

Die Abhängigkeit der Ausgleichungsergebnisse von der Genauigkeitsänderung einer Beobachtung

Von Michael Hahn und Jan van Mierlo, Karlsruhe

Summary: In a least squares adjustment the variance-covariance matrix of the observables is assumed to be known. The sensitivity of the adjustment-results with regard to a modification of the precision of one observation is derived. Special attention has been given on the implication on the outlier tests and the corresponding redundancy numbers (reliability). Applications of the formulae are discussed with respect to planning, testing and optimization of networks.

Zusammenfassung: Die Ausgleichungsrechnung setzt die Genauigkeit der Beobachtungen als vorab bestimmte oder aus Erfahrung bekannte Größe voraus, die in die Beziehungen zur Berechnung der Ausgleichungsergebnisse als Elemente der Kovarianzmatrix der Beobachtungen einfließen. Die Sensitivität der Ergebnisse bezüglich einer Änderung der gewählten Genauigkeit der Beobachtungen läßt sich mit den im folgenden abgeleiteten Beziehungen analysieren. Die Ergebnisse, dargestellt als Funktion einer Gewichts- bzw. Genauigkeitsmodifikation, dienen als Basis zur Untersuchung des Einflusses auf die Ausreißertests und die Zuverlässigkeitsmaße. Für die Anwendung der Formeln kann eine gezielte Genauigkeitsänderung z.B. bei einer Netzplanung zur Einhaltung minimaler oder maximaler Redundanzanteile im Vordergrund stehen; aber ebenso können Zweifel an der korrekten Festsetzung eines Gewichtes dominieren, deren Konsequenzen überprüft werden sollen.

1. Einleitung

Die Parameterschätzung nach der Methode der kleinsten Quadrate setzt voraus, daß die Stochastizität der Beobachtungen erfaßt ist. Die Kovarianzmatrix der Observablen wird bei der Formulierung des Modells bis auf einen Faktor als a priori fest vorgegeben betrachtet; die hieraus abgeleitete Gewichtsmatrix ist dadurch bekannt. Eine Abschwächung der Voraussetzungen ist gegeben, wenn der Beobachtungsvektor in Gruppen aufgeteilt werden kann, wobei jeder Gruppe ein Varianzfaktor zugeordnet wird. Eine Unterteilung dieser Art kann geboten sein, wenn die Anpassung der Genauigkeiten der Beobachtungsgruppen an ein einheitliches Varianzniveau infolge verschiedenartiger Beobachtungstypen (Strecken, Richtungen, ...) oder Meßinstrumente etwas problematisch ist. Hier wird häufig mittels Varianzkomponentenschätzung versucht, die Genauigkeit der Beobachtungsgruppen aufeinander abzustimmen (Pelzer 1985, S. 107 ff.).

Trotz großer Sorgfalt bei der Festsetzung der in das stochastische Modell eingehenden Genauigkeitsannahme muß man zumindest für einzelne Beobachtungen davon ausgehen, daß die im Modell formulierte Kovarianzmatrix die Realität unzureichend approximiert. Dabei ist nun weniger an die Korrelation der Beobachtungen gedacht, die wir ausschließen wollen, als vielmehr an die Vielfalt der Faktoren, die beispielsweise infolge der örtlichen Gegebenheiten (dem Geländeprofil unterhalb des Meßstrahls, eine lokale Abberation der Refraktion, Meteorologie) eine für jede Beobachtung realistische Genauigkeitseinschätzung erschweren.

Von der Änderung der Genauigkeit bzw. des Gewichts macht ein Großteil der robusten Schätzverfahren Gebrauch. Bei den robusten Methoden, deren algorithmische Lösung auf der Basis einer iterativen kleinsten-Quadrate-Schätzung gewonnen wird, steht der Versuch im Vordergrund, den Einfluß von Modellfehlern (unabhängig davon, ob es sich um fehlerhafte Beobachtungen oder fehlerhaft modellierte Varianzen handelt) auf die Parameterschätzung möglichst gering zu halten. Auf die Neugewichtung im jeweiligen Iterationsschritt wird durch die Charakteristika der robusten Methode Einfluß genommen (Huber 1981; Hahn 1985).

In diesem Beitrag wollen wir die Konsequenzen ableiten, die aus der Änderung der Genauigkeit einer Beobachtung für die Ergebnisse einer Ausgleichung folgen. In die Diskussion werden die Auswirkungen für die Teststatistiken der Ausreißertests und für die Zuverlässigkeit einbezogen.

2. Gewichtsänderung einer Beobachtung

2.1 Voraussetzungen und Grundlagen

Um die Abhängigkeit der Ergebnisse einer Ausgleichung von einer Gewichts- (bzw. Genauigkeits-)änderung der Beobachtungen untersuchen zu können, geben wir uns zwei Modelle (2.1) und (2.2) mit identischer Konfiguration vor. Wir dürfen deshalb annehmen, daß die Designmatrizen und Parametervektoren der beiden Ansätze völlig übereinstimmen; lediglich die Kovarianzmatrizen sollen voneinander abweichen.

