nur Fehler unter einer bestimmten Größe lassen sich mit statistischen Methoden aufdecken. Hier führt die Linearisierung zu einem anderen mathematischen Modell.
- systematische Fehler; sie verhindern eine den theoretischen Aussagen entsprechende sichere Lokalisierung kleiner grober Fehler. Bereits das nichtlineare mathematische Modell ist hier nicht adäquat.

Allen statistischen Tests ist neben dem hohen numerischen Aufwand für die Berechnung der Testgrößen auch der hohe organisatorische Aufwand gemeinsam, den, trotz der vereinfachenden Voraussetzungen dieser Tests, ein nicht nur auf bestimmte Block- bzw. Netzkonfigurationen beschränktes Rechenprogramm leisten muß. Will man alle groben Fehler finden, so muß man die Zahl der einschränkenden Voraussetzungen reduzieren und das Verfahren streng durchführen. Der Aufwand steigt dann meist ins Unermeßliche und läßt sich kaum vertreten. Es ist

eine Illusion, zu glauben, daß systematisches Probieren (Weglassen einzelner Beobachtungsgruppen) immer wesentlich schneller zum Ziel führt.

Wegen der Kompliziertheit praktisch auftretender grober Fehler kann man zwar auf die statistisch fundierten Tests nicht verzichten. Da man aber mehrere grobe Fehler nicht in einem Schritt aufdecken kann, muß man andere, suboptimale Tests mit zur Fehlersuche heranziehen. Sie lassen sich von ihrem Einsatzbereich nicht streng voneinander trennen und erfordern daher eine auf die Daten abgestimmte Strategie. Die Probleme, die sich bei der Entwicklung dieser Strategie zur Suche grober Fehler in Photogrammetrischen Blöcken ergeben, werden im folgenden behandelt.

## 2. Klassifizierung grober Fehler

Wegen ihrer unterschiedlichen Wirkungsweise klassifizieren wir die groben Fehler entsprechend ihrer Größe in

1. große grobe Fehler,
2. mittlere grobe Fehler und
3. kleine grobe Fehler .

Die Klassengrenzen sind nicht scharf, auch dient diese Einteilung nur der einfacheren sprachlichen Verständigung. Grobe Fehler im stochastischen Modell sind hierbei nicht berücksichtigt, lassen sich aber der Größe ihrer Auswirkungen wegen den kleinen groben Fehlern zuordnen.

2.1 Unter großen groben Fehlern wollen wir Fehler größer als 1-2 Basislängen verstehen. Sie stören die Geometrie empfindlich, so daß entweder das nichtlineare Ausgleichsverfahren divergiert oder zumindest schlecht konvergiert. Die Ausgleichung wird daher meistens vor Erreichen des Konvergenzpunktes abgebrochen. Eine der wesentlichen Voraussetzungen für einen statistischen Test

$$E(\underline{v}) = 0 \quad (1)$$

ist verletzt. Die Redundanzanteile sind stark verfälscht. Die Verbesserungen lassen sich dann nicht streng prüfen. Selbst "scharfes Hinsehen" führt hier nicht immer zum Ziel.

Beispiele für große grobe Fehler sind

- falsche Koordinatensysteme (Links- statt Rechtssystem)
- Numerierungsfehler, die zu falschen Verknüpfungen führen,
- Datenübertragungsfehler.

2.2 Unter mittleren groben Fehlern verstehen wir Fehler zwischen  $20\sigma$  und 1-2 Basislängen. Sie sind einerseits weit größer als systematische Fehler (insbesondere lokalsystematische), stören andererseits die Geometrie nicht empfindlich. Deshalb kann man sie bei geometrisch stabilen Verhältnissen mit einfachen Tests aufdecken. Dagegen ist in schwachen Blockteilen ihre Lokalisierbarkeit selbst mit strengen Tests nicht immer gewährleistet.

Beispiele für mittlere grobe Fehler sind

- Identifizierungsfehler
- Punktverwechslungen
- Punktübertragungsfehler
- Markierungsfehler.

Wegen der Häufigkeit der Fehler dieser Größenordnung (ca. 0,5 - 2 % der Messungen) sind viele Wiederholungen der Ausgleichung erforderlich, um alle Fehler zu lokalisieren. Aus wirtschaftlichen Gesichtspunkten sollten deshalb Fehler dieser Art mit numerisch weniger aufwendigen Verfahren gesucht werden, zumal bei statistischen Tests wegen der Bedingung  $E(\underline{y}) = 0$  jedesmal ausiteriert werden müßte.

2.3 Unter kleinen groben Fehlern wollen wir grobe Fehler im Grenzbereich zu den zufälligen Fehlern verstehen ( $4\sigma < \sqrt{l} < 20\sigma$ ). Fehler kleiner als  $4\sigma$  wollen wir den zufälligen Fehlern zuordnen, auch wenn es sich ursächlich um grobe Fehler (etwa Punktverwechslungen) handeln kann. Sie sind schwer zu lokalisieren und haben nur geringen Einfluß auf das Ergebnis. 1)

Die Lokalisierung kleiner grober Fehler setzt die Berücksichtigung der Geometrie voraus. Da wir die Homogenität der Blöcke i.a. nicht garantieren können, werden wir auf die Benutzung strenger Tests nicht verzichten können.

Bei den gegenwärtig üblichen Maßnahmen zur Erzielung höchster Genauigkeit (Signalisierung aller Punkte, Mehrfachüberdeckung) dient ein Teil des Aufwandes dazu, Fehler dieser Größenordnung noch lokalisieren zu können. Mit der Anwendung statistischer Tests könnte dieser Aufwand sicher reduziert werden. Nebenprodukte dieser Tests sind außerdem Angaben über die Zuverlässigkeit der Punktbestimmung. Der Hinweis auf geometrisch schwache Stellen im photogrammetrischen Block und der damit verbundene Hinweis auf geringere Absolutgenauigkeit ist für die Praxis mindestens von ebensogroßer Bedeutung wie das Auffinden von kleinen Meßfehlern.

Vor der Dokumentation der Zuverlässigkeit steht allerdings der oft langwierige Prozeß der Datenbereinigung, der mit dem Auffinden großer oder mittlerer grober Fehler beginnen muß. Einige Verfahren dafür wollen wir näher diskutieren.

### 3. Zur Suche großer und mittlerer grober Fehler

Das Prinzip jeder Bereinigung besteht in der wirksamen Lokalisierung der groben Fehler zum frühestmöglichen Zeitpunkt mit möglichst geringem Aufwand. Dazu gehören zuallererst

- 
- 1) An dieser Stelle wird wieder die Begrenztheit des Begriffs "grober Fehler" bei der Beschreibung der Eigenschaften von Beobachtungen deutlich. In der geodätischen Praxis verbindet man mit dem Begriff "grober Fehler" eine die Beschreibung der Beobachtung verfälschende Ursache, auch wenn sie zufälligen Charakter hat. Für den statistischen Test sind allein die beteiligten Hypothesen (Null- und Alternativhypothesen) von Bedeutung. Die Verbindung beider Modellvorstellungen - darin besteht gerade die "Definition" grober Fehler - ist, wie bei anderen Modellierungen der Wirklichkeit, lose und muß vom Fachmann nach praktischen Gesichtspunkten hergestellt werden.

3.1 Plausibilitätskontrollen. In der Photogrammetrie bieten sich aufgrund der Meßanordnung zahlreiche Plausibilitätskontrollen an, die eventuell etwas Zusatzinformationen benötigen:

1. Maximale Koordinatendifferenzen bei Messungen im gleichen Modell oder Bild.
2. Kontrolle der Punktnummern und der verknüpfenden Modellnummern auf der Grundlage eines gegebenen Numerierungsschemas.
3. Prüfung des Verknüpfungsgraphen auf maximale Anzahl von verknüpfenden Modellen und maximale Anzahl von Modellen innerhalb einer Modellgruppe.

Mit diesen Kontrollen lassen sich große grobe Fehler photogrammetrischer Beobachtungen bereits vor der Blockausgleichung aufdecken. Die Prüfung der Paßpunkte sollte prinzipiell erst nach einer Grobbereinigung der Photogrammetrischen Beobachtungen erfolgen.

3.2 Eine frühzeitige Kontrolle schon bei der Messung führt zu sequentiellen Verfahren und sollte vor allem bei rechnergestützten Auswertegeräten (z. B. analytischen Plotttern) genutzt werden. Der Vorteil der Online-Verfahren besteht in der Möglichkeit, unmittelbar nachzumessen und zu korrigieren. Da man die auszugleichenden Systeme klein halten kann, läßt sich zudem ein strenger Test durchführen. Damit erhalten wir Hinweise über die Geometrie, die sich dazu nutzen läßt, die Anzahl und die Position noch benötigter Messungen zu optimieren. Mit Hilfe von sequentiellen Verfahren, d. h. dem Test im Einzelmodell, im Streifen und in Subblöcken, lassen sich mindestens 80 - 90 % aller groben Fehler auffinden. Wegen der z. T. - allerdings nur wenig - schwächeren Geometrie bleibt die Suche nach den übrigen kleinen groben Fehlern der Gesamtblockausgleichung vorbehalten. Die Photogrammetrie kann hier dem Idealziel nach frühtmöglicher Lokalisierung grober Fehler und rationeller Bearbeitung sehr nahe kommen.

