

F. Ackermann

GRUNDLAGEN UND VERFAHREN ZUR ERKENNUNG GROBER DATENFEHLER

1. Einleitung

1.1 Sowohl bei der photogrammetrischen Blocktriangulation als auch bei geodätischen Netzen hat die Entwicklung der Meßverfahren und -geräte sowie der Rechen-technik im letzten Jahrzehnt zu einer gewaltigen Leistungssteigerung bezüglich Präzision und Ökonomie geführt. Die Fortschritte sind eindrucksvoll und haben z.B. - um bei der Photogrammetrie zu bleiben - der Aerotriangulation einen zentralen Platz im Leistungsspektrum und Methodensystem der Photogrammetrie zugewiesen. Die Entwicklung numerischer Verfahren wird nach Theorie, Technik und Anwendung derzeit noch stets weiter getrieben. Die Konsequenzen hinsichtlich integrierter analytischer und graphischer Systeme fangen erst an verstanden und realisiert zu werden.

1.2 Bei dieser eindrucksvollen Entwicklung ist - abgesehen von einer Ausnahme, auf die noch zurückzukommen sein wird - ein wichtiger Aspekt von der Theorie zunächst ziemlich unbeachtet geblieben, nämlich der der groben Datenfehler bzw. der Datenbereinigung.

Schon in den klassischen Lehrbüchern steht über grobe Fehler, mit deren Existenz bei Messungen im Prinzip gerechnet werden muß, daß sie durch entsprechende Meßanordnung und Kontrollmessungen aufgedeckt werden sollen. Dies war im Vermessungswesen neben der Genauigkeitssteigerung von Anfang an der wichtigste Grund, mit überschüssigen Messungen zu arbeiten. Es war geradezu die Meßphilosophie und der Stolz des Geodäten, daß jede Messung kontrolliert sei, daß man sich auf die Messungen verlassen könne, daß also im Sinne unseres Themas etwaige grobe Fehler erkannt und eliminiert würden.

Allerdings hat sich die klassische Fehlertheorie nicht weiter mit den groben Fehlern beschäftigt, insbesondere wurden keine Kriterien erarbeitet, wie weit und unter welchen Voraussetzungen grobe Fehler überhaupt aufdeckbar sind. Mit anderen Worten wurde der Begriff der Kontrolle nicht präzisiert (immerhin gibt es in den Technischen Katasteranweisungen den Begriff der "unabhängigen, durchgreifenden Kontrollmessung").

Jedenfalls wird bei der Behandlung der Fehlertheorie und Genauigkeit geodätischer Meßsysteme wie der Ausgleichsrechnung überhaupt üblicherweise vorausgesetzt, daß das Datenmaterial frei von grob fehlerhaften Daten ist. Inwieweit diese Voraussetzung illusorisch ist, wird sich bei der Behandlung der Erkennbarkeit grober Fehler zeigen.

1.3 Alle Praktiker wissen, daß das Problem der groben Datenfehler ernst ist. Neuerdings ist es eher verschärft worden, da mit den modernen Methoden der mehr oder weniger automatischen Datenerfassung zunehmend umfangreichere Datenmengen anfallen, die im einzelnen nicht mehr unmittelbar kontrolliert oder kontrollierbar sind.

Über die Häufigkeit grober Datenfehler bestehen divergierende Ansichten. Es ist jedoch sicher, daß in größeren photogrammetrischen oder geodätischen Sätzen von Meßdaten praktisch stets grobe Fehler enthalten sind. Man schätzt ihre Häufigkeit im Bereich von 1 % bis 0,1 %. Bei gewissen Klassen von Daten, z.B. bei Lage-Paßpunkten für die Aerotriangulation, muß man sich jedoch auf wesentlich höhere Quoten von z.B. 10 % oder mehr einstellen. Dabei sei gleich zur Ehre der Meßtechnik festgestellt, daß grobe Meßfehler als solche extrem selten sind, daß grobe Datenfehler vielmehr überwiegend administrative Ursachen haben, also in vielen Fällen auf Irrtümer bei der Anzielung, der Zielidentifizierung, der Punktnummerierung, der Registrierung oder auch auf fehlerhafte Datenreduktion zurückzuführen sind.

Die Existenz und Häufigkeit grober Datenfehler ist derzeit noch das wichtigste Hindernis dafür, daß z.B. bei Blockausgleichungen Rechenaufwand und -kosten nicht auf eine völlig unbedeutende Größenordnung reduziert werden können. Es sind in der Regel mehrere Gesamt- oder Teilausgleichungen erforderlich, um schrittweise grobe Datenfehler zu eliminieren.

1.4 Ehe wir uns nachfolgend mit der Theorie der Aufdeckbarkeit grober Datenfehler beschäftigen, sollte vorab wenigstens umrissen werden, was wir unter groben Fehlern verstehen wollen. Eine allgemeine Definition ist recht problematisch, vor allem im Zusammenhang mit systematischen Fehlern. Es genügt jedoch zunächst, von der statistischen Grundvorstellung auszugehen, wonach eine Meßgröße l als stochastische Variable betrachtet wird, der eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung zugeordnet ist. Von groben Abweichungen sprechen wir im Prinzip immer dann, wenn ein Meßwert l_i mit großer oder sehr großer Wahrscheinlichkeit nicht mehr als Stichprobe aus jener Verteilung aufgefaßt werden kann, also einer anderen, alternativen Verteilung zugeordnet werden muß. Dabei ist noch offen, ob die Alternativ-Verteilung bzw. die Abweichung primär durch Nichtübereinstimmung des Erwartungswertes, der Streuung oder der Art der Dichtefunktion gekennzeichnet ist.

Diese Definition, die auf n-dimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen und mehrere grobe Fehler auszuweiten wäre, ist unproblematisch, solange die statistischen Parameter als bekannt vorausgesetzt werden. Die Schwierigkeiten der Definition bzw. der Abgrenzung grober Fehler beginnen aber in dem bei Ausgleichungen vorliegenden Fall, daß über die statistischen Parameter der betreffenden stochastischen Variablen keine oder nur unzureichende Informationen bekannt sind. Insbesondere bildet dann die Identifizierung kleiner grober Fehler das eigentliche Problem.