Als Ausgangspunkt unserer Betrachtungen definieren wir die beiden Modellvarianten (Gauß-Markoff-Modell):

$$\text{Ansatz 1:} \quad E(l) = Ax, \quad D(l) = \sigma^2 P^{-1} \quad (2.1)$$

$$\text{Ansatz 2:} \quad E(l) = Ax, \quad \bar{D}(l) = \sigma^2 \bar{P}^{-1}, \quad (2.2)$$

wobei P und \bar{P} Diagonalmatrizen sind, deren Elemente die Beziehung

$$\begin{aligned} \bar{p}_i &= p_i & \forall i = 1, n \setminus k \\ &= t \cdot p_i & \forall i = k, \quad t > 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Das Gewicht der k -ten Beobachtung soll um den Faktor t herauf- bzw. herabgesetzt werden. Die Gewichtsmatrizen der beiden Ansätze lassen sich gemäß

$$\bar{P} = P + (t - 1) p_k e_k e_k^T \quad (2.3)$$

ineinander überführen. Für die Designmatrix A setzen wir vollen Spaltenrang voraus ($\text{Rg}(A) = u$); die Gewichtsmatrizen P und \bar{P} sind positiv definit, solange $t \in R^+$ gilt. Die Sonderfälle, daß t gegen Null und unendlich strebt, wollen wir zum Schluß des Kapitels diskutieren. e_k steht für den Einheitsvektor, dessen k -te Komponente durch eine 1 besetzt ist; entsprechend hat die Matrix $e_k e_k^T$ bis auf das k -te Diagonalelement ausschließlich Null-elemente.

Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate erhält man die Ergebnisse der Parameterschätzung aus den bekannten Beziehungen (formuliert für Ansatz 1):

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \hat{x} &= Q_{\hat{x}} A^T P l \\ \text{(b)} \quad Q_{\hat{x}} &= (A^T P A)^{-1} \\ \text{(c)} \quad v &= A \hat{x} - l = -Q_v P l \\ \text{(d)} \quad Q_v &= P^{-1} - A Q_{\hat{x}} A^T \\ \text{(e)} \quad \Omega &= v^T P v = l^T P Q_v P l. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Die geschätzten Größen der Parameter \hat{x} , des Verbesserungsvektors v und der Verbesserungsquadratsumme Ω , sowie die Gewichtskoeffizientenmatrizen $Q_{\hat{x}}$ und Q_v , können wir völlig analog zu den Beziehungen (2.4) auch für den Modellansatz 2 formulieren. Zur Unterscheidung zwischen den Ergebnissen werden alle unter (2.2) abgeleiteten Größen mit einem Querstrich versehen. Entsprechend (2.4 a-e) erhält man die Beziehungen für

$$\bar{x}, \quad \bar{Q}_{\hat{x}}, \quad \bar{v}, \quad \bar{Q}_v, \quad \bar{\Omega}, \quad (2.5 \text{ a-e})$$

wobei die Gewichtsmatrix P durch \bar{P} zu ersetzen ist.

2.2 Abhängigkeit der Ergebnisse von der Gewichtsmodifikation

Die Ergebnisse des zweiten Modellansatzes (2.5) wollen wir als Funktion der Ergebnisse des ersten, des „ursprünglichen“ Ansatzes (2.4) darstellen. Damit läßt sich der Einfluß einer

Gewichtsänderung, bezogen auf die bekannten Größen einer Ausgleichung, angeben, bzw. die Ergebnisse (2.5) können ohne eine zweite Ausgleichung gewonnen werden. Für die geschätzten Parameter und deren Kovarianzmatrix hat *Wolf* schon 1961 (*Wolf* 1961, S. 361, Gln. (3) und (4)) den Einfluß einer Gewichtsänderung abgeleitet.

Die Normalgleichungsmatrizen $N = A^T P A$ und $\bar{N} = A^T \bar{P} A$ erfüllen mit (2.3) und $A^T e_k = a_k$ die Beziehung

$$\bar{N} = N + (t-1) p_k a_k a_k^T. \quad (2.6)$$

Die Inversion des Gleichungssystems kann mit Hilfe der Neumannschen Reihe vorgenommen werden (z. B. *Bähr* 1973; *Heck* 1981; *Eeg* 1984; u. a. m.). Am einfachsten kommt man durch Anwendung der bekannten, nach Frobenius und Schur benannten Matrizenformel (auch als Identität von Frobenius/Schur/Woodbury bezeichnet)

$$(G + B D C)^{-1} = G^{-1} - G^{-1} B (D^{-1} + C G^{-1} B)^{-1} C G^{-1} \quad (2.7)$$

zum Ziel, die reguläre Matrizen G und D sowie $(D^{-1} + C G^{-1} B)$ voraussetzt (*Zurmühl* und *Falk* 1984, S. 308). Durch die Zuweisung

$$G = N, \quad B = p_k(t-1) a_k, \quad D = 1, \quad C = a_k^T,$$

in der D eine skalare Größe ist und B und C Vektoren sind, ist die Regularitätsbedingung eingehalten, so daß sich die Inverse \bar{N}^{-1} angeben läßt

$$\bar{N}^{-1} = N^{-1} - p_k(t-1) N^{-1} a_k (1 + p_k(t-1) a_k^T N^{-1} a_k)^{-1} a_k^T N^{-1}. \quad (2.8)$$