3.3 Oft ist die Suche richtiger Beobachtungen einfacher als die Suche nach groben Fehlern. Ausgehend von einem in sich stimmigen System, werden die übrigen Messungen geprüft. Hier sind einfache Verfahren einsetzbar, zum Beispiel die Berechnung der Orientierung der Bilder oder Modelle mit den stimmigen Beobachtungen: Die Übertragung der (geprüften) Orientierung auf alle Beobachtungen führt auf räumliche Vorwärtsschnitte oder Mittelbildungen, die ohne Aufwand prüfbar sind. Damit lassen sich auch fälschlich eliminierte Punkte wieder in die Ausgleichung einführen. Ein weiteres Beispiel wäre die Einpassung eines frei ausgeglichenen und geprüften Blocks auf die Paßpunkte mit Hilfe einer überbestimmten Ähnlichkeitstransformation. Ausgehend von drei über die Prüfung der Ähnlichkeit des Dreiecks geprüften identischen Punkten lassen sich alle übrigen auf einfache Weise kontrollieren.

Das Verfahren der Suche richtiger Beobachtungen läßt sich bei entsprechender Verfeinerung (insbesondere des stochastischen Modells) auch für die Lokalisierung kleiner grober Fehler einsetzen und hat dann Ähnlichkeit mit der strengen Prüfung von Bedingungen zwischen den Beobachtungen. Bei überschaubaren Ausgleichungen dürfte das Verfahren schneller und sicherer zum Ziel führen, vor allem, wenn mit Fehlerhäufungen zu rechnen ist. Bei großen Systemen wird es organisatorisch schwerfällig. (vgl. Bouloukos, Molenaar, 1978)

Der programmtechnische Aufwand zur Lokalisierung mittlerer grober Fehler wird begleitet von der Häufigkeit dieser Fehler, die zahlreiche Wiederholungsläufe erfordern. Es erscheint daher zweckmäßig, rationellere Verfahren anzuwenden. Dazu gehören insbesondere Verfahren, die alle Beobachtungen gleichzeitig und gleichberechtigt behandeln und daher leichter zu realisieren sind.

3.4 Robuste Verfahren werden seit ca. 10 Jahren in der Statistik intensiv entwickelt und untersucht. Sie zielen auf eine Schätzung der Koordinaten, die unempfindlich (robust) gegen Abweichungen der Daten vom mathematischen Modell sind, also auch gegen grobe und systematische Fehler. Man interessiert sich dabei nur für ein brauchbares Ergebnis, nicht aber für die Beurteilung der einzelnen Beobachtungen.

Zu diesen robusten Verfahren gehört z. B. die Ausgleichung, bei der die Summe der Absolutbeträge der Verbesserungen minimiert wird. Bei der Bestimmung des Mittelwerts einer Meßreihe erhält man hier statt des arithmetischen Mittels den Medianwert, d. i. der mittlere Wert der sortierten Meßreihe.

Alle robusten Verfahren, die statt der gewogenen Quadratsumme der Verbesserungen eine andere Funktion

$$\phi(\underline{v}) \rightarrow \min$$

minimieren, lassen sich mit einem normalen Ausgleichungsprogramm simulieren, wenn man nach jedem Iterationsschritt die Streuung, bzw. die Gewichte, nach

$$p_i = \phi(v_i) / (v_i^2 + c)$$

den aus der vorigen Ausgleichung erhaltenen Verbesserungen anpaßt.

Hierin ist  $c$  eine Konstante mit  $c \ll \sigma_i^2$  (vgl. Krarup et al, 1980).

Der Vorteil dieser Verfahren gegenüber denjenigen, die jeweils eine Beobachtung nach der anderen eliminieren, liegt in der gleichzeitigen Berücksichtigung des Einflusses aller groben Fehler und der automatischen Korrektur eventueller Fehlentscheidungen.

3.5 Bei nichtlinearen Problemen treten ab einer bestimmten Größe der groben Fehler Konvergenzprobleme auf. Hier bietet sich die Methode der konjugierten Gradienten an. Die kleine Schrittweite bei der iterativen Lösung des Normalgleichungssystems wird zum Vorteil gegenüber direkten Verfahren.

Wir möchten über einen Versuch berichten, den wir mit dem Tachymeter-Netzausgleichungsprogramm von GRÜNDIG durchgeführt haben. Der für den Versuch verwendete Lageblock (einem Modell entspricht ein Standpunktsystem) mit unabhängigen Modellen besteht aus 6 Streifen mit je 12 Modellen. Insgesamt brachten wir 20 grobe Fehler an:

1. Punktvertauschungen innerhalb von Modellen
2. Numerierungsfehler, die zu völlig falschen Verknüpfungen führten (Streifen 2 verknüpft mit Streifen 6)

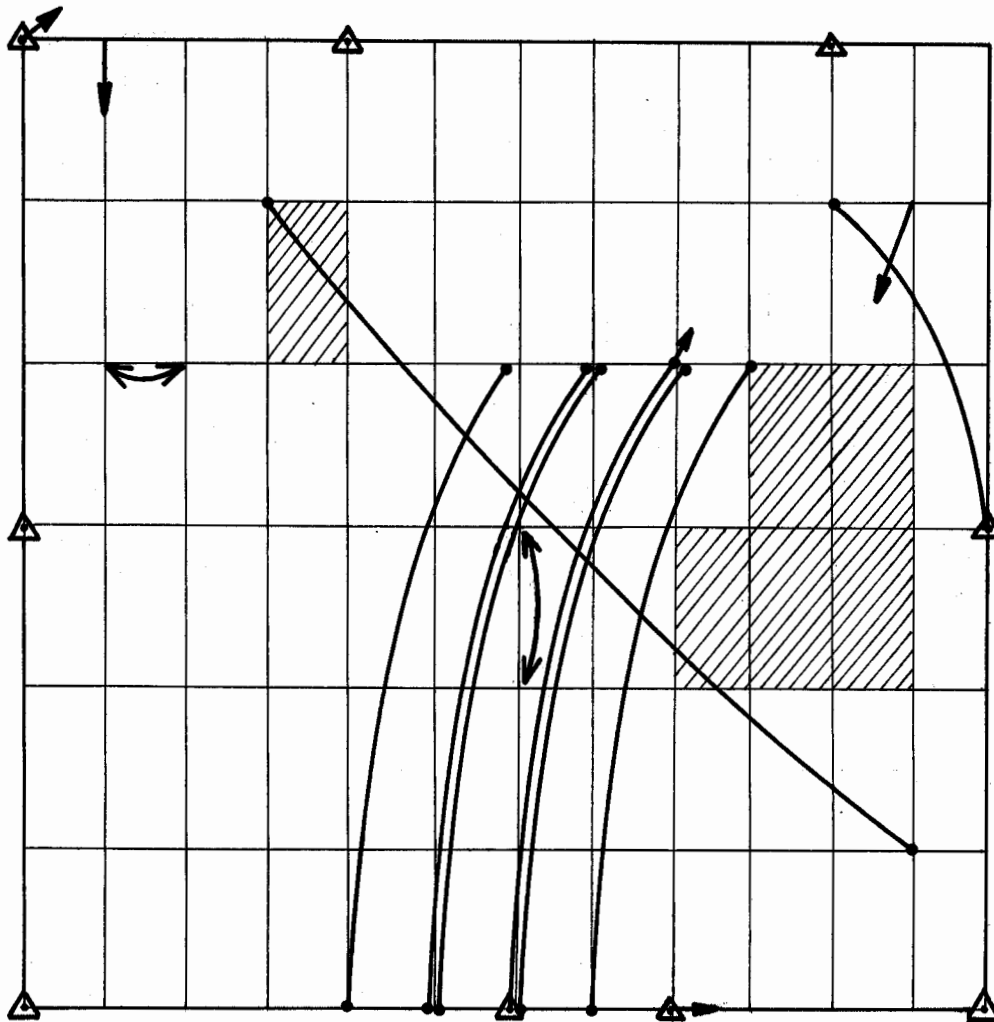


Fig. 1 Schematisch angeordneter Lageblock mit großen und mittleren groben Fehlern

- grobe Fehler
- zusätzliche Verknüpfungen
- ▨ gespiegeltes Koordinatensystem

3. falsche Koordinatensysteme bei einer Gruppe von 5 Modellen und bei einem Einzelmodell,
4. grobe Fehler verschiedener Größenordnung.

Die verschiedenen groben Fehler sind in der Figur 1 dargestellt. Das Programm eliminiert bei Divergenz oder nach einer bestimmten vorgegebenen Anzahl von Einzelschritten die Beobachtung mit der größten teilnormierten Verbesserung  $v_i/\sigma_{1i}$ . Wir erhielten folgendes Ergebnis:

1. 7 Punkte wurden zu Unrecht eliminiert, davon wurde eine Fehlentscheidung wieder korrigiert. Der Grund liegt in der nicht strengen Berücksichtigung der Geometrie.
2. 3 grobe Fehler wurden nicht gefunden, da wegen fehlerhafter Elimination keine Oberbestimmung mehr vorhanden war.
3. 1 mittlerer grober Fehler (1/4 Basislänge) wurde wegen falscher Elimination eines anderen Punktes und daher zu geringer Redundanz nicht gefunden.

