

Von E. Stark, Stuttgart

1. Einleitung

Bei Aerotriangulationsverfahren mit unabhängigen Modellen dient das Einzelmodell als Grundelement für größere Verbände, nämlich Streifen und Blöcke. Trotz der fundamentalen Bedeutung, die das Modell in diesem Zusammenhang besitzt, werden seine Genauigkeitseigenschaften in der Regel nicht berücksichtigt. Dies gilt sowohl für praktische Ausgleichungen als auch für theoretische Genauigkeitsuntersuchungen. Die Gründe für dieses Vorgehen dürften darin zu suchen sein, daß bis heute über die Genauigkeitsstruktur im Modell noch keine umfassenden Kenntnisse vorhanden sind und außerdem der zu erwartende Genauigkeitserfolg bei ihrer Berücksichtigung als nicht wirklich entscheidend betrachtet wurde.

Der zweite Punkt kann heute nicht mehr akzeptiert werden, da es möglich ist, durch entsprechende Aufnahme-, Meß- und Rechenverfahren eine außerordentlich hohe Genauigkeit zu erreichen, die signifikant unter 10 Mikron im Bildmaßstab liegt (z.B. Ackermann [1]). Dadurch erschließen sich für die Aerotriangulation Anwendungsmöglichkeiten, die höchste Genauigkeit verlangen, wie z.B. die Verdichtung geodätischer Netze niederer Ordnung. In diesen Fällen ist es nicht unwichtig, jede sich bietende Möglichkeit zur Genauigkeitssteigerung auszuschöpfen. Die Berücksichtigung der Genauigkeitsstruktur im Einzelmodell könnte eine dieser Möglichkeiten sein.

Aber auch vom theoretischen Standpunkt aus ist es wünschenswert, die Genauigkeit im Modell möglichst grundlegend zu erfassen, um für beliebige Fälle gültige Angaben und vor

allem Vorhersagen machen zu können.

Nun liegen über das Einzelmodell umfangreiche Genauigkeitsuntersuchungen vor, die von den Arbeiten Finsterwalders [2] und Gotthardts [3] bis in die heutige Zeit reichen, wobei als Beispiel nur Schürer [7] und Ligterink [6] genannt seien. Allerdings gelang es nie wirklich, die Genauigkeitsstruktur im Modell grundsätzlich in den Griff zu bekommen. Denn bei den theoretischen Untersuchungen wurden so große Vernachlässigungen getroffen, besonders was die systematischen Fehler betrifft, daß das Ergebnis in der Praxis keine allzu große Bedeutung hatte. Bei empirischen Untersuchungen wurden zwar alle Fehlereinflüsse a priori erfaßt, dafür erhielt man nur pauschale Genauigkeitswerte, die über die auftretende Struktur nichts aussagen.

Im folgenden soll über eine Untersuchung berichtet werden, die auf empirisch-statistischem Wege detaillierte Angaben über die stochastischen Eigenschaften von Modellkoordinaten machen soll. Mit Hilfe von umfangreichem Datenmaterial sollen empirisch gewonnene Koordinaten bestimmter Modellpunkte ihren Sollwerten gegenübergestellt werden. Eine statistische Analyse dieser Koordinaten-Restfehler soll dann Aufschluß über die Genauigkeitsstruktur im Modell geben.

Es muß allerdings darauf hingewiesen werden, daß dabei auch nur ein Teilaspekt des gesamten Problemkreises erfaßt werden kann, weil die Ergebnisse auf die speziellen vorhandenen Daten und Bedingungen bezogen sind. Unter gewissen Vorbehalten dürften aber Verallgemeinerungen erlaubt sein.

Die Untersuchung soll sich sowohl mit den Genauigkeitszusammenhängen im relativ orientierten als auch im absolut orientierten Modell befassen. Es ist daran gedacht, durch das Aufstellen einer kompletten Varianz-Kovarianz-Matrix der

Modellkoordinaten zum einen die vorhandene Genauigkeitsstruktur für gegebene Punkte zu ermitteln und zum anderen daraus die stochastischen Eigenschaften beliebiger Modellpunkte abzuleiten und für beliebige Fälle vorherzusagen. In Zusammenhang damit können Möglichkeiten zur Genauigkeitssteigerung sowie der Einfluß strengerer Rechenverfahren aufgezeigt werden.

Mit der Kenntnis der Grundeigenschaften des Modells lassen sich nicht nur Genauigkeitsangaben zu den Modellkoordinaten selbst machen, sondern es können beliebige Funktionen der Modellkoordinaten untersucht werden, wie z.B. Strecken und Richtungen im Modell, oder die Genauigkeit kann durch die absolute Orientierung hindurch verfolgt werden.