Mit der bekannten Definition des Redundanzanteils r_k (Ansatz 1)

$$r_k = (Q_v P)_{kk} = 1 - a_k^T Q_{\hat{x}} a_k p_k, \quad (2.9)$$

dem Maß, das die Kontrollierbarkeit der Beobachtung l_k durch die restlichen Beobachtungen des Netzes zum Ausdruck bringt, vereinfacht sich die Beziehung (2.9). Man erhält mit (2.4b) und (2.5b) $\bar{Q}_{\hat{x}}$ gemäß

$$\bar{Q}_{\hat{x}} = Q_{\hat{x}} - c_t Q_{\hat{x}} a_k a_k^T Q_{\hat{x}}, \quad (2.10 a)$$

wobei die Einführung des Faktors c_t

$$c_t = \frac{p_k(t-1)}{1 + (t-1)(1-r_k)} = \frac{p_k(t-1)}{r_k + t(1-r_k)} \quad (2.10 b)$$

sich für die weiteren Ableitungen als vorteilhaft erweist. Mit (2.10) haben wir die Basisbeziehung gewonnen, die zur Verknüpfung der Ergebnisse von (2.4) und (2.5) benötigt wird. Da der Redundanzanteil einer Beobachtung bekanntlich nur Werte aus dem Intervall $[0, 1]$ annehmen kann, ist der Nenner in (2.10b) für $t > 0$ (Definitionsbereich von t) eine stets positive Größe. Die geschätzten Parameter

$$\bar{\hat{x}} = \bar{Q}_{\hat{x}}^{-1} A^T \bar{P} l \quad (2.5 a)$$

lassen sich mit (2.3) und (2.10) durch geeignetes Zusammenfassen (unter Beachtung von (2.4a, c) und (2.9)) gemäß

$$\bar{\hat{x}} = \hat{x} - c_t v_k Q_{\hat{x}} a_k \quad (2.11)$$

berechnen, worin v_k die Verbesserung der k -ten Beobachtung bezeichnet. Die einfache Gleichung (2.11) gestattet, mit (2.5c) die Abhängigkeit des Verbesserungsvektors \bar{v} von den Größen des 1. Modells direkt anzugeben

$$\bar{v} = v - c_t v_k A Q_{\hat{x}} a_k. \quad (2.12)$$

Ebenso einfach ist die Abhängigkeit zwischen den Gewichtskoeffizientenmatrizen der ausgleichenen Beobachtungen zu ermitteln:

$$\bar{Q}_l = A \bar{Q}_{\hat{x}} A^T = Q_l - c_t Q_l e_k e_k^T Q_l. \quad (2.13)$$

Zur Berechnung von

$$\bar{Q}_v = \bar{P}^{-1} - \bar{Q}_l \quad (2.5 d)$$

ist die Inversion von (2.3) erforderlich; die Lösung kann in der Form

$$\bar{P}^{-1} = P^{-1} - \frac{t-1}{t p_k} e_k e_k^T \quad (2.14)$$

dargestellt werden. Ein Beweis hierfür ist durch Anwendung der Matrizenformel (2.7) leicht zu führen. Ordnen wir den Matrizen G, B, D, C (2.7) die Größen $G = P, B = (t-1) p_k e_k, D = 1, C = e_k^T$ zu, so existieren für $t \in R^+$ alle Inversen, die auf der rechten Seite der Gleichung (2.7) auftreten. Durch Umformung erhält man die Beziehung (2.14). Da $\bar{P}\bar{P}^{-1} = I$ gilt (Einheitsmatrix I), kann der Beweis einfach auch durch Einsetzen von (2.3) und (2.14) geführt werden. Die Kofaktorenmatrix \bar{Q}_v ist mit (2.13) und (2.14) als Funktion der Größen des ersten Modells bekannt.

Schließlich bleibt noch die quadratische Form der Residuen $\bar{\Omega}$ als Funktion von (2.4) zu formulieren; es besteht der Zusammenhang

$$\bar{\Omega} = \Omega + c_t \cdot v_k^2, \quad (2.15)$$

der mit (2.3) und (2.12) aus (2.5 e) folgt (siehe Hinweise in Kapitel 3). Alle Ergebnisse des zweiten Modellansatzes sind als Funktion der Größen dargestellt, die nach einer Ausgleichung der unter Ansatz 1 formulierten Aufgabe bekannt sind.

2.3 Sonderfälle der Gewichtsänderung

In Abschnitt (2.1) wurde der Definitionsbereich für den Faktor t der Gewichtsmodifikation auf $t \in R^+$ beschränkt. Betrachtet man nun den Grenzübergang $t \rightarrow 0$, so wird die Gewichtsmatrix \bar{P} (2.3) positiv semidefinit. Die Varianz der Beobachtung l_k strebt unter Ansatz 2 gegen unendlich, d.h. die Beobachtung l_k übt keinen Einfluß auf die Ausgleichungsergebnisse ($\bar{p}_k \rightarrow 0$) aus. Die Forderung, daß alle Inversen in Gleichung (2.8) existieren, bedingt, daß der Nenner in (2.10 b) von Null verschieden sein muß. Diese Bedingung zieht für t gegen Null die Forderung nach sich, den Redundanzanteil $r_k > 0$ vorauszusetzen. Die Einschränkung ist notwendig, da $t=0$ die Elimination des Einflusses einer Beobachtung auf die Ausgleichung bewirkt, was einem Streichen der Beobachtung a priori gleichkommt. Eine nichtredundante Beobachtung ($r_k = 0$) zu streichen hat aber einen Konfigurationsdefekt zur Folge. Für $t=0$ gehen die in Abschnitt 2.2 angegebenen Gleichungen über in die in Heck (1981, S. 21–25) formulierten Beziehungen.