Das gewählte Beispiel war ein echter Härtetest für die Methode: in 62 Modellen waren nur 4 (!), in 10 Modellen nur 5 Punkte. Die Geometrie war äußerst schwach, weshalb auch einige Beobachtungen fälschlicherweise eliminiert wurden. Trotzdem hat das Programm die meisten groben Fehler, insbesondere alle großen groben Fehler, gefunden und die Koordinatensystemprobleme hervorragend gelöst.

Der numerische Aufwand dieser Methode ist - zumindest bei geometrisch schwachen Blöcken - hoch. Auch wenn durch eine Anpassung an die besonderen photogrammetrischen Verhältnisse (es handelt sich um ein Tachymeterprogramm) noch Einsparungen möglich sind, ist das Verfahren eigentlich nur bei Divergenz oder für die Elimination der großen groben Fehler zu empfehlen. Eine Kombination mit robusten Verfahren könnte weiterhelfen.

#### 4. Zur Berechnung der Redundanzanteile

Mit den genannten Methoden kann man hoffen, die großen und mittleren groben Fehler vollständig und automatisiert zu lokalisieren, zu eliminieren und anschließend evt. sogar zu korrigieren. Da die Verfahren die lokale Geometrie nur unzureichend berücksichtigen, erfassen sie die kleinen groben Fehler nicht oder nicht vollständig, soweit das die Geometrie überhaupt zuläßt. Diesen Nachteil muß man wegen des geringen Aufwandes (was in jedem einzelnen Fall noch empirisch zu prüfen ist) auf jeden Fall in Kauf nehmen.

Statistische Tests wird man aus wirtschaftlichen Gründen erst so spät wie möglich einsetzen. In der Regel wird dann auch eine einzige Ausgleichung genügen, um alle kleinen groben Fehler finden zu können. Lediglich bei Fehlerhäufungen muß man mit mehreren Durchläufen rechnen.

Der Hauptaufwand für die Berechnung strenger Testgrößen besteht in der Bestimmung der Geometrie, im einfachsten Fall der Redundanzanteile. Wir wollen zwei

numerische Methoden zur Berechnung der  $r_i$  im Hinblick auf den nötigen zusätzlichen Aufwand miteinander vergleichen:

- a. Die direkte Berechnung der Redundanzanteile aus

$$r_i = (Q_{VV} P)_{ii} = q_{v_i v_i} p_i \quad (1)$$

- b. die indirekte Berechnung der  $q_{v_i v_i}$  durch Anfügen weiterer rechter Seiten an das Normalgleichungssystem.

Wir gehen in beiden Fällen von dem Fehlergleichungssystem

$$\hat{\underline{e}} = \underline{l} - B \hat{\underline{t}} - C \hat{\underline{k}} \quad \text{Gewichtsmatrix } P \quad (2)$$

aus. Hierin sind  $\hat{\underline{e}}$  die Schätzwerte für die Beobachtungsfehler  $\underline{\hat{e}}$  ( $\underline{\hat{e}} = -\underline{v}$ ),  $\hat{\underline{t}}$  und  $\hat{\underline{k}}$  die Schätzwerte für die unbekanntes Transformationsparameter  $\underline{t}$  und die Koordinaten  $\underline{k}$ ; B und C sind die zugehörigen Koeffizientenmatrizen, P ist die diagonale Gewichtsmatrix der Beobachtungen. Der Redundanzanteil  $r_i$  der i-ten Beobachtung ergibt sich aus

$$r_i = 1 - b_i^T (B^T P B)^{-1} b_i p_i - \bar{c}_i^T (\bar{C}^T P \bar{C})^{-1} \bar{c}_i p_i \quad (3)$$

mit den auf die Koordinaten reduzierten Fehlergleichungen

$$\bar{C} = (\bar{c}_i) = (I - B (B^T P B)^{-1} B^T P) C \quad (4)$$

Reduktion auf die unbekanntes Transformationsparameter, wie sie sich bei Blockausgleichungsprogrammen empfiehlt, ergibt analog: 1)

$$r_i = 1 - \bar{u}_{k_i} - \bar{u}_{t_i} = 1 - c_i^T (C^T P C)^{-1} c_i p_i - \bar{b}_i^T (\bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{b}_i p_i \quad (5)$$

mit den auf die Parameter  $\hat{\underline{t}}$  reduzierten Fehlergleichungen

$$\bar{B} = (\bar{b}_i) = (I - C (C^T P C)^{-1} C^T P) B \quad (6)$$

Die reduzierte Normalgleichungsmatrix lautet entsprechend:

$$\bar{N}_{tt} = \bar{B}^T P \bar{B} \quad (7)$$

Der Summand  $\bar{u}_{k_i}$  in Gl. (5) stellt keine numerischen Probleme. Der Hauptaufwand besteht in der Berechnung von

$$\bar{u}_{t_i} = (\bar{B} (\bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{B}^T)_{ii} p_i$$

#### 4.1 Die erste, direkte Methode berechnet unmittelbar

$$\bar{u}_{t_i} / p_i = \bar{b}_i^T \bar{N}_{tt}^{-1} \bar{b}_i \quad (8)$$

Für einen Vergleich der Rechenzeiten mit und ohne Fehlersuche schätzen wir den Aufwand

- für die Aufstellung des Normalgleichungssystems
- für die Lösung und die Inversion des Normalgleichungssystems und
- für die Berechnung der quadratischen Formen nach Gl. (8)

ab. Er hängt ab von

---

1) Die Werte  $\bar{u}_{k_i}$  und  $\bar{u}_{t_i}$  stimmen nicht mit den  $u_{k_i}$  und  $u_{t_i}$  überein!



- $u_t$ , der Anzahl der unbekanntem Transformationsparameter,
- $b$ , der Bandbreite des Normalgleichungssystems,
- $v$ , dem durchschnittlichen Verknüpfungsgrad der Punkte,
- $n$ , der Anzahl der Beobachtungen und
- $u_m$ , der Anzahl der Unbekannten pro Bild bzw. Modell.

Die Aufstellung des Normalgleichungssystems benötigt (bei unkorrelierten Beobachtungen) ca.

$$N_A = n \cdot (v \cdot u_m)^2 / 2 \quad (9)$$

Multiplikationen.  $v \cdot u_m$  ist die durchschnittliche Zahl der Nicht-Nullelemente der reduzierten Fehlergleichungen in  $\bar{B}$ . Der Faktor 1/2 ist durch die Symmetrie der Normalgleichungen begründet.

Die Lösung des Normalgleichungssystems benötigt ca.

$$N_L = u \cdot b^2 / 6 \quad (10)$$

Multiplikationen, die Inversion einschließlich Lösung

$$N_I = u \cdot b^2 / 2 \quad (11)$$

Multiplikationen, also 2mal mehr Operationen.

Der Aufwand für die Berechnung der  $n$  quadratischen Formen kann mit ca.

$$N_Q = n \cdot (v \cdot u_m)^2 \quad (12)$$

abgeschätzt werden; er ist also doppelt so groß wie der Aufwand für die Aufstellung des Normalgleichungssystems. Die Symmetrie der Inversen  $\bar{N}_{tt}^{-1}$  führt hier zu keiner Einsparung an Operationen.

Insgesamt benötigt man für eine Ausgleichung ohne Fehlersuche

$$N_O = N_A + N_L \quad (13)$$

Operationen. Wegen  $N_A + N_Q = 3 N_A$  und  $N_I = 3 N_L$  ist die Rechenzeit für eine Ausgleichung mit strenger Fehlersuche 3mal so lang,

$$\boxed{N_m = 3 N_O} \quad (14)$$

wie für eine Ausgleichung ohne Fehlersuche.

Bemerkenswert ist die völlige Unabhängigkeit des Rechenzeitverhältnisses von der Blockstruktur !

Diese Abschätzung gründet sich allein auf die numerischen Operationen (Multiplikationen). Der organisatorische Aufwand für die Aufstellung des Normalgleichungssystems und die Berechnung der quadratischen Formen bzw. für die Lösung und die sich anschließende Inversion ist jeweils vergleichbar. Die Zahl der Zugriffe auf Zwischenspeicher, d. h. die Zeit für Input-Output (IO-Zeit) wächst daher durch die Berechnung der Redundanzanteile auf ca. das Doppelte,

$$\boxed{IO_m = 2 IO_O} \quad (15)$$

**Beispiel:**

Es sei ein regelmäßiger Lageblock mit unabhängigen Modellen, 6 Punkten/Modell, gegeben. Er sei quadratisch mit 10 Streifen und 20 Modellen/Streifen.