1.5 Nun seien vorab noch einige Bemerkungen zur bisherigen Praxis der Fehlersuche bei Netz- oder Blockausgleichungen gemacht. Eine vielfach angewendete Strategie besteht darin, zunächst mit allen gegebenen Daten eine vollständige (oder bei Iterationsverfahren eine genäherte) Ausgleichung zu machen, in einer anschließenden Analyse der Ergebnisse die vermutlich unbrauchbaren Daten zu eliminieren und die Ausgleichung zu wiederholen. Dieser Prozeß muß in der Regel mehrere Male wiederholt werden, da die verschiedene Größe und die gegenseitige Beeinflussung der

Datenfehler ihre sofortige eindeutige Erkennung verhindert. Abgesehen von dem Problem eines geeigneten Kriteriums bzw. Tests zur Erkennung grober Datenfehler, das uns im folgenden beschäftigen wird, kann diese Methode der Fehlersuche je nach Anzahl und Verteilung der groben Fehler und je nach der Redundanz des Systems schwierig oder unlösbar werden. Die Methode ist bisher auf subjektive Beurteilung abgestimmt und verlangt vom Bearbeiter Erfahrung und Umsicht.

Als alternative Strategie wird vielfach die von kleinen zu größeren Dateneinheiten bzw. -gruppen fortschreitende schrittweise Prüfung auf grobe Datenfehler propagiert und angewendet. Hierher gehören insbesondere auch die neueren Bemühungen der sogenannten on-line Aerotriangulation.

An dieser Stelle brauchen wir uns nicht mit diesen Strategien der Fehlersuche auseinanderzusetzen. In beiden Fällen besteht das Problem in gleicher Weise, anhand geeigneter Kriterien auf grobe Fehler zu schließen. In beiden Fällen muß geklärt werden, wie weit und unter welchen Voraussetzungen das Problem überhaupt gelöst werden kann.

1.6 Einleitend ist festgestellt worden, daß bei der gewaltigen Entwicklung der neueren Meß- und Rechenverfahren die Existenz und die Theorie grober Datenfehler weitgehend außer Betracht geblieben ist. Tatsächlich beschäftigen sich in der Bundesrepublik Geodäsie und Photogrammetrie erst seit einigen Jahren intensiver mit diesem Thema.

Im Gegensatz dazu haben sich jedoch in den Niederlanden Prof. W. Baarda und seine Mitarbeiter von der TH Delft seit über 25 Jahren als Pioniere in Grundlagenforschung und konkreten Entwicklungen der Theorie der groben Fehler und ihrer Erkennbarkeit in geodätischen Netzen gewidmet und ein weitgehend abgerundetes Begriffs- und Methodensystem erarbeitet. Wir werden uns nachfolgend im wesentlichen an die Vorstellungen von W. Baarda anlehnen.

2. Auswirkung von Beobachtungsfehlern auf die Verbesserungen v der Ausgleichung

2.1 Jedem Praktiker, der Erfahrung in der Ausgleichung von geodätischen oder photogrammetrischen Daten hat, ist bekannt, daß selbst relativ große Datenfehler in der Ausgleichung weitgehend verschwinden können, d.h. sich gegebenenfalls nur noch mit einem verschwindenden Bruchteil der ursprünglichen Fehlerbeträge in den Verbesserungen v der Ausgleichung zeigen. Die Fehler werden in der Ausgleichung "verdrückt", sodaß ihre Erkennung und Lokalisierung keine leichte Aufgabe darstellt. Man muß dementsprechend fürchten, daß in den meisten Netzen oder Blöcken unerkannte grobe Fehler verbleiben bzw. verblieben sind.

Diese Erfahrung kann leicht durch konstruierte Beispiele bestätigt und präzisiert werden. Es lassen sich dabei 2 Feststellungen treffen:

- Die durch grobe Datenfehler entstehenden Beträge bzw. Betragsanteile der Verbesserungen v sind stets kleiner (höchstens gleich), häufig aber sehr viel kleiner als die verursachenden groben Fehlerbeträge.
- Ein grober Fehler der Beobachtung i verfälscht bzw. beeinflusst neben der Verbesserung v_i auch andere Verbesserungen v_j ($j \neq i$). Es kann dabei abhängig von der Geometrie oder den Zwangsbedingungen eines Netzes ohne weiteres vorkommen, daß der maximale Einfluß nicht an der zugeordneten Verbesserung v_i sondern an anderer Stelle auftritt.

Damit ist jedenfalls deutlich, daß die Suche und Lokalisierung grober Fehler auf der Basis von Ausgleichungen in der Regel kein triviales Problem ist. So identifiziert z.B. die Verbesserung mit dem Maximalbetrag $|v|_{\max}$ nicht unbedingt eine grob falsche Beobachtung. Das Problem wird außerdem dann erheblich verschärft, wenn bestimmten Größen wie z.B. Festpunkten oder Paßpunkten, die grob falsch sein können, in der Ausgleichung überhaupt keine Verbesserungen zugeordnet werden. In diesem Fall wirken sich grobe Fehler dieser Größen grundsätzlich an anderen Stellen aus und können nur von dort her erkannt werden.

2.2 Um den Zusammenhang zwischen Beobachtungsfehlern und Verbesserungen einer Ausgleichung aufzuzeigen, gehen wir hier von einer beliebigen Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen aus, wobei die Ausgleichung als unproblematisch bezüglich Bestimmbarkeit (Rang), systematischen Fehlern (Funktionalmodell), Näherungswerten usw. angenommen sei.

Den Beobachtungen \underline{l}_i ($i = 1 \dots n$) sei a priori das durch σ_0 , $Q = Q_{11}$ (Gewichtskoeffizientenmatrix) bzw. $P = P_{11} = Q^{-1}$ (Gewichtsmatrix) charakterisierte stochastische oder Fehler-Modell zugeordnet.

Aus den linearisierten Fehlergleichungen

$$\underline{l} + \underline{v} = F(\hat{\underline{x}}) = F(\underline{x}_0) + A\Delta\hat{\underline{x}} \quad (1)$$

bzw. $\underline{v} = A\hat{\underline{x}} - \underline{f}$ wobei $\underline{f} = \underline{l} - a_0$

erhält man mit $N = A^T P A$ die Normalgleichungen

$$N\hat{\underline{x}} = A^T P \underline{f}$$

bzw. als Lösung für die Unbekannten $\hat{\underline{x}}$

$$\hat{\underline{x}} = N^{-1} A^T P \underline{f} \quad (2)$$

Nach der Lösung (2) der Unbekannten $\hat{\underline{x}}$ berechnet man üblicherweise durch Rücksubstitution in (1) die Verbesserungen \underline{v} , aus denen sich dann durch

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{r} \underline{v}^T P \underline{v} \quad (r = \text{Redundanz}) \quad (3)$$

eine Schätzung $\hat{\sigma}_0^2$ für den Varianz-Faktor σ_0^2 ergibt.

Den formelmäßigen Zusammenhang zwischen den Verbesserungen \underline{v} und den ursprünglichen Beobachtungen \underline{l} erhält man entsprechend durch Substitution von (2) in (1):

$$\underline{v} = A\hat{x} - \underline{f} = (AN^{-1}A^T P - E) \underline{f} = (AN^{-1}A^T P - E)(\underline{l} - a_0) \quad (4a)$$

(E = Einheitsmatrix).