Einen trivialen Sonderfall stellt die Wahl $t=1$ dar. Es wird keine Gewichtsmodifikation durchgeführt, da die Ansätze 1 und 2 identisch sind. Neben $t \rightarrow 0$ wollen wir den Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ betrachten. Das Gewicht \bar{p}_k (2.2) strebt gegen unendlich, bzw. die Varianz der Beobachtung l_k im Ansatz 2 gegen Null. Für die Ausgleichung hat das zur Folge, daß die Schätzung $\bar{l}_k = l_k + \bar{v}_k$ mit der Beobachtung l_k übereinstimmt. Die geschätzten Parameter erfüllen die an die Beobachtung geknüpfte Restriktion; für eine Strecke (2-dim. Netz ohne Maßstabsunbekannte und Additionskonstantenschätzung) bedeutet das, daß die ausgeglichene Lage der Endpunkte einer Strecke sich um die Distanz des gemessenen Wertes l_k unterscheiden. Der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} c_t$ strebt gegen $1/(\bar{Q})_{kk}$, den Kehrwert des

k -ten Diagonalelements der Gewichtskoeffizientenmatrix der ausgeglichenen Beobachtungen \bar{l} . Das hat Konsequenzen wie z. B. $\bar{v}_k = 0$ (siehe 4.2 b) zur Folge, die wir nicht weiter ausdiskutieren brauchen.

3. Änderung der Metrik des Beobachtungsvektors

Die beiden Modellansätze (2.1) und (2.2) wollen wir in einen allgemeineren Zusammenhang stellen. Der Beobachtungsvektor l gehört einem n -dimensionalen euklidischen Raum an, der durch die positiv definiten Kovarianzmatrizen $D(l)$ und $\bar{D}(l)$ mit unterschiedlicher Metrik versehen ist. Auf die Voraussetzung (2.3) wollen wir nun verzichten. Für eine fest vorgegebene Designmatrix $A(n \times u)$ mit Rang $\text{Rg}(A) = p \leq u$ kann der orthogonale Projektionsoperator für die orthogonale Projektion des n -dimensionalen euklidischen Raumes auf den Spaltenraum $R(A)$ beziehungsweise $R(A)^\perp$ bezüglich des durch $y^T P z$ definierten Skalarproduktes angegeben werden gemäß

$$R = A(A^T P A)^{-1} A^T P \quad \text{bzw.} \quad M = I - R$$

(Koch 1980, S. 63). R und M stellen die Kovarianzmatrizen der ausgeglichenen Beobachtungen bzw. der Residuen dar. Durch $(A^T P A)^{-}$ ist eine generalisierte Inverse der Normalgleichungsmatrix bezeichnet. Entsprechend erhalten wir nun die Projektionsoperatoren

$$\bar{R} = A(A^T \bar{P} A)^{-} A^T \bar{P} \quad \text{bzw.} \quad \bar{M} = I - \bar{R},$$

wenn wir die Metrik des Vektorraumes der Beobachtungen durch $\bar{D}(l)$ festlegen. Die Orthogonalität der Projektionsoperatoren \bar{R} bzw. \bar{M} ist an das Skalarprodukt $y^T \bar{P} z$ gebunden. Von den Eigenschaften der Projektoren wird insbesondere bei der S -Transformation, der Transformation von Koordinaten, Kovarianz- oder Kriteriummatrix der Koordinaten auf (oder in) ein (anderes) Datum Gebrauch gemacht (van Mierlo 1980; Illner 1985).

Die Verbesserungen und ausgeglichenen Beobachtungen, die sich auf $\bar{D}(l)$ beziehen, wollen wir mit \bar{v} und \bar{l} bezeichnen. Es gilt

$$v = M \bar{v} \quad (= M v), \tag{3.1}$$

d.h. die Transformation der Residuen \bar{v} mit dem Projektor M kommt dem Übergang auf eine andere Metrik des Beobachtungsraumes gleich, die durch $D(l)$ festgelegt ist. Die Kovarianzmatrix $\bar{D}(l)$ braucht dabei nicht bekannt zu sein. Die orthogonale Projektion des Beobachtungsvektors l mit den Projektoren R und \bar{R} auf den Spaltenraum $R(A)$ liefert die Schätzungen \hat{l} bzw. $\bar{\hat{l}}$. Transformiert man diese Schätzungen mit R oder \bar{R} , so gilt

$$R \bar{\hat{l}} = \bar{R} \hat{l} = \hat{l}$$

(entsprechendes für $\bar{\hat{l}}$), d.h. die Transformation bleibt für die ausgeglichenen Beobachtungen ohne Auswirkung, was geometrisch aus Abb. 1 sofort ersichtlich ist. Die Vektoren $\hat{l}(\bar{\hat{l}})$ liegen im Spaltenraum $R(A)$, so daß durch die Projektionsoperatoren R bzw. \bar{R} kein Einfluß auf die ausgeglichenen Beobachtungen ausgeübt werden kann. Von Nutzen ist (3.1) bei der Berechnung von $\bar{\Omega}$ (2.15), denn mit $\bar{v} = \bar{Q}_v \bar{P} v$ und $\bar{v}^T = \bar{v}^T \bar{P} \bar{Q}_v$ (jeweils nach (3.1)) gilt

$$\bar{\Omega} = \bar{v}^T \bar{P} \bar{v} = \bar{v}^T \bar{P} \bar{Q}_v \bar{P} v = \bar{v}^T \bar{P} v,$$

wodurch die Ableitung von (2.15) etwas vereinfacht wird. Geben wir uns mit $D^{(i)}(l)$ unterschiedliche Kovarianzmatrizen für die Beobachtungen vor, so gilt für die zugehörigen Projektoren $M^{(i)}$