Dann erhält man

$$u = 800, \quad b = 50 \quad v = 3 \quad (\text{Verknüpfung 2 bzw. 4 Modelle/Punkt})$$

$$u_m = 4 \quad n = 2\,400.$$

Die Zahl der Operationen für eine Ausgleichung ohne und mit Fehlersuche beträgt

$$N_o = N_A + N_L = (0.17 + 0.33) + 10^6 = 0.5 \cdot 10^6 \quad \text{Mult.}$$

$$N_m = N_A + N_I + N_Q = (0.17 + 1.0 + 0.34) 10^6 = 1.5 \cdot 10^6 \quad \text{Mult.}$$

Das sind

$$N_r = N_m - N_o = 10^6$$

zusätzliche Operationen für die strenge Fehlersuche, oder

$$N_r = 420.$$

zusätzliche Operationen für einen Redundanzanteil. In diesem Wert sind die zusätzlichen Multiplikationen der Inversion enthalten. ■

Interessiert man sich nur für einzelne  $r_i$ , so ist dieses Verfahren ungeeignet.

4.2 Die zweite, indirekte Methode zur Berechnung der Redundanzanteile kommt ohne die explizite Berechnung der Inversen  $\bar{N}_{tt}^{-1}$  aus und wird wohl daher vielfach bevorzugt (vgl. z. B. Grün 1979).

Dazu geht man von der reduzierten Normalgleichungsmatrix  $\bar{N}_{tt}$  nach Cholesky aus

$$\bar{N}_{tt} = T T^T. \tag{16}$$

T ist eine untere Dreiecksmatrix, die Bandstruktur von  $\bar{N}_{tt}$  bleibt bei der Zerlegung erhalten. Mit der Hilfsmatrix  $\bar{A}$ , die man durch Lösung des Gleichungssystems

$$T \bar{A} = \bar{B} \tag{17}$$

erhält, gilt

$$\bar{A}^T \bar{A} = \bar{B} (T^T)^{-1} T^{-1} \bar{B}^T = \bar{B} (T T^T)^{-1} \bar{B} = \bar{B} \bar{N}_{tt}^{-1} \bar{B}^T. \tag{18}$$

Die Berechnung von  $\bar{B} \bar{N}_{tt}^{-1} \bar{B}^T$  beschränkt sich so auf die Matrizenmultiplikation  $\bar{A}^T \bar{A}$ . Die Inversion wird umgangen, sie wird durch die Lösung des Gleichungssystems Gl. (17) ersetzt. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, daß beliebige einzelne Elemente von  $\bar{B} \bar{N}_{tt}^{-1} \bar{B}^T$  berechnet werden können, etwa

$$q_{23} = \bar{a}_2^T \bar{a}_3 \tag{19}$$

Der wesentliche Aufwand zur Berechnung eines Elements besteht in der Lösung des Gleichungssystems Gl. (17), bei der man die Reduktion von  $\bar{N}_{tt}$  auf T bereits voraussetzen kann. Die Rücksubstitution der Zeilen von  $\bar{B}$  gibt die Zeilen von  $\bar{A}$ ,

von der in großen Systemen nur etwa das untere Dreieck mit Nicht-Nullelementen belegt ist. Daher kann man den Aufwand für die Berechnung eines Redundanzanteils mit

$$n_r = b \cdot u / 2 \quad (20)$$

Multiplikationen abschätzen. Für die Ausgleichung mit Fehlersuche und Berechnung aller  $r_i$  benötigt man hier ca.

$$N_m = N_A + u \cdot b^2 / 6 + n \cdot u \cdot b / 2 = N_A + u \cdot b (b/6 + n/2)$$

Multiplikationen.

Fortsetzung des Beispiels:

Die Berechnung eines  $r_i$  nach der zweiten Methode benötigt ca.

$$n_r = 10\ 000$$

Multiplikationen. ■

4.3 Der Vergleich der beiden Methoden zeigt deutlich:

- Für die Berechnung aller Redundanzanteile ist die erste, direkte Methode mit Abstand geeigneter, im Beispiel ist sie ca. 16mal schneller.
- Für die Berechnung einzelner Redundanzanteile ist die zweite, indirekte Methode vorzuziehen. Die Anzahl der  $r_i$ , ab der die erste Methode schneller zum Ziel führt, liegt bei einigen Prozent der Anzahl  $n$  aller Beobachtungen (im Beispiel bei ca. 5 %) und ist im wesentlichen von der Blockgröße ( $u$ ) und der Blockform ( $b$ ) abhängig.
- Der Rechenzeitzuwachs durch die strenge Fehlersuche ist bei der ersten Methode von der Blockkonfiguration unabhängig, bei der zweiten von der Struktur des Normalgleichungssystems ( $u, b$ ) abhängig.

Dies legt folgende Strategie zur Einsparung von Rechenzeit nahe: Nur in Zonen schwacher Geometrie (Rand, 2- bzw. 3-fach-Punkte) werden die  $r_i$  streng berechnet, in den übrigen gut überbestimmten Bereichen benutzt man Näherungswerte für die  $r_i$  (vgl. Grün 1979).

Die Methode kann nur in regelmäßigen Blöcken ihre Vorteile zeigen. Bei Unregelmäßigkeiten in der Geometrie - mit der man meistens rechnen muß - ist die Zahl der benötigten  $r_i$  i.a. größer als 5 %. Insbesondere lassen sich die Schwachstellen, an denen die  $r_i$  gerade benötigt werden, nicht ohne weiteres finden. Daher ist grundsätzlich die Berechnung aller  $r_i$  zu empfehlen.

Will man dennoch Kosten für die Berechnung der Redundanzanteile sparen, sind geeignete Näherungsmethoden zu suchen. Hier bieten sich folgende Verfahren an (nach steigendem numerischen Aufwand sortiert) :

- a) Ableitung der  $r_i$  aus der Zahl der beteiligten Modelle bzw. Bilder und der Berücksichtigung der Lage der Punkte im Block. Grundlage für diese Approximation könnten die im Vortrag von Herrn Schroth vorgestellten  $r_i$  von regel-

mäßigen Blöcken bilden. Der Vorschlag von Grün (1979) zielt in dieselbe Richtung. Theoretische Modelle für die Redundanzanteile lassen sich leicht in einem Rechenprogramm speichern. Sie erfassen aber nie alle vorkommenden Blockkonfigurationen (s. o.).

b) Die strenge Berechnung der Redundanzanteile in Teilausgleichungen.  
Dazu zählen:

- b1: Punktbezogene und/oder modell- bzw. bildbezogene Ausgleichungen
- b2: Subblöcke.

ad b1 :

Der organisatorische und numerische Aufwand für diese Teilausgleichungen ist vernachlässigbar. Punktbezogene Teilausgleichungen gehen von näherungsweise bereinigten Orientierungselementen aus. Bei unabhängigen Modellen handelt es sich um die Mittelbildung transformierter Modellkoordinaten, bei Bündelblöcken um räumliche Vorwärtsschnitte (s. o.). Modell- bzw. bildbezogene Teilausgleichungen setzen entsprechend näherungsweise bereinigte Geländekoordinaten voraus. Bei unabhängigen Modellen handelt es sich dann um eine räumliche Ähnlichkeitstransformation, bei Bündeln um räumliche Rückwärtsschnitte. In allen Fällen sind die Ausgleichungen klein genug, um ohne großen Aufwand strenge Tests auch auf mehrere grobe Fehler anzusetzen. Bei geometrisch gut bestimmten Blöcken führt diese Form der Prüfung auf praktisch dieselben Ergebnisse wie Tests nach einer Gesamtausgleichung. Die genäherten Testgrößen  $w$  weichen nur bis ca. 20 % gegenüber den strengen  $w$  ab.

ad b2:

In Blöcken mit schwächerer Geometrie kommen nur Subblöcke als Teilausgleichungen für die Fehlersuche in Frage (vgl. Förstner, 1978). Sie müssen groß genug gewählt werden, daß der erhöhte organisatorische und numerische Aufwand zu einer Approximation führt, die wieder einen strengen Test ersetzen. Dafür genügt es, für die Prüfung eines Bildes oder Modells nur die angrenzenden Bilder oder Modelle hinzuzuziehen. Der numerische Aufwand läßt sich mit den o. g. Formeln abschätzen. Da bei schwacher Verknüpfung (insbesondere bei Modellblöcken mit  $q = 20\%$ ) die Inversion den Hauptanteil der Rechenzeit für die Bestimmung der  $r_i$  ausmacht, kann man hier am ehesten mit einer Einsparung rechnen. Bei starker Verknüpfung (insbesondere bei Bündelblöcken) wird kein Rechenzeitgewinn zu erzielen sein. Denn die für eine gute Approximation der  $r_i$  notwendige Überlappung der Subblöcke führt zu einer Mehrfachberechnung der  $r_i$ . Der wesentliche numerische Vorteil einer Aufteilung in Subblöcke liegt an anderer Stelle: Die Zahl der Wiederholungsläufe pro Subblock paßt sich der jeweiligen lokalen Fehlerquote an. Die groben Fehler werden getrennt und stören die Bereinigung in anderen Subblöcken nicht.

Es bleibt aber das Problem einer automatisierten Aufteilung großer Blöcke in sich überlappende Subblöcke, denn diesen Arbeitsvorgang kann man dem Benutzer nicht zumuten.