Durch Herausziehen der Gewichtsmatrix P kann man (4a) umformen in

$$\underline{v} = (AN^{-1}A^T - Q)P\underline{f} = (AN^{-1}A^T - Q)P(\underline{l} - a_0) \quad (4b)$$

Durch Fehlerfortpflanzung leitet man aus (4) für die Gewichtskoeffizientenmatrix Q_{VV} der Verbesserungen \underline{v} direkt ab

$$\boxed{Q_{VV} = Q_{11} - AN^{-1}A^T} \quad (5)$$

Diese Beziehung kann interpretiert werden als $Q_{VV} = Q_{11} - Q_{\bar{1}\bar{1}}$, wenn mit $\bar{1} = \underline{l} + \underline{v}$ die ausgeglichenen (verbesserten) Beobachtungen bezeichnet werden. (Aus (1) folgt nämlich $Q_{\bar{1}\bar{1}} = A Q_{XX} A^T$, wobei nach (2) $Q_{XX} = N^{-1}$.)

Mit (5) kann man also für (4b) schreiben

$$\boxed{\underline{v} = - (Q_{VV} P_{11}) \underline{f}} \quad \begin{array}{l} \text{mit } \underline{f} = \underline{l} - a_0 \\ \text{und } Q_{VV} = Q_{11} - AN^{-1}A^T \end{array} \quad (6)$$

2.3 Die Gleichung (6) beschreibt den Zusammenhang zwischen den Verbesserungen \underline{v} und den Eingangsgrößen der Ausgleichung. Dabei kann man 2 verschiedene Arten von Eingangsgrößen unterscheiden:

- Die Verbesserungen \underline{v} sind erstens von den Absolutgliedern \underline{f} der Fehlergleichungen und damit wegen $\underline{f} = \underline{l} - a_0$ von den Beobachtungen \underline{l} abhängig.
- Die Verbesserungen \underline{v} sind zweitens von der Matrix $(Q_{VV} P_{11})$ abhängig. Diese Matrix ist quadratisch, i.a. nicht-symmetrisch und hat die Dimension $n \times n$. In ihr kommen nur die Koeffizientenmatrix A der Fehlergleichungen und die Gewichte P der Beobachtungen vor. Mit anderen Worten treten nur a priori bekannte Koeffizienten auf. Man pflegt zu sagen, daß die Matrix $(Q_{VV} P_{11})$ die "Geometrie" des Ausgleichungsproblems verkörpert bzw. dafür verantwortlich ist, wieweit sich Absolutglieder \underline{f} der Fehlergleichungen (und damit die Beobachtungsfehler) auf die Verbesserungen \underline{v} im einzelnen durchschlagen. Wesentlich ist dabei, daß hierbei nur die in der Koeffizientenmatrix A verkörperte (geometrische) Struktur des Ausgleichungsproblems, zusammen mit der a priori Gewichtsmatrix der Beobachtungen, eine Rolle spielt, die Beobachtungswerte selber aber nicht in Erscheinung treten. Somit kann die Matrix $(Q_{VV} P_{11})$ auch schon vorab, ohne Kenntnis der Beobachtungswerte, berechnet werden.

Betrachten wir nun zunächst den Vektor $\underline{f} = \underline{l} - a_0$ der Absolutglieder der Fehlergleichungen etwas genauer. Das Symbol a_0 verkörpert die Funktionswerte $F(x_0)$ der Fehlergleichungen, die sich aus den Näherungswerten der Unbekannten ergeben.

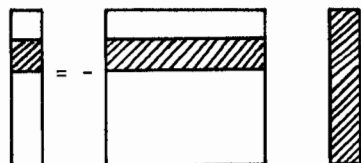
Somit verkörpern die Differenzen $\underline{l} - a_0$ einmal die Nichterfüllung des Funktionalmodells durch die Näherungswerte und zum anderen die Nichterfüllung des Funktionalmodells durch die Beobachtungen. Der erstere Anteil geht in die Bestimmung der Unbekannten bzw. verschwindet nach der letzten Iteration der Ausgleichung, schlägt sich also nicht in den Verbesserungen \underline{v} nieder. Die Verbesserungen \underline{v} sind nur von dem zweiten Anteil betroffen bzw. bestimmt, nämlich der Nichterfüllung des Funktionalmodells durch die Beobachtungen. Wir setzen nun für unsere weiteren Betrachtungen ein "richtiges", d.h. hinreichend adäquates Funktionalmodell voraus (keine systematischen Fehler oder Spannungen). Dann sind somit im Absolutvektor \underline{f} nur die Beobachtungsfehler $\underline{\varepsilon}_1$ die Ursache für die Verbesserungen \underline{v} . Unter der gemachten Voraussetzung können wir also statt (6) schreiben

$$\underline{v} = - (Q_{VV} P_{11}) \underline{\varepsilon}_1 \quad (7a)$$

Aus dieser allgemeinen Beziehung zwischen Beobachtungsfehlern und Verbesserungen können wir folgende Detailzusammenhänge angeben:

- (1) Die zu einer bestimmten Beobachtung l_i gehörende einzelne Verbesserung \underline{v}_i setzt sich aus Anteilen aller Beobachtungsfehler $\underline{\varepsilon}_1$ zusammen.

$$\underline{v}_i = - [(Q_{VV} P_{11}) \underline{\varepsilon}_1]_i = - \sum_{j=1}^n (Q_{VV} P_{11})_{ij} \underline{\varepsilon}_j \quad (7b)$$



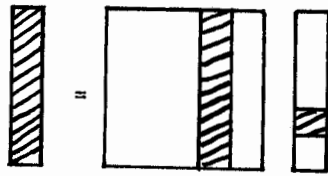
Mit welchen Anteilen die einzelnen Beobachtungsfehler $\underline{\varepsilon}_j$ zu der betreffenden Verbesserung \underline{v}_i beitragen wird ausschließlich und vollständig durch die Koeffizienten bestimmt, die in der i -ten Zeile der $(Q_{VV} P_{11})$ -Matrix stehen. Diese Koeffizienten sind wie besprochen durch die Geometrie des Problems festgelegt. Je nach der Struktur des Problems können einzelne Koeffizienten auch gleich 0 sein. Die entsprechenden Beobachtungsfehler $\underline{\varepsilon}$ wirken dann nicht auf \underline{v}_i .

- (2) Ein Beobachtungsfehler $\underline{\varepsilon}_i$ einer bestimmten Beobachtung l_i wirkt sich auf alle Verbesserungen \underline{v} aus

$$\underline{v}^* = - (Q_{VV} P_{11}) [0 \ 0 \ \dots \ \underline{\varepsilon}_i \ \dots \ 0 \ 0]^T \quad (7c)$$

bzw.