2. Vorbereitung der Untersuchung

Um statistisch signifikante Aussagen machen zu können, muß eine große Anzahl von Modellen vorliegen, die unter denselben Bedingungen entstanden sind. Zur Berechnung von Koordinaten-Restfehlern müssen zudem mehrere Punkte im Modell gegeben sein, deren Koordinaten bekannt sind. Es ist also ein Gebiet zu befliegen, das ein regelmäßiges dichtes Netz von gut identifizierbaren und genau eingemessenen Punkten enthält. Prof. Kupfer [5] hatte bereits ein derartiges Testfeld für Genauigkeitsuntersuchungen im Bild angelegt und stellte dieses gerne für die vorgesehenen Untersuchungen zur Verfügung.

Die Daten und die Anordnung der Befliegung sind in Abb. 1 dargestellt. Eine 6-malige Wiederholung des Fluges in 4 senkrecht zueinander liegenden Richtungen erlaubte die Bildung von insgesamt 48 Modellen. Ein Bild wies jedoch eine so starke Bewegungsunschärfe auf, daß es nicht mehr ausgemessen werden konnte, so daß am Ende nur 47 Modelle für die Untersuchung zur Verfügung standen.

| | |
|-------------|---------------------|
| Datum | 12.6.1969 |
| Flugzeug | Aero-Commander |
| Kammer | RMK 15/23 Nr.111680 |
| Brennweite | 153.20 mm |
| Bildmaßstab | 1 : 10 500 |
| Flughöhe | 1650 m |
| Filter | B (gelb) Nr. 114065 |
| Film | Kodak-Plus-X |
| Belichtung | 1/380 sec |
| Überdeckung | 60 % |

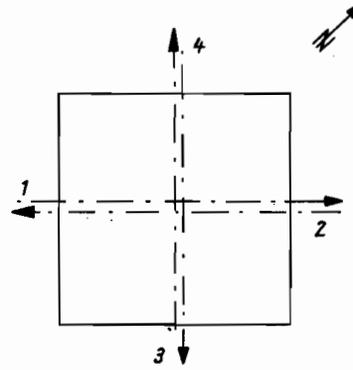


Abbildung 1 Flugdaten und Befliegungs-Schema der Testfeldbefliegung

Alle Bilder wurden am Zeiss- Präzisionsstereokomparator PSK des Instituts für Angewandte Geodäsie in Frankfurt ausgemessen. Aus zwei unabhängigen Durchgängen ergaben sich folgende mittlere Fehler für eine einmalige Einstellung eines Bildpunktes:

| | σ_x | σ_y | |
|---------------------------------------|------------|------------|---------------|
| Signalisierte Punkte (6186 Messungen) | 1.41 | 1.49 | μm |
| Rahmenmarken (376 Messungen) | 1.72 | 1.83 | μm |

Das Bildmaterial kann also von der Genauigkeit her gesehen für die beabsichtigte Untersuchung als brauchbar bezeichnet werden.

3. Ergebnisse

3.1 Untersuchungen im relativ orientierten Modell

Bei sämtlichen Untersuchungen wurden grundsätzlich zwei Varianten für die relative Orientierung durchgerechnet, und zwar einmal mit nur 6 Punkten an den nach 0. von Gruber ausgezeichneten Stellen im Modell und einmal mit allen vorhandenen Bildpunkten. Die Genauigkeitsunterschiede zwischen diesen beiden Varianten stellten sich in allen Fällen als statistisch nicht signifikant heraus, so daß im folgenden nur die Variante mit allen Punkten betrachtet werden soll.

Die Berechnung von mittleren Koordinatenfehlern im relativ orientierten Modell setzt wahre Werte für die Koordinaten voraus, die direkt im Modellsystem bekannt sein sollten. Da es praktisch nicht möglich ist, derartige Sollkoordinaten zu ermitteln, müssen die benötigten Restfehler im Geländesystem berechnet werden. Bei der absoluten Orientierung hängt aber die Genauigkeit wesentlich von der Anzahl und Lage der Paßpunkte ab. Aus diesem Grunde wird nicht auf ausgewählte Punkte eingepaßt, sondern es werden alle vorhandenen Punkte als Paßpunkte eingeführt. Dadurch wird erreicht, daß die Genauigkeitsstruktur im Modell gegenüber dem Einfluß der absoluten Orientierung überwiegt und damit erhalten bleibt. Die Restfehler der Koordinaten der Paßpunkte im Gelände dürfen also als Restfehler der Modellkoordinaten betrachtet werden. Sie lassen sich damit ohne weiteres auf ein modellbezogenes Koordinatensystem reduzieren.