## 5. Automatisierte Aufteilung von Blöcken in Subblöcke

Ein Verfahren zur Aufteilung eines Photogrammetrischen Blocks kann sich entweder an der räumlichen Lage oder der Verknüpfung der Einheiten (Modelle oder Bilder) orientieren. Um von der Qualität der Näherungskordinaten, dem Koordinatensystem und evtl. übergreifenden Einheiten (etwa einer Hochbefliegung) unabhängig zu sein, ist der Verknüpfung der Einheiten der Vorzug zu geben.

Das im folgenden vorgeschlagene Verfahren beruht im Prinzip auf einer fortgesetzten Halbierung des Blocks bis eine vorgegebene Maximalgröße der Subblöcke unterschritten ist.

Jede Halbierung geschieht in drei Schritten:

1. Suche eines Durchmessers. Die beiden Modelle, die am weitesten auseinander liegen, bilden Anfang und Ende des Durchmessers (vgl. Fig. 2-4).
2. Aufteilung des Blocks in Modellgruppen. Modellgruppe  $i$  trennt Modellgruppen  $i-1$  und  $i+1$ , d. h. die Modelle der  $i+1$ . und der  $i-1$ . Modellgruppe verknüpfen nicht miteinander. Anfang und Ende des Durchmessers sind in der 1. bzw. letzten Modellgruppe enthalten. Die Bildung der Modellgruppen soll zu möglichst kleinen Modellgruppen in der Mitte des Durchmessers führen. (Fig. 5)
3. Halbierung des Blocks in zwei Subblöcke. Die mittleren zwei Modellgruppen werden beiden Subblöcken zugeordnet (vgl. Fig. 5).

Das Verfahren lehnt sich an das von Gibbs et. al. (1974) zur Bandbreitenminimierung an. Als Ergebnis erhält man eine Aufteilung, bei der jede Einheit im Inneren mindestens eines Subblocks liegt, wenn sie nicht im Gesamtblock am Rand liegt. Die Berechnung der  $r_i$  im Inneren jedes Teilblocks kann streng erfolgen. Bei verschiedenen  $r_i$  für ein und dieselbe Beobachtung approximiert der größte Wert für  $r_i$  den wahren Wert am besten. Damit kann man die Redundanzanteile für die Analyse des Gesamtblocks verwenden. Das Beispiel soll die Phasen der Aufteilung eines Blocks in Subblöcke veranschaulichen. Es handelt sich um einen Block mit 154 Modellen und einer Querüberdeckung von 20 %. In der Graphik sind die Modelle als Kreise (Knoten), die Verknüpfungen als Linien (Kanten) dargestellt. Die Figuren 2 bis 8 zeigen die ersten Stufen der Aufteilung. Es fällt auf, daß das Verfahren die "Taille" des Blocks nicht nutzt. Die endgültige Aufteilung, bei der die Subblöcke eine Größe von 35 Modellen nicht überschreiten sollen, ist aber - verglichen mit der stark unregelmäßigen Struktur - plausibel. (vgl. Fig. 9)

## 6. Diskussion

Auf der Grundlage der vorangehenden Überlegungen lassen sich Empfehlungen für eine Strategie geben.

1. On-line-Verfahren erlauben Fehlersuche und Korrektur zum frühestmöglichen Zeitpunkt. Die meisten groben Fehler können damit vor der Blockausgleichung eliminiert werden. Die Einheiten für die Teilausgleichungen lassen sich den jeweiligen Bedingungen, wie Punktzahl und Überdeckung, anpassen; sie sollten

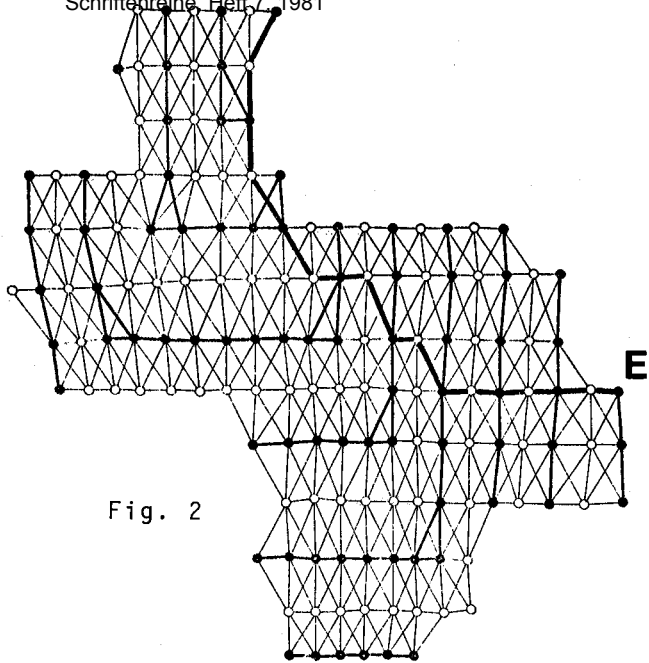


Fig. 2

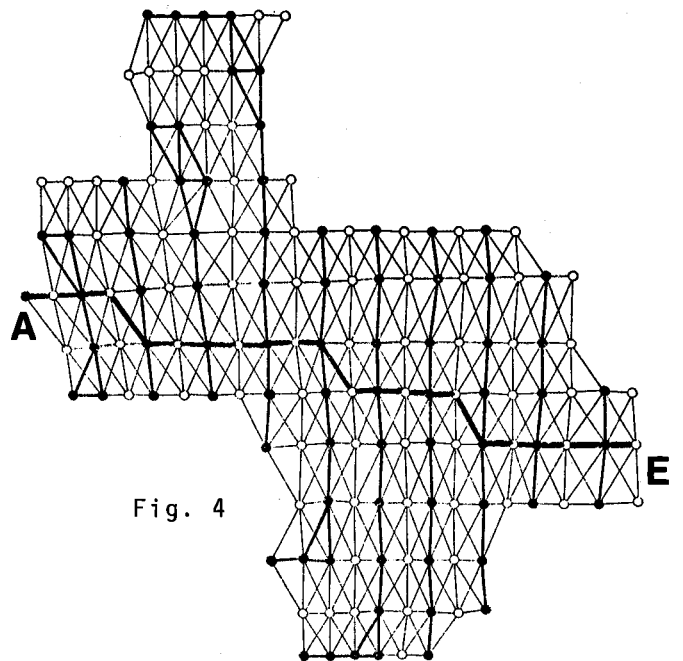


Fig. 4

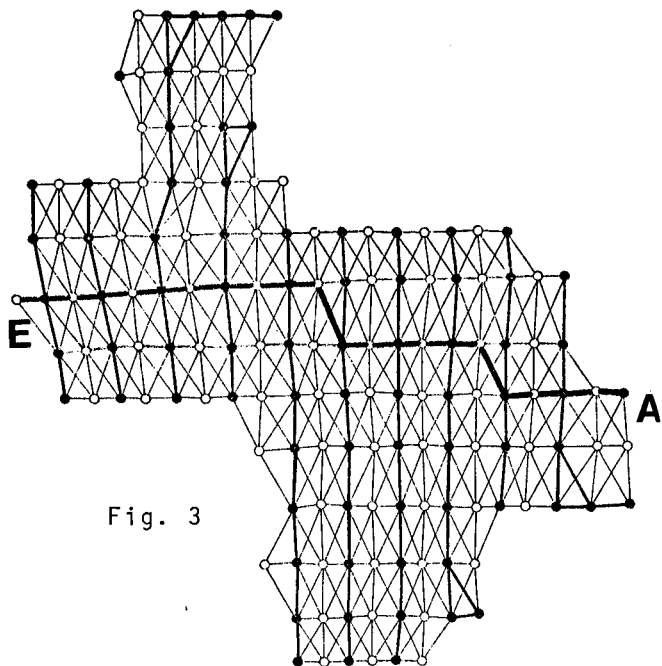


Fig. 3

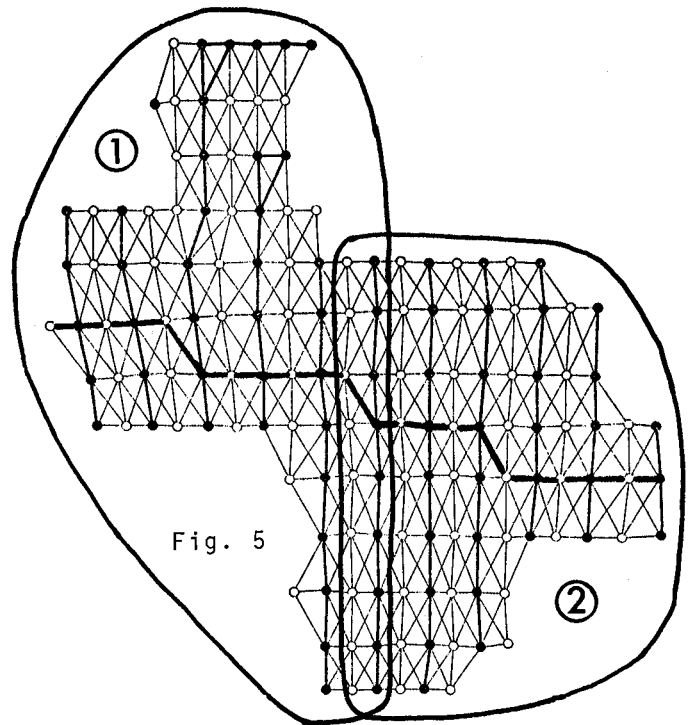


Fig. 5

Fig. 2 Suche eines Durchmessers, 1. Versuch, beginnend bei einem Modell minimaler Verknüpfung, A → E, Modellgruppen durch weiße bzw. schwarze Kreise gekennzeichnet.