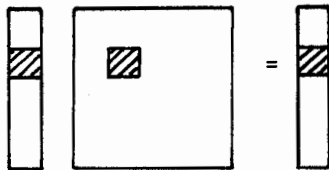
$$\underline{v}_j^* = - (Q_{VV} P_{11})_{ij} \underline{\varepsilon}_i$$



Wie stark sich ein bestimmter Beobachtungsfehler $\underline{\varepsilon}_i$ in den einzelnen Verbesserungen \underline{v}_j niederschlägt wird durch die einzelnen Elemente der i -ten Spalte der Matrix $(Q_{VV}P_{11})$ bestimmt.

- (3) Als Sonderfall von (7c) können wir nun fragen, wie stark sich ein bestimmter Beobachtungsfehler $\underline{\varepsilon}_i$ der Beobachtung \underline{l}_i speziell in der zugeordneten Verbesserung \underline{v}_i niederschlägt:

$$\underline{v}_i^* = - (Q_{VV}P_{11})_{ii} \underline{\varepsilon}_i \quad (7d)$$



Der Anteil, den $\underline{\varepsilon}_i$ an \underline{v}_i hat, wird ausschließlich durch das entsprechende Element $(Q_{VV}P_{11})_{ii}$ bestimmt, hängt also wiederum nur von der Geometrie des Ausgleichungsproblems ab.

2.4 Die bisherigen Betrachtungen des Abschnitts 2.4 gelten für beliebige Beobachtungsfehler $\underline{\varepsilon}_i$, insbesondere für die zulässigen zufälligen Beobachtungsfehler. Die Beziehungen (7) zeigen im einzelnen auf, wie sich die jeweiligen Beobachtungsfehler in den Verbesserungen niederschlagen, bzw. wie sich die einzelnen Verbesserungen \underline{v} aus den Beobachtungsfehlern zusammensetzen. In allen Fällen sind es die Elemente der $(Q_{VV}P_{11})$ -Matrix, welche die jeweiligen Anteile bestimmen.

Im Zusammenhang mit groben Beobachtungsfehlern wird uns vor allem die Beziehung (7d) interessieren. Sie gibt an, wie sich ein Beobachtungsfehler $\underline{\varepsilon}_i$ speziell in der zugeordneten Verbesserung \underline{v}_i niederschlägt. Dieser Anteil wird ausschließlich durch das entsprechende Diagonalelement der $(Q_{VV}P_{11})$ -Matrix bestimmt. Deshalb sollen im folgenden die Haupt-Diagonalelemente dieser Matrix näher betrachtet werden.

Die Hauptdiagonale der Matrix $(Q_{VV}P_{11})$ ist eng verbunden mit der sogenannten Redundanz eines Ausgleichungssystems. Darunter versteht man die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen, definiert durch

$$r = n - u, \quad n = \text{Anzahl der Beobachtungen}$$

$$u = \text{Anzahl der (unabhängigen) Unbekannten.}$$

Es läßt sich zeigen (siehe Anhang), daß die stets ganzzahlige Redundanz r identisch ist mit der Spur der Matrix $(Q_{VV}P_{11})$. Das zeigt noch einmal, wie vollständig diese Matrix die Geometrie des Systems verkörpert.

Die Spur r der $(Q_{VV}P_{11})$ -Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente. Bezeichnen wir diese Diagonalelemente mit r_i , gilt

$$r = \sum_{i=1}^n r_i, \quad \text{mit} \quad r_i = (Q_{VV}P_{11})_{ii} \quad (8a)$$

und wir können die einzelnen r_i verstehen und interpretieren als Redundanzanteile, mit denen die einzelnen Beobachtungen l_i zur gesamten (totalen, globalen) Redundanz r des Systems beitragen.

Dieser Deutung der r_i als Redundanzanteile bzw. als Beiträge der einzelnen Beobachtungen zur Gesamtredundanz kommt entgegen, daß die r_i nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen können.

$$0 \leq r_i \leq 1 \quad (8b)$$

Der Beweis dafür läßt sich insbesondere unter der Annahme, daß die Gewichtsmatrix P eine Diagonalmatrix ist (mit $P_{ii} = p_i$) leicht führen, da die Diagonalelemente aller beteiligten Matrizen positiv sind und

$$(Q_{VV})_{ii} = (Q_{11})_{ii} - (Q_{11}^{-})_{ii} \leq (Q_{11})_{ii} \geq 0.$$

Somit

$$r_i = (Q_{VV}P_{11})_{ii} \leq (Q_{11})_{ii} \cdot p_i \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad r_i \geq 0,$$

weil

$$(Q_{11})_{ii} = q_i = 1/p_i.$$

Diese Eigenschaften liegen allgemein darin begründet, daß die Matrix $(Q_{VV}P_{11})$ idempotent ist. Unter Verwendung von r_i können wir nun (7d) schreiben als

$$\underline{v}_i^* = - r_i \underline{\varepsilon}_i \quad (9)$$

Der Redundanzanteil r_i besagt also direkt, welcher Anteil eines Beobachtungsfehlers $\underline{\varepsilon}_i$ in die Verbesserung \underline{v}_i geht. Dieser Zusammenhang stellt die eigentliche Rechtfertigung dar, die r_i als Redundanzanteile der einzelnen Beobachtungen aufzufassen und zu verstehen. Ohne Überbestimmung sind nämlich alle Redundanzanteile = 0, d.h. die Beobachtungsfehler gehen zunächst voll in die Bestimmung der Unbekannten, Verbesserungen $\underline{v}_i \neq 0$ treten nicht auf. Erst mit beginnender Gesamt-Redundanz $r > 0$ zeigen sich diejenigen Anteile r_i der Beobachtungsfehler in den Verbesserungen \underline{v}_i , die durch die (algebraischen) Freiheitsgrade des Funktionalmodells nicht mehr aufgefangen werden können.

.Damit können wir nun auch die zu den r_i komplementären Größen

$$u_i = 1 - r_i, \quad \text{mit } \sum_{i=1}^n u_i = u = n - r \quad (10)$$

definieren und verstehen u_i als jeweils dasjenige Anteilverhältnis eines Beobachtungsfehlers ε_i der Beobachtung l_i , das sich gerade nicht in der Verbesserung v_i niederschlägt, sondern vielmehr in die Bestimmung der Unbekannten x der Ausgleichung geht. u_i ist somit der Anteil, mit dem die Beobachtung l_i zur Bestimmung der Unbekannten beiträgt bzw. der Anteil, mit dem ein Beobachtungsfehler ε_i in die Unbekannten geht und deren Bestimmung gegenüber der durch $\varepsilon = 0$ definierten Lösung entsprechend verfälscht.