$$M^{(i)} = M^{(i)} \cdot M^{(k)} \cdot \dots$$

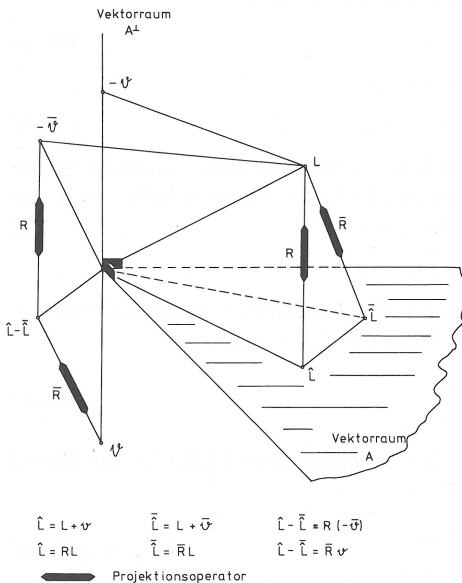


Abb. 1. Geometrische Darstellung der verschiedenen Projektionen

und für die Projektoren $R^{(i)}$ die Beziehung

$$R^{(i)} = \dots \cdot R^{(k)} \cdot R^{(i)}. \tag{3.2}$$

Ferner sind die Matrizenprodukte $M^{(i)}R^{(i)}$ und $R^{(i)}M^{(i)}$ identisch Null, eine Eigenschaft, die bei unterschiedlicher Metrikfestsetzung im allgemeinen

$$\begin{aligned} M^{(i)}R^{(k)} &= R^{(k)} - R^{(i)}R^{(k)} = R^{(k)} - R^{(k)} = 0 \\ R^{(i)}M^{(k)} &= R^{(i)} - R^{(i)}R^{(k)} = R^{(i)} - R^{(k)} \neq 0 \end{aligned}$$

für das zweite Matrizenprodukt nicht mehr gilt. Auf eine weiterführende Diskussion wollen wir an dieser Stelle verzichten.

4. Einfluß der Gewichtsmodifikation auf den Ausreißertest

Aufbauend auf die in Kapitel 2 abgeleiteten Beziehungen wollen wir spezielle Aspekte, zunächst den Einfluß der Gewichtsänderung auf die Teststatistiken der Ausreißertests betrachten. Die Theorie des Tests einer linearen Hypothese führt durch die Formulierung von Null- und Alternativhypothese zur Aufstellung von Teststatistiken, deren statistische Verteilung bekannt ist. Die Testgröße, die als Funktion der Beobachtungen berechnet wird, dient zur Überprüfung des Modells und Aufdeckung möglicher Modellfehler. Für die Grundlagen sei auf Lehrbücher (Graybill 1976; Koch 1980) verwiesen. Die Ausreißertests, mit denen ein grober Fehler in den Beobachtungen aufgedeckt werden soll, enthalten alle die gewichtete Verbesserung

$$v_i / \sqrt{q_{v_{ii}}}, \tag{4.1}$$

in der $q_{v_{ii}}$ das i -te Diagonalelement der Q_v -Matrix bedeutet. Vorauszusetzen ist in (4.1), daß $q_{v_{ii}} > 0$ gilt, was bei unkorrelierten Beobachtungen der Forderung $r_i > 0$ gleichkommt. Redundante Beobachtungen sind notwendig, um Ausreißertests durchführen zu können. Durch Normierung des gewichteten Residuums mit dem Faktor σ erhält man die Testgröße des data-snooping, die unter der Nullhypothese standardnormalverteilt ist. Ist der Varianzfaktor σ^2 a priori nicht bekannt, kann ausschließlich eine Schätzung von σ zur Normierung verwendet werden, woraus die Student- bzw. Tau-verteilten Testgrößen folgen. Um die Abhängigkeit des gewichteten Residuums von einer Gewichtsmodifikation ausdrücken zu können, benötigen wir die Elemente \bar{v}_i, \bar{r}_i bzw. $\bar{q}_{v_{ii}}$ des Vektors \bar{v} und der Matrizen \bar{Q}_v, \bar{P} bzw. \bar{Q}_v, \bar{P} .

Für die Verbesserungen \bar{v}_i nach der Umgewichtung erhalten wir aus (2.12)

$$\bar{v}_i = v_i + c_t v_k q_{v_{ik}} \quad \forall i \neq k, \tag{4.2 a}$$

wobei für das Nebendiagonalelement $q_{v_{ik}} = -a_i^T Q_{\hat{x}} a_k$ gilt und

$$\bar{v}_k = c_0 v_k \quad \forall i = k, \tag{4.2 b}$$

in dem die Abkürzung $c_0 := (r_k + t(1 - r_k))^{-1}$ verwendet wird. Die uns interessierenden Redundanzanteile \bar{r}_i (zur Definition des Redundanzanteils siehe (2.9)) erhalten wir auf Grund von (2.13, 2.14) und (2.5 d) als Diagonalelemente aus \bar{Q}_v, \bar{P}

$$\bar{Q}_v \bar{P} = (I - c_t Q_f e_k e_k^T) Q_v P,$$

wobei wir wiederum die Fallunterscheidung in die von der Genauigkeitsmodifikation betroffenen ($i = k$) und nicht betroffenen ($i \neq k$) Beobachtungen (2.2) vornehmen:

$$\begin{aligned} \bar{r}_i &= r_i + c_t p_i q_{v_{ik}}^2 \quad \forall i \neq k \\ \bar{r}_k &= c_0 r_k \quad \forall i = k. \end{aligned} \tag{4.3 a, b}$$