Als mittlere Genauigkeit im Modell wird der quadratische Mittelwert der Restfehler verstanden, wobei die Mittelung sowohl über alle Punkte in einem Modell als auch über alle Modelle erfolgt.

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{n_i} \cdot \frac{1}{n_j} \cdot \sum_i \sum_j v_{ij} \cdot v_{ij}} \quad (1)$$

mit

- n_i = Anzahl der Modelle
- n_j = Anzahl der Punkte pro Modell
- $i = 1 \dots n_i$ $j = 1 \dots n_j$
- k = Koordinatenindex (x, y oder z)

Die erhaltenen Ergebnisse sind in Tabelle 1 getrennt für x, y und z ausgewiesen und zeigen insgesamt eine sehr hohe Genauigkeit der Modellkoordinaten.

| | x | y | z | |
|---------------------------|-----|-----|-----|------------------------------|
| $\sqrt{2} \cdot \sigma_0$ | | 3.1 | | μm im Bildmaßstab |
| σ_k | 4.8 | 5.6 | 7.2 | cm in der Natur |
| | 4.6 | 5.3 | 6.9 | μm im Bildmaßstab |
| σ_r | 2.6 | 2.9 | 4.6 | cm in der Natur |
| | 2.5 | 2.8 | 4.4 | μm im Bildmaßstab |
| σ_s | 4.1 | 4.8 | 5.5 | cm in der Natur |
| | 3.9 | 4.6 | 5.2 | μm im Bildmaßstab |

Tabelle 1 Mittlere Genauigkeit im relativ orientierten Modell

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler σ_0 wird aus den Verbesserungen der gleichgewichtig angenommenen Bildkoordinaten nach der Ausgleichung gewonnen und gibt damit die Genauigkeit einer einmal gemessenen Bildkoordinate x_B oder y_B an. Die relative Orientierung liefert jedoch für x keine Oberbestimmung, sodaß σ_0 nicht als repräsentativ betrachtet werden kann. In Tabelle 1 ist daher der Wert $\sqrt{2} \cdot \sigma_0$ angegeben.

Da die Ergebnisse aus rein empirischen Daten gewonnen wurden, enthalten sie alle Fehlereinflüsse des Aufnahme- und Meßprozesses. Mit den Begriffen der Statistik läßt sich ein meßbarer Vorgang in drei Komponenten aufspalten, nämlich einen "deterministischen", einen "stochastischen" oder "korrelierten" und einen "unregelmäßigen" Anteil. Im üblichen Sprachgebrauch in der Geodäsie und Photogrammetrie entsprechen diese Begriffe den systematischen und zufälligen Fehlern. Mit Hilfe der Kovarianzfunktion, die z.B. bei der Interpolation nach kleinsten Quadraten verwendet wird (Kraus [4]), kann der unregelmäßige Anteil herausgefiltert werden.

Der Scheitelwert der Kovarianzfunktion gibt den Anteil des systematischen Fehlers an und soll im folgenden mit σ_s^2 bezeichnet werden. Dann gilt für den unregelmäßigen Anteil σ_r^2 die Beziehung

$$\sigma_r^2 = \sigma_k^2 - \sigma_s^2 \quad (2)$$

In Tabelle 1 sind die gefilterten Werte eingetragen. Man erkennt, daß etwa 70% der Varianz σ^2 in der Lage und etwa 60% in der Höhe auf systematischen Einflüssen beruhen. Der mittlere Fehler σ_r dürfte die Grenze der im vorliegenden Fall erreichbaren photogrammetrischen Genauigkeit im Modell angeben, da er keinerlei Systematik mehr enthält.

Nach den Angaben über die mittlere Genauigkeit im Modell soll nun eine Analyse des Genauigkeitsverhaltens innerhalb des Modells folgen. Dazu wird für die Koordinaten der Modellpunkte eine vollständige empirische Varianz-Kovarianz-Matrix aufgestellt, aus der die gesuchten Genauigkeitszusammenhänge abgeleitet werden können.

Sind für die Modellpunkte n unabhängig bestimmte Koordinaten x, y, z gegeben, werden die Elemente der Matrix wie folgt berechnet:

$$\text{Varianz: } \text{Var}(i) = \frac{1}{n} \sum_j v_{ij} v_{ij} \quad (3)$$

$$\text{Kovarianz: } \text{Cov}(i, k) = \frac{1}{n} \sum_j v_{ij} v_{kj} \quad (4)$$