Fig. 3 Suche eines Durchmessers, 2. Versuch, beginnend bei einem Modell minimaler Verknüpfung in der letzten Modellgruppe von Fig. 2, A → E, Durchmesser ist länger als in Fig. 2

Fig. 4 Suche eines Durchmessers, 3. Versuch, beginnend beim Modell der letzten Modellgruppe von Fig. 3, A → E, Länge des Durchmessers unverändert → Durchmesser gefunden.

Fig. 5 Kombination der Modellgruppen aus Fig. 3 und 4, so daß Modellgruppen in der Mitte des Subblocks möglichst klein werden. Aufteilung des Blocks in zwei sich überlappende Subblöcke 1 und 2

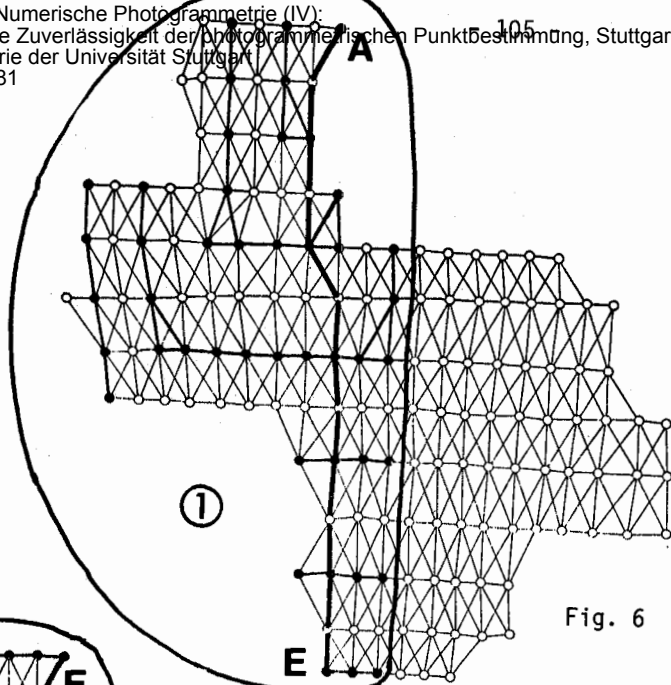


Fig. 6 Suche eines Durchmessers im Subblock 1, 1. Versuch A → E mit Kennzeichnung der Modellgruppen

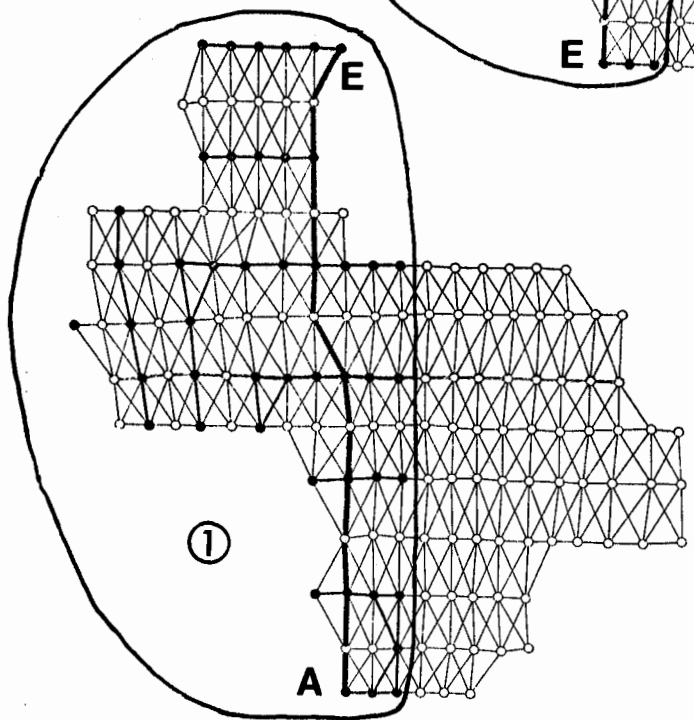


Fig. 7 Suche eines Durchmessers im Subblock 1, 2. Versuch: Länge des Durchmessers gegenüber Fig. 6 unverändert