Die Beziehungen für die Gewichtungskoeffizienten $\bar{q}_{v_{ii}}$ der Verbesserungen können auf Grund der Formeln (4.3) und (2.2) direkt angegeben werden:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{v_{ii}} &= q_{v_{ii}} + c_t q_{v_{ik}}^2 \quad \forall i \neq k \\ \bar{q}_{v_{kk}} &= (c_0/t) q_{v_{kk}} \quad \forall i = k. \end{aligned} \tag{4.4 a, b}$$

Das Rüstzeug zur Untersuchung des Einflusses der Gewichtsmodifikation auf den Ausreißertest steht uns mit den Formeln (4.2)–(4.4) zur Verfügung. Zunächst überraschend ist, daß für den Quotienten \bar{v}_k/\bar{r}_k , mit dem die Größe eines vermuteten groben Fehlers in der k -ten Beobachtung geschätzt werden kann, gilt

$$\bar{v}_k/\bar{r}_k = v_k/r_k. \quad (4.5)$$

Das bedeutet, daß die Schätzung für einen groben Fehler in der Beobachtung l_k bezüglich einer Gewichtsänderung $\bar{p}_k = t \cdot p_k$ dieser Beobachtung *invariant* ist. Für $i \neq k$ gilt diese Invarianzeigenschaft allgemein allerdings nicht. Da die Schätzung $\bar{l}_k^{(k)}$, die sich ergibt, wenn die k -te Beobachtung an der Ausgleichung nicht teilnimmt, von l_k gerade um v_k/r_k abweicht, ist die Eigenschaft der Gewichtsinvarianz gemäß (4.5) für den Schätzwert eines groben Fehlers leicht verständlich.

Betrachten wir das gewichtete Residuum (4.1) nach der Umgewichtung, erhalten wir aus (4.2 b) und (4.4 b) für $i = k$

$$\bar{v}_k/\sqrt{\bar{q}_{v_{kk}}} = \sqrt{c_0 t} \cdot v_k/\sqrt{q_{v_{kk}}}. \quad (4.6)$$

Für $i \neq k$ ist der Quotient aus (4.2 a) und der Wurzel aus (4.4 a) durch Umformung nicht mehr wesentlich zu vereinfachen. Die Testgröße des data-snooping kann durch Normierung des gewichteten Residuums mit σ a priori berechnet werden; die Abhängigkeit dieser Testgröße von der Umgewichtung ist entsprechend (4.6) durch den Wurzelausdruck $\sqrt{c_0 t}$ festgelegt. Zur Berechnung der studentisierten Testgröße wird die Schätzung

$$\bar{\sigma}_{(k)}^2 = (\bar{\Omega} - \bar{v}_k^2/\bar{q}_{v_{kk}})/(r-1) \quad (4.7)$$

benötigt (Heck 1981). Mit (2.15), (4.2) und (4.4) erhält man

$$\bar{\Omega} - \bar{v}_k^2/\bar{q}_{v_{kk}} = \Omega - v_k^2/q_{v_{kk}}.$$

Da die Redundanz r , d.h. die Differenz zwischen der Anzahl der Beobachtungen und der Anzahl der Parameter von der Wahl der Gewichtsmatrix unabhängig ist, sind die Schätzwerte

$$\bar{\sigma}_{(k)}^2 = \hat{\sigma}_{(k)}^2$$

der beiden Modellvarianten (2.1) und (2.2) identisch, wie aus (4.7) folgt. Die durch Normierung in (4.6) mit diesen Schätzwerten erhaltene Abhängigkeit der studentverteilten Testgrößen ist ebenfalls durch den Wurzelausdruck $\sqrt{c_0 t}$ festgelegt.

Wir definieren die *Einflußfunktion* $\varkappa(t, r_k)$ auf die Testgröße des Ausreißertests für die von der Gewichtsmodifikation betroffene Beobachtung l_k

$$\varkappa(t, r_k) := \sqrt{c_0 t} = \left(1 + \left(\frac{1-t}{t}\right) r_k\right)^{-1/2}, \quad (4.8)$$

die sowohl für das data-snooping als auch für die der Studentverteilung folgenden Testgrößen gilt und nur vom Umgewichtungsfaktor t und Redundanzanteil r_k abhängig ist. Etwas Einblick in die Abhängigkeit von $\varkappa = \varkappa(t, r_k)$ gibt Tabelle 1.

Tabelle 1. Funktionswerte der Einflußfunktion $\varkappa(t, r_k)$ auf die Testgrößen der Ausreißertests für die Beobachtung l_k

t	0,01	0,1	0,5	0,8	1,2	2,0	10,0	100,0	$t \rightarrow \infty$
r_k									
0,01	0,71	0,96	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01
0,1	0,30	0,73	0,95	0,99	1,01	1,03	1,05	1,05	1,05
0,3	0,18	0,52	0,88	0,96	1,03	1,08	1,17	1,19	1,20
0,8	0,11	0,35	0,75	0,91	1,07	1,29	1,89	2,19	2,24
$r_k \rightarrow 1$	0,10	0,32	0,71	0,89	1,10	1,41	3,16	10,0	—