Neben den Verbesserungen v bestimmt die von den Beobachtungen unabhängige $(Q_{VV}P_{11})$ -Matrix auch die Genauigkeit der Verbesserungen v in Form ihrer Varianz-Kovarianz-Matrix $Q_{VV}\sigma_0^2$.

Erweitert man diesen Ausdruck mit $P_{11}Q_{11} = E$, erhält man für die Varianz der Verbesserung v_i

$$\sigma_{v_i}^2 = (Q_{VV})_{ii}\sigma_0^2 = (Q_{VV}P_{11}Q_{11})_{ii}\sigma_0^2 = [Q_{VV}P_{11}(Q_{11}\sigma_0^2)]_{ii} \quad (11a)$$

Für den praktisch besonders wichtigen Fall, daß die Beobachtungen l unkorreliert, also die Matrizen Q_{11} und P_{11} Diagonalmatrizen sind, ergibt sich daraus

$$\sigma_{v_i}^2 = (Q_{VV}P_{11})_{ii}(Q_{11})_{ii}\sigma_0^2 = (Q_{VV}P_{11})_{ii}\sigma_{l_i}^2, \quad \text{oder}$$

$$\boxed{\sigma_{v_i} = \sqrt{r_i} \sigma_{l_i}} \quad (11b)$$

2.5 Zur Beurteilung des Einflusses von Beobachtungsfehlern auf die Verbesserungen wie auch der theoretischen Streuungen der Verbesserungen müssen jeweils die Redundanzanteile r_i bekannt sein. Leider ist ihre Berechnung nach (8a) aufwendig. Im allgemeinen (korrelierten) Fall muß die vollständige Q_{VV} -Matrix berechnet werden. Bei unkorrelierten Beobachtungen genügt zwar die Berechnung der Diagonalelemente $(Q_{VV})_{ii}$ dieser Matrix. Der Aufwand dafür ist dennoch hoch, da zumindest Teile der Inversen N^{-1} der Koeffizientenmatrix der Normalgleichungen benötigt werden.

Eine zweite, ebenfalls aufwendige Möglichkeit zur Berechnung der r_i ist durch Computer-Simulation gegeben. In Umkehrung der Gleichung (9) erhält man

$$r_i = - \frac{v_i^*}{\varepsilon_i} \quad (12)$$

Wenn also in einer numerischen Simulation des Ausgleichungsfalles für eine einzelne Beobachtung l_i ein bestimmter Beobachtungsfehler ε_i angenommen wird und alle anderen Beobachtungsfehler (d.h. alle übrigen Absolutglieder f) gleich 0 gesetzt werden, erhält man nach Durchrechnung der Ausgleichung die von ε_i verursachten Verbesserungsanteile, insbesondere den Anteil v_i . Das Verhältnis ergibt den Redundanzanteil r_i . Diese Berechnung, die jeweils eine vollständige Gesamtausgleichung beinhaltet, muß für alle r_i durchgeführt werden, die von Interesse sind. Obschon die Normalgleichungsmatrix in allen Fällen identisch bleibt, ist der Rechenaufwand zur Bestimmung aller r_i nach dieser Methode ebenfalls sehr hoch.

Wie schon erwähnt, liegen die Redundanzanteile r_i grundsätzlich zwischen 0 und 1. Schwache Überbestimmung entspricht kleinen Werten, starke Überbestimmung äußert sich in größeren Werten. Wie wir sehen werden, liegen bei konventionellen photogrammetrischen Blöcken die durchschnittlichen Redundanzanteile ($\sum r_i/n' = r/n$) etwa bei 0,25. Sie steigen bei Doppelblöcken auf Mittelwerte um 0,5. Für geodätische Lagenetze bewegen sich die Redundanzanteile in ähnlichen Beträgen. Durchschnittliche Beträge um 0,4 oder größer entsprechen schon sehr gut überbestimmten und damit bezüglich grober Fehler sehr gut kontrollierbaren Systemen.

Es gibt jedoch in Geodäsie und Photogrammetrie vielfach Systeme oder Teilaufgaben, die sehr viel schwächer überbestimmt sind. So fallen z.B. bei Streifenausgleichungen, Polygonzügen oder Nivellement-Schleifen die durchschnittlichen Redundanzanteile auf Beträge bis um 0,1 oder kleiner. Bei der relativen Orientierung mit 6 Punkten (nur 1 Überbestimmung) sind die Redundanzanteile der 4 äußeren y -Parallaxen gleich $1/12$, die der beiden inneren gleich $1/3$. Alle diese Fälle zeichnen sich in der Ausgleichung durch entsprechend kleine Beträge der Verbesserungen v_i aus. Das bedeutet gleichzeitig, daß Beobachtungsfehler, insbesondere auch grobe Fehler, in den Verbesserungen nur einen geringen Bruchteil ihres ursprünglichen Betrages zeigen und somit nicht unmittelbar auffallen.

Wichtig und neu an dem Konzept der Redundanzanteile r_i sind jedoch neben den Durchschnittswerten insbesondere die Angaben für die einzelnen Beobachtungen oder Beobachtungsgruppen. So zeigt sich z.B., daß in photogrammetrischen Blöcken die Redundanzanteile der Koordinaten der Blockrandpunkte stets kleiner sind als an den Innenpunkten des Blocks. Vor allem aber haben die Redundanzanteile der Paßpunkte in der Regel sehr kleine Werte, die unter 0,1 fallen können. Diese Punkte sind bezüglich der Aufdeckbarkeit grober Fehler besonders gefährdet, weil sich Beobachtungsfehler nur mit entsprechend kleinem Anteil in den Verbesserungen v zeigen.

3. Grobe Fehler und "Data-snooping"

3.1 Die bisherigen Ausführungen im vorausgegangenen Kapitel haben sich generell auf Beobachtungsfehler ϵ_j bezogen. Nun interessieren uns hier als eine besondere Klasse speziell die groben (Beobachtungs)Fehler, für die W. Baarda das Symbol ∇ (nabla) eingeführt hat. Ersetzen wir also in den Beziehungen (7a-d), (9) und (12) jeweils die Beobachtungsfehler ϵ_j durch die groben Fehler ∇l_j , so erhalten wir die entsprechenden Relationen für grobe Fehler. Vorausgesetzt wird allerdings, daß die groben Fehler ∇l_j nicht so groß sind, daß der Funktionsbereich des linearisierten Fehlergleichungsmodells wesentlich überschritten wird. Insbesondere ist die übertragene Gleichung (7d) von Interesse, wonach die Wirkung ∇v_j eines groben Fehlers ∇l_j der Beobachtung l_j auf die entsprechende Verbesserung v_j durch den Redundanzanteil r_j bestimmt ist:

$$\nabla v_j = - r_j \nabla l_j \quad (13a)$$

Die durch die Geometrie der Ausgleichung gegebenen Redundanzanteile r_j sind also generell dafür verantwortlich, inwieweit sich grobe Datenfehler ∇l_j in den entsprechenden Verbesserungen v_j der Ausgleichung niederschlagen. Die Zahlenwerte der r_j zeigen im Einzelfall, daß diese Anteile an den Verbesserungen v_j nur Bruchteile, häufig nur wenige Prozent des ursprünglichen Fehlerbetrages ausmachen können. Daraus ergibt sich die Schwierigkeit, die Wirkung eines kleinen groben Fehlers ∇l_j in der Verbesserung v_j von der Gesamtwirkung aller zufälligen Fehler ϵ_j in dieser Verbesserung v_j zu unterscheiden.