$i = x_i, y_i, z_i$ = Koordinaten eines Punktes i

$k = x_k, y_k, z_k$ = Koordinaten eines Punktes k

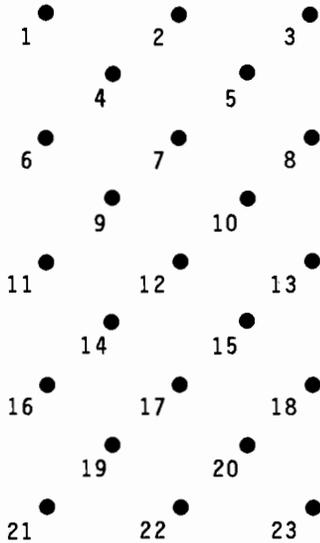
v_i, v_k = Restfehler der Punkte P_i, P_k

n = Anzahl der Punkte bzw. Punktepaare

$j = 1 \dots n$

Für die Anwendung der Formeln (3), (4) ist es notwendig, daß in einem Modell mehrere Punkte repräsentativ gegeben sind und daß mehrere Modelle vorliegen, welche diese Punkte enthalten. Dabei wird vorausgesetzt, daß im Gelände identische Punkte in verschiedenen unabhängigen Modellen stets genau dieselbe Lage besitzen, was sich in der Praxis nicht erreichen läßt. Wird aber angenommen, daß benachbarte Punkte in hinreichendem Maße dieselben stochastischen Eigenschaften besitzen, werden an den "Ort" der Punkte im einzelnen Modell nur geringe Genauigkeitsanforderungen gestellt.

Aus allen 47 vorhandenen Modellen kann daher ein Durchschnittsmodell gebildet werden, auf dessen diskrete Punkte sich die berechneten Varianzen und Kovarianzen beziehen sollen. Das bedeutet, daß die Modellkoordinaten derjenigen Punkte, die in den 47 Modellen etwa dieselben Koordinaten besitzen, punktweise über alle Modelle gemittelt werden. Das Durchschnittsmodell besteht dann aus 23 Punkten, welche die in Abb. 2 dargestellte Verteilung und Nummerierung besitzen. Wie gut die 47 einzelnen Modelle aufeinanderpassen, kann anhand der Abweichungen der Koordinaten der einzelnen Punkte von den Koordinaten des entsprechenden Punktes im Durchschnittsmodell festgestellt werden. Die quadratischen Mittelwerte der Restabweichungen in x, y und z ergaben sich zu



$$\begin{aligned} \sigma_x &= 5 \text{ mm} \\ \sigma_y &= 8 \text{ mm} \\ \sigma_z &= 12 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Abbildung 2 Punktverteilung im Durchschnittsmodell

Die Bildung eines Gesamtmittels kann damit für den benötigten Zweck als zulässig betrachtet werden.

Bei der Berechnung der Varianzen und Kovarianzen werden diejenigen Koordinaten-Restfehler benützt, die sich nach der Einpassung des Modells auf alle Punkte als Paßpunkte ergeben. Da diese Restfehler als wahre Fehler gelten sollen, müßte ihre Summe pro Punkthaufen verschwinden. Dies ist nicht der Fall, so daß die einzelnen Punkte des Durchschnittsmodells noch je einen konstanten systematischen Anteil enthalten. Die Systematik pro Punkt i läßt sich nach (5) berechnen.

$$t_i = \frac{1}{n} \sum_j v_{ij} \quad (5)$$

mit

i = Punktindex
 n = Anzahl der Modelle
 j = 1...n

Die Gesamtheit der t_i kann als "Modelldeformation des Durchschnittsmodells" bezeichnet werden. Es zeigt sich, daß die Lagedeformation praktisch vernachlässigbar ist. Die nichterfaßten systematischen Bildfehler wirken sich also in erster Linie auf die Höhe z im Modell aus. Abb. 3 zeigt die graphische Darstellung der Höhendeformation. Dort sind auch die quadratischen Mittelwerte der t_i über alle Punkte des Modells angegeben.