Da die Varianz einer Beobachtung umgekehrt proportional zum Gewicht ist, hat die zu optimistisch angenommene Genauigkeit einer Beobachtung ($\bar{\sigma}_{l_k} < \sigma_{l_k}$) zur Folge, daß deren Testgröße zu groß ausfällt (siehe $t > 1$). Entsprechend gilt auch für $t < 1$, daß die zugehörige Testgröße zu gering ausfällt. Weiterhin ist aus Tabelle 1 leicht ersichtlich, daß die Testgrößen schlecht kontrollierbarer Beobachtungen ($r_k = 0,01$) sehr viel weniger empfindlich auf eine Änderung der a priori angenommenen Beobachtungsgenauigkeit (bzw. des Gewichts) reagieren, als die Testgrößen der gut kontrollierbaren Beobachtungen ($r_k = 0,3$ und $r_k = 0,8$). Im Bereich $0,8 \leq t \leq 1,2$ bleibt die Änderung der Testgröße unter rund 10% (siehe auch Kapitel 6). Die Ergebnisse dieses Abschnitts wollen wir in einem Satz zusammenfassen:

Satz 1:

Für die Beobachtung l_k sei durch $\bar{p}_k = t \cdot p_k$ eine Umgewichtung vorgesehen. Dann gilt für die der Normalverteilung (data-snooping) und der Studentverteilung (t-Test) folgenden Testgrößen $T = v_k / \sqrt{q_{v_k}} / \sigma$ (bzw. $\hat{\sigma}_{(k)}$), daß die Abhängigkeit der Testgrößen von der Umgewichtung durch die Einflußfunktion $\kappa(t, r_k)$ (4.8) beschrieben werden kann. Die Schätzung eines groben Fehlers durch den Quotienten v_k / r_k ist eine bezüglich einer Gewichtsänderung von l_k invariante Größe.

5. Die Zuverlässigkeit unter dem Aspekt der Gewichtsänderung

Die Zuverlässigkeit oder Sensitivität eines Netzes gegenüber Ausreißern resultiert aus der Trennung von Nullhypothese (H_0 : kein grober Fehler) und Alternativhypothese (H_a : ein grober Fehler in Beobachtung l_i). Die Charakterisierung durch Maße der inneren Zuverlässigkeit geschieht durch Betrachtung der Mindestgröße eines mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit (Güte β) aufdeckbaren Fehlers; für die äußere Zuverlässigkeit wird dieser Grenzwert verwendet, um dessen Auswirkung auf die Parameter oder daraus abgeleitete Funktionen abzuschätzen. Eine ausführliche Diskussion der Konsequenzen für die Zuverlässigkeitsmaße, wie sie in van Mierlo und Hahn (1986) für die Elimination einer Beobachtung(-sgruppe) diskutiert wird, wollen wir hier nicht anstellen. Da sowohl der Grenzwert für einen mit dem data-snooping nach Baarda nicht aufdeckbaren Fehler

$$\nabla_0 l_i = \frac{1}{\sqrt{r_i}} \cdot \delta_0 \sigma_{l_i}$$

in der i -ten Beobachtung als auch die Abschätzung des Einflusses auf eine beliebige Funktion (äußere Zuverlässigkeit)

$$\nabla_0 F(\hat{x}) \leq \bar{\delta}_0 \sigma_F$$

mit dem Einflußfaktor $\bar{\delta}_0$ (Förstner 1979) sehr stark vom Redundanzanteil abhängen, wollen wir uns auf den Redundanzanteil als charakteristische Größe der Zuverlässigkeit (Maß der Kontrollierbarkeit) konzentrieren.

Die Redundanz der Beobachtung l_k , für die eine Gewichtsänderung betrachtet wird, folgt der Beziehung (4.3 b)

$$\bar{r}_k = c_0 r_k \quad \text{mit} \quad c_0 = (r_k + t(1 - r_k))^{-1}$$

(siehe Kapitel 4). Der Faktor c_0 ist größer als 1, wenn das Gewicht von l_k herabgesetzt wird ($t < 1$) und kleiner als 1, wenn das Gewicht von l_k erhöht wird ($t > 1$). Müller (1986) hat den Zusammenhang (4.3 b) genutzt, um bei der Optimierung die Zuverlässigkeit zu berücksichtigen. Beobachtungen mit zu geringer Redundanz r_k können auf eine untere Schranke $\bar{r}_k = r_{\min}$ heraufgesetzt werden; daraus folgt der Faktor t

$$t = \bar{p}_k / p_k = \frac{r_k(1 - \bar{r}_k)}{\bar{r}_k(1 - r_k)} \quad (5.1)$$

durch Umformung von (4.3 b), bzw. das verminderte Gewicht \bar{p}_k , das als Restriktion in den Optimierungsalgorithmus einfließt (Müller 1986, S. 160, Formel (16)).

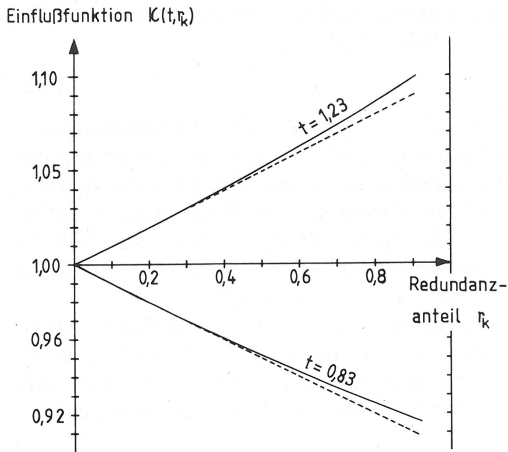


Abb. 4. Einfluß der Genauigkeitsänderung einer Beobachtung um $\pm 10\%$ auf die Testgröße des Ausreißertests dieser Beobachtung

In Abb. 3 sind die Redundanzanteile der Strecken eingetragen, die sich aus der Diagnose-Ausgleichung (Netzplanung) ergeben, wenn für die Streckenmessung mit dem ME 3000 der Genauigkeitsansatz

$$\sigma_s = a + b \cdot s, \quad a = 0,3 \text{ mm}, \quad b = 1 \text{ ppm}$$

vorgegeben wird. Für die Konfiguration dieses Beispiels sind Streckenmessungen in verschiedenen Meßbereichen und Hin- und Rückmessung von Strecken nicht berücksichtigt.