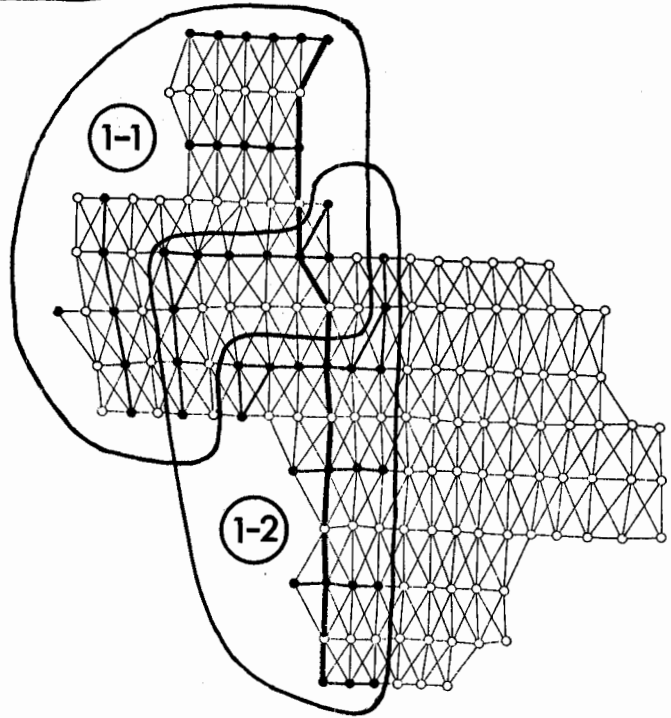
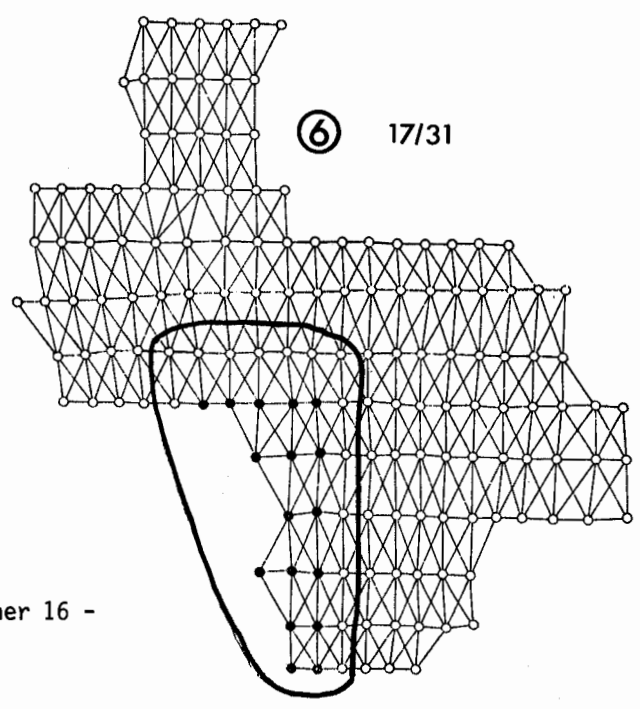
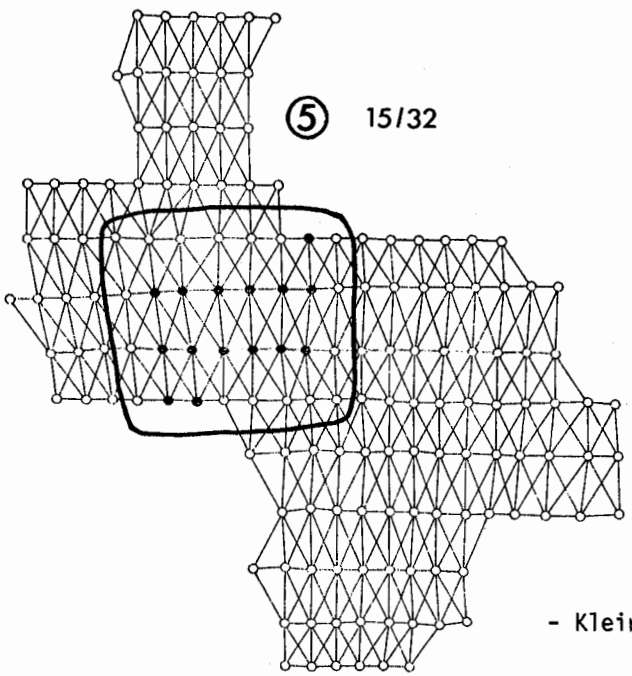
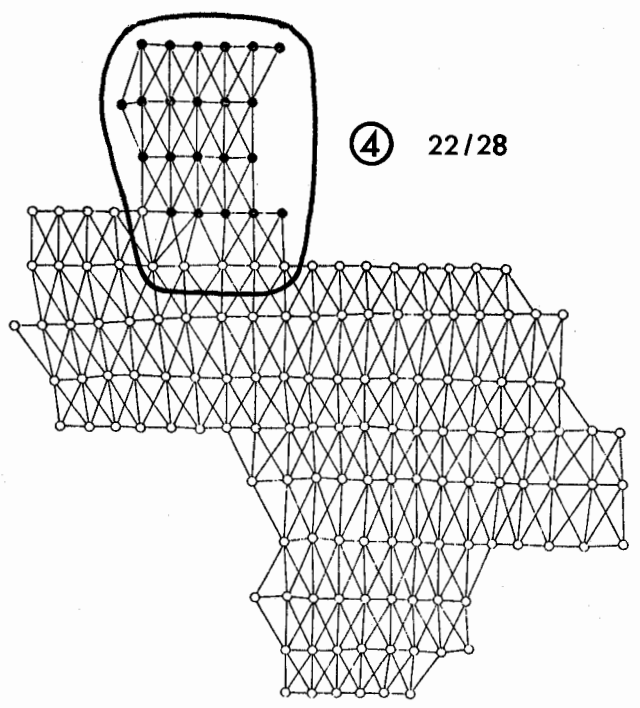
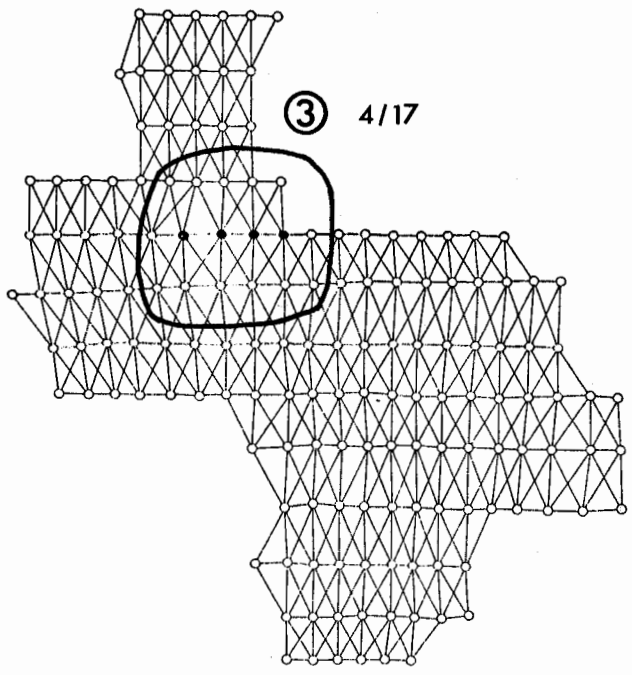
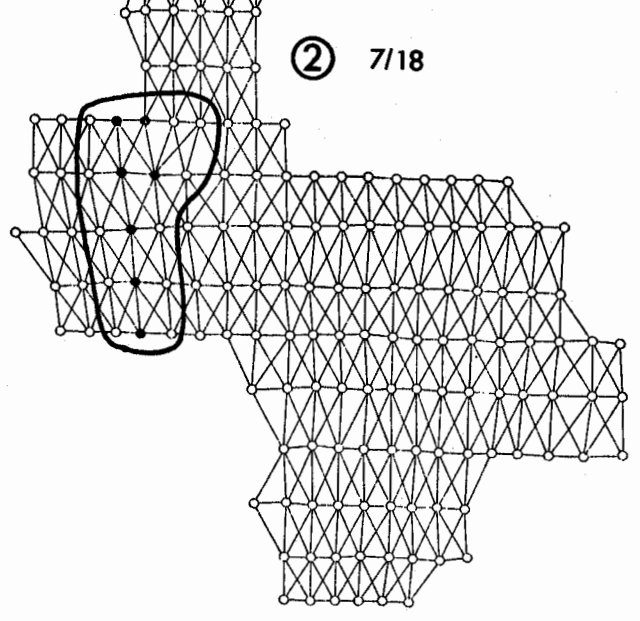
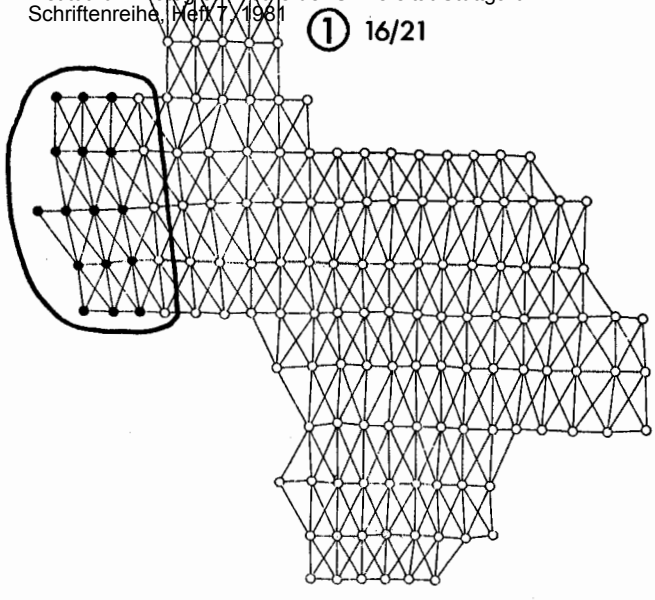
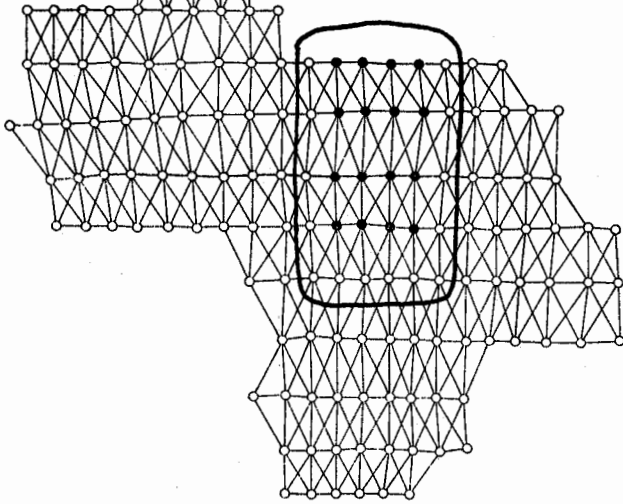


Fig. 8 Kombination der Modellgruppen aus Fig. 6 und 7, sodaß Modellgruppen in der Mitte des Subblocks möglichst klein werden. Aufteilung des Subblocks 1 in sich überlappende Subblöcke 1-1 und 1-2. Größe der Subblöcke 58 und 50 Modelle, maximal 35 sind gefordert → weitere Aufteilung notwendig