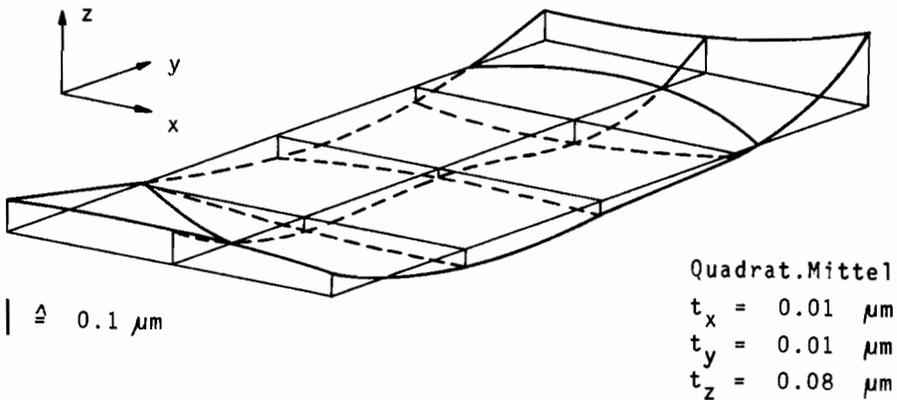


Abbildung 3 Höhendeformation des Durchschnittsmodells

Von primärem Interesse bei der Beurteilung der Genauigkeitsstruktur im Modell ist die Frage, wie sich die mittleren Fehler der einzelnen Punkte zueinander verhalten. Zu diesem Zweck werden die Elemente der Hauptdiagonalen der empirischen Kovarianzmatrix, also die Varianzen, herausgegriffen und in mittlere Fehler umgerechnet. Dabei ergibt sich, daß Punkte, die symmetrisch zu den beiden Modellachsen liegen, etwa dieselbe Genauigkeit aufweisen. In Abb. 4 sind die mittleren Koordinatenfehler an die Stelle geschrieben, die der Lage des Punktes im Modell entspricht, wobei aus den erwähnten Symmetriegründen nur ein Quadrant dargestellt ist. Die Werte der entsprechenden symmetrisch gelegenen Punkte wurden dabei jeweils gemittelt.

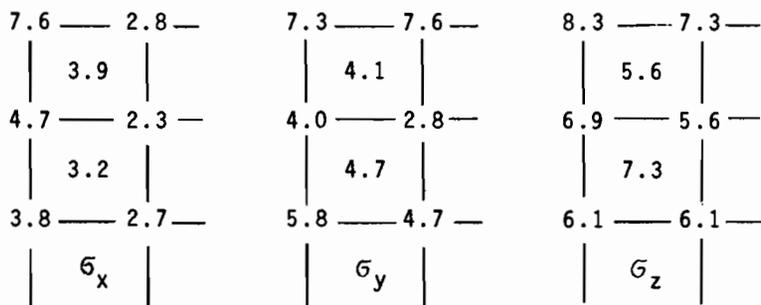


Abbildung 4 Mittlere Koordinatenfehler im relativ orientierten Modell

Angaben in μm bezogen auf den Bildmaßstab

Es zeigt sich eine deutliche Zunahme der mittleren Fehler gegen die Modellränder und besonders gegen die Ecken. Ihr Verhältnis beträgt zwischen Modellmitte und -ecken für σ_x etwa 1:3, für σ_y etwa 1:1.5 und für σ_z etwa 1:1.4.

Zwischen Modellmitte und linkem bzw. rechtem Rand findet man noch Unterschiede bis zu 1:1.7 für σ_x , 1:1.2 für σ_y und 1:1.1 für σ_z . Die Streuungen der x-Koordinaten bleiben auf der Längsachse des Modells nahezu konstant und weisen hier mit ca. 2.5 μm ihre geringsten Werte auf. Die mittleren Fehler der y-Koordinaten vermindern sich zwischen Modellmitte und oberem bzw. unterem Rand zuerst um etwa 40%, ehe sie auf das 1 1/2fache ansteigen. Die Höhe zeigt insgesamt eine ziemlich gleichmäßige Genauigkeit.

Zu den auftretenden Korrelationen seien nur einige kurze Bemerkungen gemacht:

Grundsätzlich sind die Modellkoordinaten sehr stark miteinander korreliert. Zwischen den x-Koordinaten verschiedener Punkte treten Korrelationen bis zu 85%, zwischen den y-Koordinaten bis zu 75% und zwischen den z-Koordinaten bis zu 60% auf. X und y sind ebenfalls bis zu 80% miteinander korreliert. Dagegen sind die Korrelationskoeffizienten zwischen x und z und zwischen y und z statistisch nicht signifikant, d.h. Lage und Höhe im Modell können als praktisch unabhängig voneinander betrachtet werden.

3.2 Untersuchungen im absolut orientierten Modell

Um die Genauigkeit im absolut orientierten Modell und insbesondere den Unterschied zwischen strenger Bündel- und klassischer Zweistufenorientierung zu untersuchen, werden die 47 Modelle mit diesen beiden Orientierungsverfahren durchgerechnet. Die absolute Orientierung erfolgt dabei grundsätzlich durch Einpassung auf 4 Paßpunkte in den Ecken des Modells.

Als Genauigkeitskriterien werden dieselben Angaben wie im relativ orientierten Modell benützt, und auch der Weg der Untersuchung entspricht dem bereits angegebenen. Es wird also zuerst die mittlere Genauigkeit im Modell ein-

schließlich der Filterung betrachtet. Für die Genauigkeitsstruktur wird dann wieder eine empirische Varianz-Kovarianz-Matrix aufgestellt, aus der sich alle interessierenden Genauigkeitswerte ableiten lassen.