Übrigens kann man durch Umkehrung von (13a) abschätzen, wie groß ein grober Beobachtungsfehler ∇l_j etwa sein muß, um einen gegebenen Anteil $\nabla v_j = v_j$ zu erzeugen:

$$\nabla l_j = - v_j / r_j \quad (13b)$$

3.2 Nach diesen Vorbereitungen haben wir nun die Voraussetzungen, um einen statistischen Test zur Prüfung von Ausgleichungsergebnissen auf An- oder Abwesenheit von groben Beobachtungsfehlern durchzuführen.

Wir gehen davon aus, daß mit den gegebenen Daten eine vollständige Ausgleichung durchgeführt sei. Zur statistischen Beurteilung, ob das Ergebnis akzeptabel oder durch grobe Fehler verfälscht ist, stehen im Prinzip nur die Verbesserungen v_j bzw. der daraus abgeleitete Schätzwert $\hat{\sigma}_0$ zur Verfügung. Zur Präzisierung dieser Fragestellung im Sinne eines statistischen Tests (s. nachfolgenden Vortrag von W. Förstner) geht man von der Vorstellung aus, daß die statistischen Eigenschaften (Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert, Streuung) der Verbesserungen v_j als Funktionen der statistischen Eigenschaften der Beobachtungsfehler ϵ_j bekannt sind. Betrachtet man insbesondere die einzelne Verbesserung v_j , so kann man feststellen: Wenn die (korrelierten oder unkorrelierten) Beobachtungsfehler normal verteilt sind mit Mittelwert 0 und durch $Q_{11} \sigma_0$ beschriebener Varianz-Kovarianz Matrix, dann ist wegen des linearen Zusammenhangs die Verbesserung v_j ebenfalls

normal verteilt mit Erwartungswert 0 und Streuung σ_{v_i} . Man kann also nach den Formeln bzw. Tabellen der Gauß'schen Normalverteilung angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein bestimmter Betrag für v_i über- oder unterschritten wird.

Im Sinne eines statistischen Tests setzt man einen kritischen Wert k und damit eine Toleranzgrenze $k\sigma_{v_i}$ fest, die nur noch mit einer geringen Wahrscheinlichkeit α überschritten wird.

$$P(-k\sigma_{v_i} < v_i < k\sigma_{v_i}) = 1 - \alpha \quad (14a)$$

Dieser kritische Wert bzw. die Toleranzgrenze wird nun als Kriterium dafür benutzt, bis zu welchem Betrag eine Verbesserung v_i als zu der auf Grund der zulässigen Beobachtungsfehler zu erwartenden Verteilung von v_i gehörend betrachtet werden kann. Beträge, die über dieser Grenze liegen

$$|v_i| > k \cdot \sigma_{v_i} \quad (14b)$$

werden als nicht akzeptabel abgelehnt, weil die Wahrscheinlichkeit α ihres Auftretens unter der Annahme der zu erwartenden zufälligen Fehler, d.h. unter den Voraussetzungen der sogenannten Nullhypothese, sehr klein wäre.

In der Statistik ist es üblich, Testgrößen zu normieren. Deshalb wird auch hier nicht die Verbesserung v_i sondern eine normierte Verbesserung $w_i = v_i/\sigma_{v_i}$ geprüft. Berücksichtigt man (11b), so kann σ_{v_i} mit Hilfe von r_i für unkorrelierte Beobachtungen in σ_{l_i} ausgedrückt werden, sodaß man erhält:

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{v_i}{\sqrt{r_i}\sigma_{l_i}} = \frac{v_i\sqrt{p_i}}{\sqrt{r_i}\sigma_0} \quad (15a)$$

Die Variable w_i ist dementsprechend normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Streuung $\sigma_{w_i} = 1$. Anstelle von (14b) erhält man damit als Toleranzgrenze zur Prüfung auf grobe Fehler

$$|w_i| > k \quad (15b)$$

3.3 Die Prüfung auf grobe Datenfehler besteht somit darin, daß die einzelnen Verbesserungen v_i bzw. ihre nach (15a) normierten Werte w_i mittels (15b) dahingehend geprüft werden, ob ihr Betrag als nach der Null-Hypothese zulässig akzeptiert werden kann oder nicht. Baarda nennt diesen Test "data snooping". Diese Bezeichnung ist sehr anschaulich gewählt und soll hier beibehalten werden."

Beim data snooping werden im Prinzip alle Verbesserungen v_i nach (15b) geprüft, ob sie akzeptabel sind. Liegen eine oder mehrere Toleranzüberschreitungen vor, d.h. können grobe Fehler vermutet werden, dann gilt wegen der Sekundärwirkung grober Fehler auf andere Verbesserungen zunächst nur der Wert $|w_i|_{\max}$ als Identifizierung eines groben Fehlers in der Beobachtung l_i . Für diese Beobachtung gilt damit die begründete Vermutung, sie sei grob fehlerhaft. Sie wird deshalb aus den Daten eliminiert und der Gesamtprozeß wiederholt.

Bei schematischer Anwendung des Prinzips wird Ausgleichung und erneutes Data-snooping Schritt für Schritt wiederholt, bis alle so erkennbaren groben Datenfehler eliminiert sind. In der Praxis wird sich dabei die Frage stellen, ob im Falle mehrerer grober Fehler das Verfahren des Data-snooping nicht dadurch beschleunigt werden kann, daß mehrere grobe Fehler gleichzeitig betrachtet werden.

Es hängt von der Struktur und der Überbestimmung eines Ausgleichungssystems ab und ist von Fall zu Fall zu entscheiden, ob einzelne als grob fehlerhaft erkannte Beobachtungen einfach weggelassen werden können oder ob die betreffende Beobachtung für das System so wesentlich ist, daß sie durch Nachmessung gesichert werden muß. Häufig können grobe Fehler nach ihrer Aufdeckung auch korrigiert werden, insbesondere wenn es sich um administrative Fehler wie falsche Numerierung o.ä. gehandelt hat.