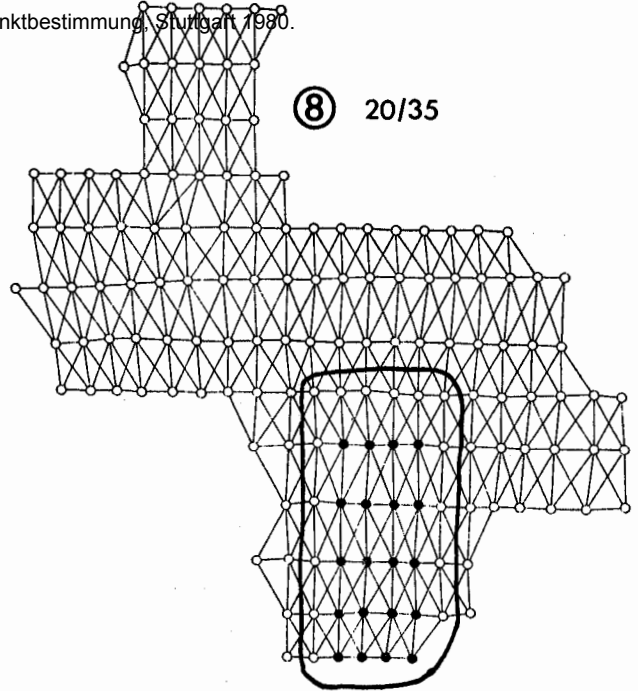




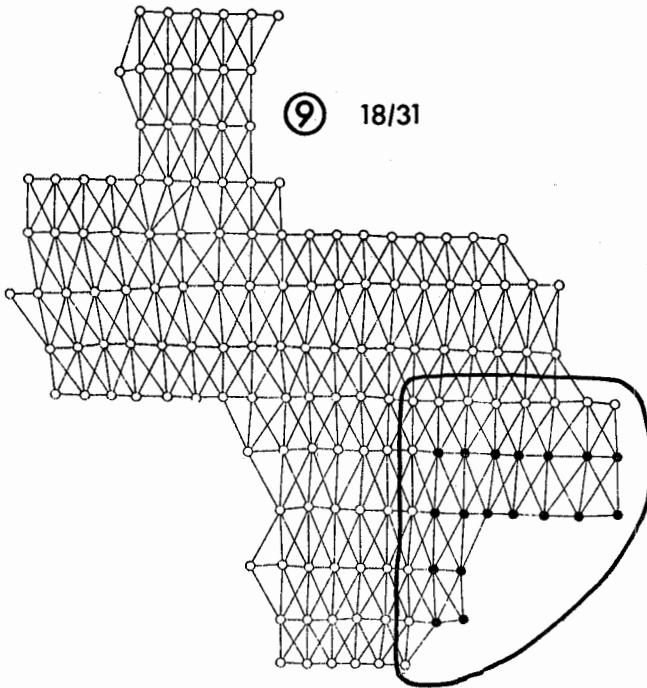
⑦ 16/30



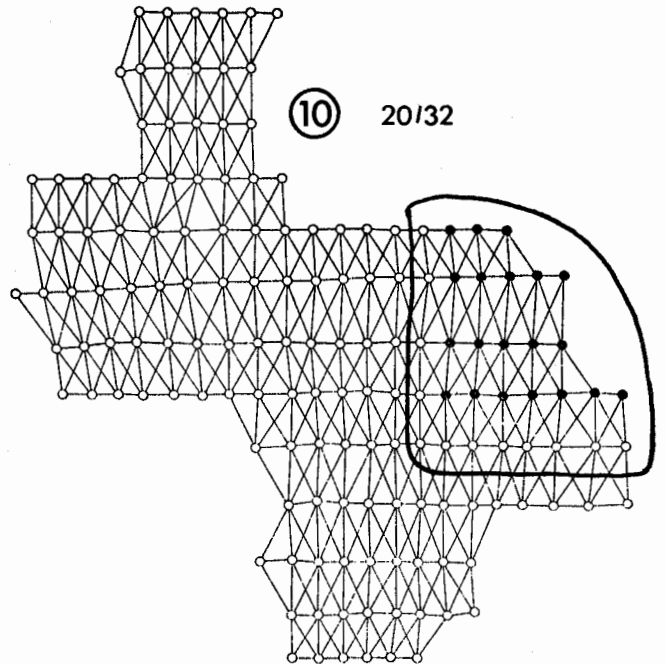
⑧ 20/35



⑨ 18/31



⑩ 20/32



① Nr. des Subblocks

a/ Anzahl Modelle (schwarze Kreise)

/b Größe des Subblocks (Randmodelle: weiße Kreise)

Fig. 9 Endgültige Aufteilung des Blocks in Subblöcke

- Anzahl der Subblöcke: 10
- Größe der Subblöcke : 17-35
- Zahl der zu prüfenden Modelle pro Subblock: 4-22

Bemerkungen:

- Subblöcke 2 und 3 könnten zusammengefaßt werden
- Ein Modell (im Subblock 5 und 6, Rand) kann in zwei Subblöcken etwa gleich gut kontrolliert werden.

zwischen einer kleinen Zahl von Bedingungen zur Prüfung einzelner Beobachtungen und Subblöcken zur Prüfung u.U. geometrisch komplizierter Streifenübergänge variiert werden können. Eine statistisch strenge Fehlersuche ist zu empfehlen.

2. Bei guter Geometrie kann man zu Näherungslösungen übergehen (räumliche Rückwärts- oder Vorwärtsschnitte) oder zur Suche nach richtigen Beobachtungen übergehen. Diese Vorgehensweise führt vor allem bei komplizierten Fehlerhäufungen wirtschaftlicher zum Ziel als strenge Tests.
3. Das Problem der großen groben Fehler läßt sich mit robusten Schätzern oder einem modifizierten Verfahren mit konjugierten Gradienten lösen. Beide Lösungswege haben den Vorteil einer gemeinsamen gleichzeitigen Behandlung aller Beobachtungen. Robuste Schätzer erlauben darüberhinaus eine automatische Wiedereinbeziehung fälschlicherweise eliminierter Beobachtungen.  
Auch mittlere grobe Fehler lassen sich mit diesem Verfahren aufdecken.
4. Die Anwendung strenger Tests sollte sich daher auf die Feinbereinigung beschränken. Der numerische Aufwand für die Berechnung der Testgrößen wird mit einer zielsicheren Lokalisierung der kleinen groben Fehler oder Hinweisen auf Nichtlokalisierbarkeit belohnt, reduziert dadurch die Zahl der Wiederholungsläufe und ermöglicht eine automatische Elimination der groben Fehler. Die für die Berechnung der Redundanzanteile zur Auswahl stehenden Verfahren erlauben eine Optimierung der Rechenzeit bei vorgegebener Anzahl zu berechnender Testgrößen. Das direkte Verfahren, das die Inversion der Normalgleichungen voraussetzt, ist vorzuziehen, wenn mehr als 10 % aller  $r_i$  benötigt werden.
5. Fehlerhäufungen und große grobe Fehler verhindern in gleicher Weise eine Fehlerbereinigung in einem Schritt. Die gegenseitige Beeinflussung grober Fehler läßt sich durch die Aufteilung in Subblöcke beheben. Die Aufteilung läßt sich ohne wesentlichen Aufwand automatisieren.

Die Methoden sind z. T. bereits in der Anwendung und lassen hoffen, daß das Problem automatischer Fehlersuche in der näheren Zukunft zufriedenstellend gelöst wird. Dafür sind noch einige Fragen zu klären:

6. Hierbei geht es zunächst um die Ausarbeitung der einzelnen Verfahren. Die theoretischen Eigenschaften der robusten Schätzer sind zwar bekannt, gelten aber fast ausschließlich nur für sehr große Überbestimmungen (alle  $r_i > 0.8$ ). Die Empfindlichkeit der Schätzer gegenüber Unregelmäßigkeiten in der Geometrie und bei nichtlinearen Problemen sind weitgehend unbekannt. Die meisten Schätzer (mit Ausnahme der  $L_1$ -Norm-Minimierung bei linearen Problemen, die auf die Lösung einer linearen Programmierung führen) arbeiten iterativ, ihr Konvergenzverhalten, auch in Abhängigkeit von der Qualität von Näherungswerten, ist noch eingehend zu prüfen.

Besonderes Interesse gilt dem Problem der Fehlerhäufungen. Die Abgrenzung des Wirkungsbereichs einzelner grober Fehler hat unmittelbaren Einfluß auf die zu wählende Größe der Subblöcke auf die zu erwartende Häufigkeit von Fehlerhäufungen und den dafür nötigen organisatorischen und programmtechnischen Aufwand.

Bei On-line-Verfahren tritt das Problem der Fehlerhäufungen dann nicht auf, wenn die Prüfung unmittelbar nach jeder Messung folgt. Es ist allerdings die Frage, ob dies die optimale Strategie ist und nicht besser Gruppen von Beobachtungen geprüft werden.

7. Die Abgrenzung der Methoden stellt ein eigenes Problem dar.

Man benötigt Kriterien für den Übergang von Näherungsverfahren zu strengen Verfahren. Insbesondere interessiert die Frage, inwieweit Fehlentscheidungen, die von Näherungslösungen getroffen werden, rückgängig gemacht werden können und ggf. die Sensitivität strenger Tests beeinflussen.

Die Leistungsfähigkeit von On-line-Verfahren ist zwar anerkannt, doch ist ungeklärt, wieweit sie wirtschaftlich eine strenge Fehlersuche in Off-line-Systemen ersetzen können. Der Übergang wird sicher auch von den Hardware-Bedingungen, insbesondere den Rechengeschwindigkeiten, abhängen.

Die praktische Trennung von systematischen und groben Fehlern ist ein bisher auch theoretisch noch nicht gelöstes Problem, welches in der Phase der Feinbereinigung unmittelbar spürbar wird. Die Datenbereinigung in On-line-Verfahren wird wohl durch die Nichterfaßbarkeit systematischer Fehler begrenzt. Vielleicht läßt sich das Problem aber durch ein verfeinertes stochastisches Modell lösen, indem die systematischen Fehler als vernachlässigte Korrelationen aufgefaßt werden.

Literatur:

1. Förstner, W.: Die Suche nach groben Fehlern in photogrammetrischen Lageblöcken; DGK C 240, München 1978
2. Gibbs, N.E.; Poole, W.G. and Stockmeyer, P.K.: An Algorithm for Reducing the Bandwidth and Profile of a Sparse Matrix; Techn. Report No. 5, Williamsburg/Virginia, 1974
3. Grün, A.: Gross Error Detection in Bundle Adjustment, Paper presented to the Symposium on Aerial Triangulation; Brisbane, Sept. 1979
4. Krarup, T.; Juhl, J.; Kubik, K: Götterdämmerung over Least Squares, ISP Congress Hamburg Comm III, pp. 369-378, 1980
5. Molenaar, M. and Bouloukos, T.: Preadjustment error detection in independent model blocks; ITC Journal 1978 - 3