In Tabelle 2 sind die Mittelwerte der Genauigkeit sowie die Ergebnisse der Filterung für beide Verfahren der absoluten Orientierung zusammengestellt.

| | Bündellösung | | | Zweistufenösung | | | |
|---------------------------|--------------|-----|------|-----------------|-----|-----|------------------------------|
| | x | y | z | x | y | z | |
| $\sqrt{2} \cdot \sigma_0$ | 4.1 | | | 3.1 | | | μm im Bildmaßstab |
| σ_k | 5.0 | 6.1 | 11.2 | 5.4 | 8.0 | 9.8 | cm in der Natur |
| | 4.7 | 5.8 | 10.7 | 5.1 | 7.7 | 9.3 | μm im Bildmaßstab |
| σ_r | 2.5 | 2.9 | 4.6 | 2.4 | 3.3 | 4.7 | cm in der Natur |
| | 2.4 | 2.8 | 4.4 | 2.3 | 3.1 | 4.5 | μm im Bildmaßstab |
| σ_s | 4.3 | 5.3 | 10.2 | 4.8 | 7.4 | 8.6 | cm in der Natur |
| | 4.1 | 5.0 | 9.7 | 4.6 | 7.0 | 8.2 | μm im Bildmaßstab |

Tabelle 2 Mittlere Genauigkeit im absolut orientierten Modell
Einpassung auf 4 Paßpunkte in den Modellecken

Die Lage ist nach der absoluten Orientierung mit der Bündellösung etwa gleich genau wie nach der relativen Orientierung, nur in der Höhe ergibt sich eine deutliche Verschlechterung. Gegenüber der klassischen Zweistufenorientierung ist das Bündelverfahren in der Lage um etwa 20% genauer, in der Höhe dagegen um etwa 15% ungenauer. Die beiden Verfahren liefern also eine etwas unterschiedliche Definition für die ausgeglichenen Modellpunkte. Der mittlere Gewichtseinheits-

fehler bei der Stufenlösung bezieht sich lediglich auf die relative Orientierung. Beim Bündelverfahren ist σ_0 etwas ungenauer als dieser Wert, da jetzt die Verbesserungen auch von den terrestrischen Koordinaten der Paßpunkte beeinflußt werden. Die mittleren Fehler σ_r des unregelmäßigen Anteils sind in beiden Fällen gleich und haben sich auch gegenüber der relativen Orientierung nicht verändert. Daraus ersieht man, daß auftretende Genauigkeitsunterschiede nur von den systematischen Anteilen hervorgerufen werden.

Zur Erfassung der Genauigkeitsstruktur nach der absoluten Orientierung dienen die Elemente der Hauptdiagonalen der empirisch bestimmten Varianz-Kovarianz-Matrix, die sich auf die Punkte im Durchschnittsmodell beziehen sollen.

Ein sehr unterschiedliches Verhalten der Orientierungsverfahren ergibt sich bei den mittleren Fehlern der einzelnen Punkte. Abb. 5 zeigt die Verhältnisse bei der Bündelorientierung. Die Genauigkeitsverteilung ist insgesamt etwas gleichmäßiger als nach der Modellbildung. Die mittleren Fehler zwischen Modellmitte und den -ecken verhalten sich noch wie etwa 1:1.6 in x, 1:2 in y und 1:1.3 in z.

Bei der Zweistufenorientierung (Abb. 6) bleibt die Genauigkeitsstruktur der x- und z-Koordinaten nach der absoluten Orientierung gegenüber der relativen Orientierung etwa erhalten. Dagegen ändert sich das Verhalten der y-Koordinaten grundsätzlich. Die Punkte mit den größten mittleren Fehlern liegen entlang der Modellbasis, während umgekehrt die Punkte des oberen oder unteren Randes die geringsten Streuungen aufweisen. Das Verhältnis der mittleren Fehler beträgt etwa 2:1.

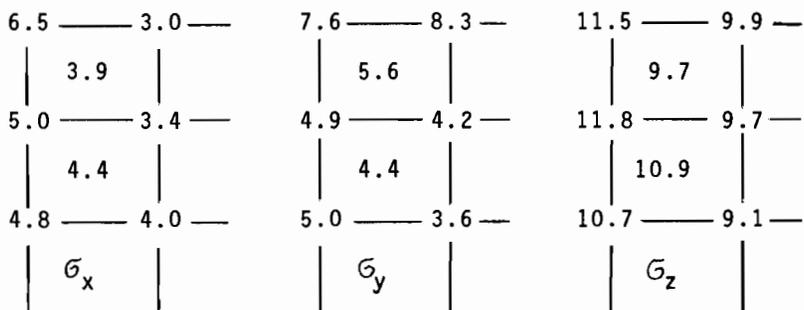


Abbildung 5 Empirische mittlere Koordinatenfehler nach der Bündelorientierung mit 4 Paßpunkten
Angaben in μm bezogen auf den Bildmaßstab