Wir setzen voraus, daß der Genauigkeitsansatz (stochastisches Modell) und die „stochastische Realität“ einer Beobachtung um nicht mehr als $\pm 10\%$ voneinander abweichen. Diese Abweichungen bezüglich der Beobachtungsgenauigkeit haben

$$t = (1/0,9)^2 = 1,23 \quad (\text{bei } -10\%)$$

$$t = (1/1,1)^2 = 0,83 \quad (\text{bei } +10\%)$$

zur Konsequenz. Der Einfluß auf die Testgrößen gemäß (4.8) ist in Abb. 4 dargestellt, wobei der maximale und minimale Redundanzanteil des Streckennetzes (21%, 70%, siehe Abb. 3) die obere bzw. untere Schranke festlegen. Der Graph (Abb. 4) macht deutlich, was sich durch Reihenentwicklung von (4.8) bestätigen läßt: Der von der Genauigkeitsänderung einer Beobachtung um $\pm 10\%$ auf die Testgröße des Ausreißertests dieser Beobachtung ausgeübte Einfluß fällt bzw. wächst nahezu linear mit dem Redundanzanteil r_k und kann hinreichend genau mit dem Faktor $(1 \mp r_k/10)$ abgeschätzt werden.

Um den Einfluß der Genauigkeitsänderung auf die Kontrollierbarkeit studieren zu können, müssen die Korrelationskoeffizient der Verbesserungen berechnet werden. Von den $\binom{2}{2}$ Korrelationskoeffizienten sind die drei betragsgrößten in Abb. 3 eingezeichnet. Ca. 60% der Verbesserungen sind weniger als 20% korreliert; in den Intervallen (0,20–0,40) liegen jeweils ca. 20% der Korrelationskoeffizienten (betragsmäßig). Will man die Kontrollierbarkeit des Netzes erhöhen, z. B. indem $r_{\min} = 0,30$ gefordert wird, lassen sich mit (5.1) die Gewichte der betroffenen Beobachtungen neu festlegen. Eine Abschätzung der gegenseitigen Beeinflussung gemäß (5.2) führt zu Werten von maximal (5–10)% der Redundanzanteile r_i . Eine geringfügige Überkorrektur bei der Neugewichtung reicht damit schon aus, um den Zuverlässigkeitsaspekt bei der Netzplanung in einem Iterationsschritt zu berücksichtigen.

Dank: Die Verfasser danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung.

Literatur

Bähr, H. G.: Zum Ausgleichsverfahren bei der Ergänzung bestehender geodätischer Netze. DGK, Reihe C, Nr. 187, München 1973.

Eeg, J.: On the adjustment of observations in the presence of blunders. Unpublished report, Danisch Geodetic Institut, Copenhagen 1984.

Förstner, W.: Das Rechenprogramm TRINA für geodätische Lagenetze in der Landesvermessung. Nachr. aus dem öff. Verm.-dienst des Landes Nordrhein-Westfalen, Heft 2, 125–166, 1979.

Hahn, M.: Comparison of Different Methods and Strategies for Detecting Outliers in Data. 7. IAG Symposium, Cracow 1985.

- Heck, B.*: Der Einfluß einzelner Beobachtungen auf das Ergebnis einer Ausgleichung und die Suche nach Ausreißern in den Beobachtungen. *Allg. Verm. Nachr.* 88, 17–34, 1981.
- Huber, P. J.*: *Robust statistics*. John Wiley & Sons, New York 1981.
- Illner, I.*: Datumsfestlegung in freien Netzen. DGK, Reihe C, Nr. 309, München 1985.
- Mälzer, H.*: Kriechende Spannungsumwandlungen: Rezente vertikale und horizontale Bewegungen. In: Sonderforschungsbereich 108 „Spannung und Spannungsumwandlung in der Lithosphäre“, Universität Karlsruhe, Berichtsband 1981–1983, 1983.
- Mälzer, H.*: Sonderforschungsbereich 108 „Stress and Stress Release in the Lithosphere“ – geodetic contribution. *Allg. Verm. Nachr. International Edition*, Vol. 2, 48–54, 1985.
- Müller H.*: Zur Berücksichtigung der Zuverlässigkeit bei der Gewichtsoptimierung geodätischer Netze. *ZfV* 109, 157–169, 1986.
- Pelzer, H.*: *Geodätische Netze in der Landes- und Ingenieurvermessung II.* (Hrsg.), Vorträge des Kontaktstudiums Februar 1985 in Hannover. K. Wittwer, Stuttgart 1985
- van Mierlo, J.*: *Free Network Adjustment and S-Transformations*. DGK, Reihe B, Nr. 252, München 1980.
- van Mierlo, J. und Hahn, M.*: Konsequenzen für die Zuverlässigkeitsmaße infolge der Elimination von Beobachtungen. Erscheint in: *Allgem. Verm. Nachr.* 1986.
- Wolf, H.*: Der Einfluß von Gewichtsänderungen auf die Ausgleichungsergebnisse. *ZfV* 86, 361–362, 1961.
- Zurmühl, R. und Falk, S.*: *Matrizen und ihre Anwendungen*. Teil 1: Grundlagen. Springer-Verlag, Berlin 1984.