3.4 Die Methode des Data-snooping, wie oben beschrieben, ist ein völlig objektiver Prozeß. Zu seiner Durchführung werden die a priori Annahmen über die Genauigkeit der Beobachtungen und die Größen r_i benötigt. Wie wir gesehen haben, ist die Berechnung der r_i bei großen Systemen aufwendig, aber die Methode läßt keinen Raum für subjektives Eingreifen, sofern die gemachten Voraussetzungen gültig sind. Insbesondere ist denkbar und praktisch anzustreben, daß z.B. Rechenprogramme für Blockausgleichung mit einem Data-snooping Programm ergänzt werden, das in der Lage sein sollte, die Prüfung auf grobe Fehler algorithmisch durchzuführen.

Das Data-snooping in der beschriebenen Form setzt allgemein eine Ausgleichung voraus. Es kann allerdings nur Größen prüfen, denen in der Ausgleichung Verbesserungen zugeordnet sind. Fest eingeführte Werte sind dagegen nicht prüfbar, wie z.B. die Koordinaten von Fest- oder Paßpunkten. Da aber gerade sie ebenfalls fehlerhaft sein können, müssen diese Werte in die Ausgleichung als Beobachtungen eingeführt werden, damit sie überhaupt prüfbar werden.

Inwieweit das Data-snooping im übrigen in der Lage ist, grobe Datenfehler sicher, vollständig und scharf zu erkennen und die gewünschte Datenbereinigung zu leisten, wird Gegenstand der folgenden Vorträge sein. Tatsächlich wird sich herausstellen, daß grobe Datenfehler grundsätzlich nur bis zu einem unteren Grenzwertbetrag aufdeckbar sind, daß also kleine grobe Fehler unerkannt im Datenmaterial verbleiben.

Literatur:

- ACKERMANN, F.: On the Theoretical Accuracy of Planimetric Block Triangulation, Photogrammetria, 21, 1966, S. 145-170
- ACKERMANN, F.: The Concept of Reliability in Aerial Triangulation, Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria, cooperativa libraria universitaria del Polytecnico, Milano, Dicembre 1979, N. 1
- BAARDA, W.: Statistical Concepts in Geodesy, Netherlands Geodetic Commission, Vol.2, No.4, 1967
- BAARDA, W.: A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks, Neth.Geod.Comm., Vol.2, No.5, 1968
- BAARDA, W.: Reliability and Precision of Networks, Pres. Paper to VIIth Int. Course for Eng. Surveys of High Precision, Darmstadt 1976
- FÜRSTNER, W.: Statistical Test Methods for Blunder Detection in Planimetric Block Adjustment, Pres. Paper Comm.III, ISP Congress, Helsinki 1976
- FÜRSTNER, W.: Prüfung auf grobe Bildkoordinatenfehler bei der relativen Orientierung, BuL 1978, Heft 6, S. 205-211

1. $r = \text{Spur der Matrix } (Q_{VV}P_{11})$

Spur einer Matrix A :

$$\text{sp}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{Summe aller Elemente der Hauptdiagonalen}$$

Für die Spur eines Matrixprodukts gilt

$$\text{sp}(AB) = \text{sp}(BA) \quad , \quad \text{sofern das umgekehrte Produkt existiert.}$$

$$\text{Damit } \text{sp}(Q_{VV}P_{11}) = \text{sp}\{Q_{11} - AN^{-1}A^T P_{11}\} \quad \text{mit } N = A^T P_{11} A$$

$$= \text{sp}(E_n - AN^{-1}A^T P_{11})$$

$$= \text{sp} E_n - \text{sp}(AN^{-1}A^T P_{11})$$

$$= n - \text{sp}(N^{-1}A^T P_{11} A)$$

$$= n - \text{sp}(N^{-1}N)$$

$$= n - \text{sp}(E_u)$$

$$= n - u = r$$

$E_n, E_u = \text{Einheitsmatrizen vom Rang } n, u$

2. Die Matrix $(Q_{VV}P_{11})$ ist idempotent, d.h. $(Q_{VV}P_{11})^2 = (Q_{VV}P_{11})$

Beweis durch Ausmultiplizieren ($N = A^T P_{11} A$)

$$(Q_{VV}P_{11})^2 = (Q_{VV}P_{11})(Q_{VV}P_{11})$$

$$= (E - AN^{-1}A^T P_{11})(E - AN^{-1}A^T P_{11})$$

$$= (E - AN^{-1}A^T P_{11} - AN^{-1}A^T P_{11} + AN^{-1}(A^T P_{11} A)N^{-1}A^T P_{11})$$

$$= (E - AN^{-1}A^T P_{11})$$

$$= (Q_{VV}P_{11})$$

Eigenschaften:

Für eine idempotente Matrix gilt:

- Eigenwerte = 0 oder = 1
- sie ist mindestens semi-definit
- Rang = Spur
- falls ein Diagonalelement den Wert 0 oder 1 hat, sind die restlichen Elemente der Spalte = 0 .

3. Beispiel: Relative Orientierung

$$l = [p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6]^T \quad P_{11} = E, \quad \sigma_o = \sigma_p$$

Bedingungsgleichung : $2p_1 - 2p_2 - p_3 + p_4 - p_5 + p_6 = w = 0$

$Uv = w$; $U = [2 \ -2 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1]$; $[w]$

Normalgleichungsmatrix : $N = U Q_{11} U^T$

Normalgleichung : $Nk = w$, $N = 12$, $N^{-1} = \frac{1}{12}$

Lösung : $k = N^{-1}w = \frac{w}{12}$

Verbesserungen : $v = Q_{11} U^T k = \begin{bmatrix} w/6 \\ -w/6 \\ -w/12 \\ w/12 \\ -w/12 \\ w/12 \end{bmatrix}$

$$(Q_{VV}^P) = Q_{VV} = Q_{11} - Q_{11}^{-1} = Q_{11} - (Q_{11} - Q_{11} U^T N^{-1} U Q_{11}) = Q_{11} U^T N^{-1} U Q_{11} = U^T U \cdot \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} [2 \ -2 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1] = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$r_1 = r_2 = 1/3$; $r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = 1/12$

$\sigma_{v_1} = \sigma_{v_2} = \sigma_p \sqrt{1/3} = 0,58 \sigma_p$; $\sigma_{v_3} = \sigma_{v_4} = \sigma_{v_5} = \sigma_{v_6} = \sigma_p \sqrt{1/12} = 0,29 \sigma_p$

mit $k = 3$, $|v_i|_{zul.} = 3 \sigma_{v_i}$:

$|v_1|_{zul.} = |v_2|_{zul.} = 1,74 \sigma_p$; $|v_3|_{zul.} = |v_4|_{zul.} = |v_5|_{zul.} = |v_6|_{zul.} = 0,87 \sigma_p$

mit $\delta_o = 4$, $\nabla_o l_i = 4 \sigma_{l_i} / \sqrt{r_i}$:

$\nabla_o p_1 = \nabla_o p_2 = 6,9 \sigma_p$; $\nabla_o p_3 = \nabla_o p_4 = \nabla_o p_5 = \nabla_o p_6 = 13,8 \sigma_p$

4. Beispiel: 3 Winkel im Dreieck

Bedingungsgleichung

$Uv = w$ $[1 \ 1 \ 1] \cdot [v_\alpha \ v_\beta \ v_\gamma]^T = 200 - \alpha - \beta - \gamma = w$



$P_{11} = E$, $\sigma_o = \sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma$

Normalgleichungsmatrix : $N = U Q_{11} U^T = U U^T$

Normalgleichung : $Nk = w$, $N = 3$

$$k = N^{-1}w = \frac{w}{3}$$

Verbesserungen : $v = \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} = Q_{11} U^T k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad k = \begin{bmatrix} w/3 \\ w/3 \\ w/3 \end{bmatrix}$

$$Q_{vv} P_{11} = Q_{vv} = Q_{11} - Q_{11} U^T N^{-1} U Q_{11}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} [1 \ 1 \ 1] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_i = (Q_{vv} P_{11})_{ii}$$

$$r_\alpha = r_\beta = r_\gamma = 1/3 ; \quad r = \sum r_i = 1$$

$$\sigma_{v_i} = \sigma_{1_i} \sqrt{r_i} = 0,58 \sigma_{1_i} = 0,58 \sigma_0 \quad (i = \alpha, \beta, \gamma)$$

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{1_i} \sqrt{r_i}} = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{v_i}{0,58 \sigma_{1_i}} = 1,73 \frac{v_i}{\sigma_{1_i}} = 1,73 \frac{v_i}{\sigma_0} \quad (i = \alpha, \beta, \gamma)$$

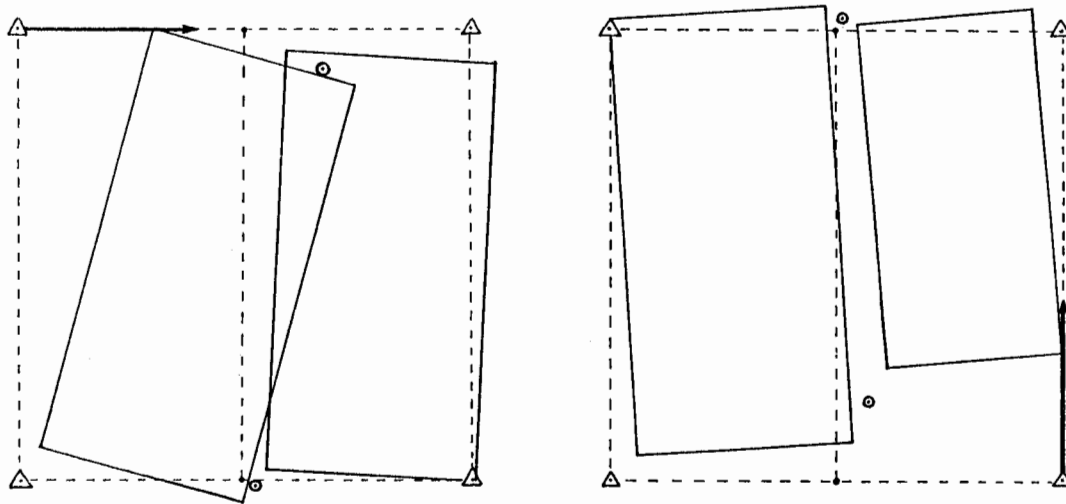
mit $k = 3$

$$|v_i|_{zul.} = 3 \sigma_{r_i} = 3 \cdot 0,58 \sigma_{1_i} = 1,64 \sigma_{1_i} = 1,64 \sigma_0 \quad (i = \alpha, \beta, \gamma)$$

nicht lokalisierbar

$$\nabla_0 l_i = \sigma_{1_i} \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} = \sigma_{1_i} \frac{4}{\sqrt{r_i}} = 6,9 \sigma_{1_i} = 6,9 \sigma_0$$

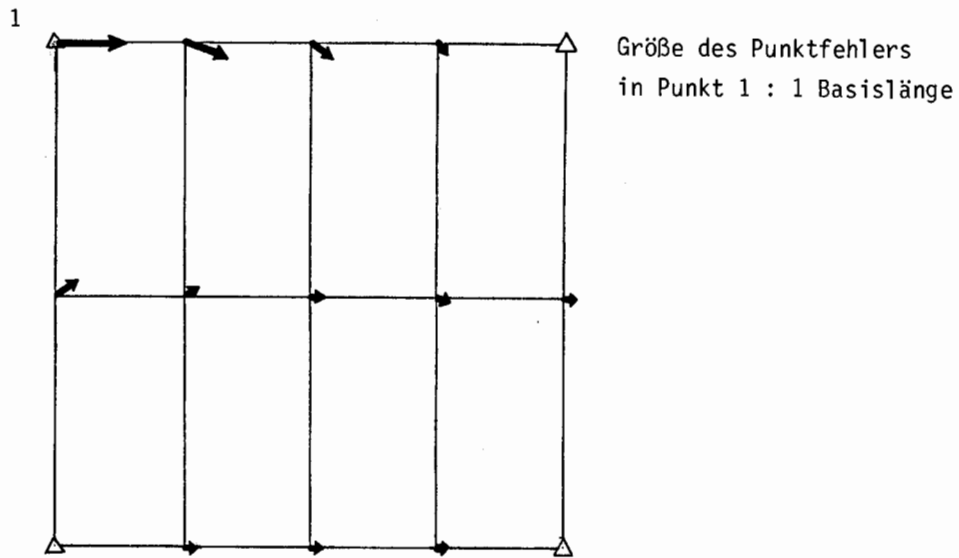
5. Beispiel für die Wirkung eines groben Fehlers in einem Lagepaßpunkt



- Modellblock Sollage
- Modellblock Istlage
- △ Paßpunkt
- ⊙ transformierter Neupunkt

(Ackermann 1966)

6. Beispiel für die Wirkung eines Paßpunktfehlers auf die Neupunkte in einem Modellblock (Ackermann, 1966)



7. Beispiel für den Einfluß eines groben Fehlers in Punkt 103 auf die Restverbesserungen eines Lageblocks (Förstner, 1976)