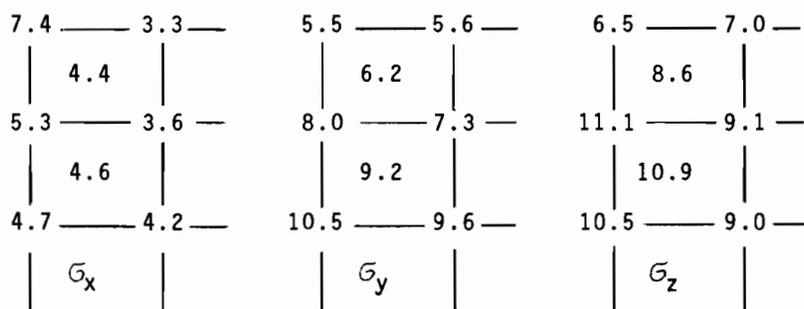


Abbildung 6 Empirische mittlere Koordinatenfehler nach der Zweistufenorientierung mit 4 Paßpunkten
Angaben in μm bezogen auf den Bildmaßstab

Dieses Verhalten läßt sich dadurch erklären, daß nach der relativen Orientierung verbleibende y-Parallaxen in diesem Fall durch die absolute Orientierung nicht mehr beseitigt werden können. Bei der Bündellösung wird dagegen die gesamte vorhandene Information, also auch die Paßpunkt-Koordinaten, gleichzeitig berücksichtigt, wodurch eine gleichmäßigere Verteilung der Verbesserungen erreicht wird.

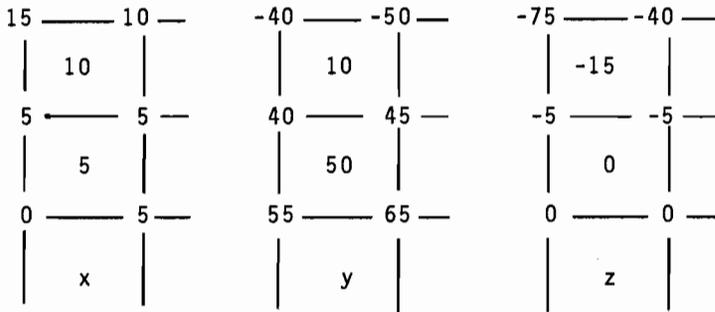


Abbildung 7 Genauigkeitsunterschiede zwischen Zweistufen- und Bündelorientierung in %
Zweistufenlösung = 100 %

Ein Vergleich der Genauigkeitsstrukturen der beiden Orientierungsverfahren, der in Abbildung 7 dargestellt ist, weist in x Unterschiede der einzelnen Punkte bis zu 15%, in y bis zu 65% und in z bis zu 75% auf. Das negative Vorzeichen bedeutet, daß hier die Zweistufenlösung genauer ist als die Bündellösung. Die Unterschiede in der Höhe nehmen zur Modellmitte hin sehr rasch ab. In y tritt lediglich auf dem oberen und unteren Rand eine Verschlechterung auf, während die übrigen Punkte des Bündelverfahrens deutlich genauer sind.

Die empirischen Genauigkeitsuntersuchungen im absolut orientierten Modell haben gezeigt, daß bei strengeren Rechenverfahren auch bessere Ergebnisse erhalten werden. Als Nachweis diene der Genauigkeitsunterschied zwischen strenger Bündellösung und klassischer Zweistufenausgleichung. Bei letzterer ließe sich ebenfalls eine höhere Genauigkeit erzielen, wenn man nach der relativen Orientierung die rechnerischen Korrelationen zwischen den Modellkoordinaten berücksichtigen würde. Unter der Voraussetzung, daß keine systematischen Bildfehler vorhanden sind, müßte sich dasselbe Ergebnis wie bei der Ausgleichung in einem Guß erreichen lassen. Selbstverständlich können in jedem Einzelfall im Rahmen des Ausgleichungsvorganges die Korrelationen durch Fehlerfortpflanzung bestimmt und in die zweite Berechnungsstufe eingeführt werden. Dieses Vorgehen bietet keinerlei Schwierigkeiten und ist nicht weiter interessant. Im folgenden sollen Angaben darüber gemacht werden, wie sich empirisch ermittelte Korrelationen auswirken, die sich ja in den Elementen der Varianz-Kovarianz-Matrix ausdrücken, und welche Schlüsse sich aus ihrer Anwendung ziehen lassen.

3.3 Untersuchungen mit Benützung der empirischen Varianz-Kovarianz-Matrix der Modellkoordinaten

Die Genauigkeitsstruktur im relativ orientierten Modell war anhand einer empirischen Varianz-Kovarianz-Matrix abgeleitet worden, von der angenommen wird, daß sie die stochastischen Eigenschaften von Modellkoordinaten hinreichend gut beschreibt. Wenn dies der Fall ist, können durch empirische oder fehlertheoretische Anwendungen der Kovarianzmatrix beliebige Genauigkeitszusammenhänge, die das Einzelmodell zugrunde legen, untersucht werden, wobei praktisch brauchbare Ergebnisse erhalten werden müssen. Dies gilt für beliebige Funktionen der Modellkoordinaten,

wie Strecken oder Richtungen im Modell, für die absolute Orientierung oder für die Anwendung in der Aerotriangulation. Schließlich sind auch praktische Anwendungen der Varianz-Kovarianz-Matrix denkbar, indem bei Ausgleichsaufgaben, die Modelle als Grundelemente voraussetzen, durch ein erweitertes stochastisches Modell die Genauigkeit der Ergebnisse verbessert wird.

Für die weitere Behandlung werden die Elemente der empirischen Kovarianzmatrix noch etwas "geglättet", indem offensichtlich auftretende Symmetrie-Eigenschaften berücksichtigt werden und ein einfacher systematischer Aufbau der Matrix angestrebt wird. Auf nähere Einzelheiten soll hier allerdings nicht eingegangen werden.

Zuerst wird untersucht, ob die Kovarianzmatrix geeignet ist, die Genauigkeitseigenschaften im Modell richtig zu erfassen. Dies geschieht durch die Überprüfung der empirischen Genauigkeit der vereinfachten Zweistufenausgleichung mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes. Dieses wird auf das Ergebnis der Ausgleichung der räumlichen Ähnlichkeitstransformation angewandt, indem die empirische Varianz-Kovarianz-Matrix als übergeordnete Kovarianzmatrix der Beobachtungen eingeführt wird.

Hierzu wird ein Modell aus 23 schematisch gelegenen Punkten konstruiert, die etwa den Punkten des Durchschnittsmodells entsprechen. Die 4 Paßpunkte erhalten dieselben Koordinaten wie die 4 Eckpunkte des Modells.

| | σ_x | σ_y | σ_z | |
|-------------|------------|------------|------------|------------------------------|
| Theoretisch | 5.3 | 8.0 | 9.6 | cm in der Natur |
| | 5.0 | 7.6 | 9.1 | μm im Bildmaßstab |
| Empirisch | 5.4 | 8.0 | 9.8 | cm in der Natur |
| | 5.1 | 7.6 | 9.3 | μm im Bildmaßstab |

Tabelle 3 Theoretische und empirische Genauigkeit nach der Zweistufenorientierung mit 4 Paßpunkten

Tabelle 3 zeigt die Gegenüberstellung der theoretisch gewonnenen mittleren Genauigkeit mit den empirischen Werten der Zweistufenorientierung. Die Übereinstimmung kann als hervorragend bezeichnet werden.

Dies zeigt sich noch deutlicher, wenn man die mittleren Koordinatenfehler der einzelnen Punkte betrachtet, die in Abbildung 8 dargestellt sind. Ein Vergleich mit Abbildung 6 ergibt mit Ausnahme jeweils der Eckpunkte in y und z bzw. des Mittelpunktes und der 4 benachbarten Punkte in x einen Unterschied von weniger als 10%.

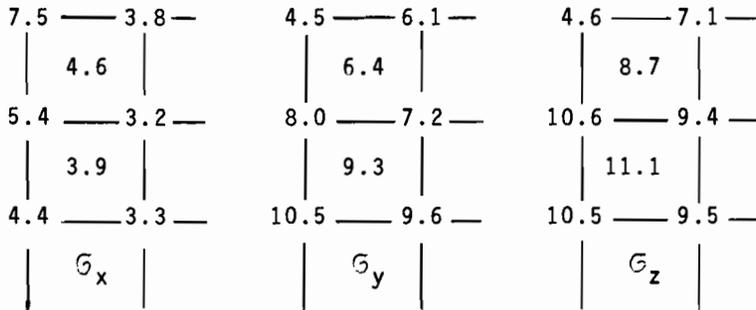


Abbildung 8 Theoretische mittlere Koordinatenfehler nach der Zweistufenorientierung mit 4 Paßpunkten
Angaben in μm bezogen auf den Bildmaßstab

Durch diese gute Übereinstimmung zwischen den theoretischen und den empirischen Ergebnissen wird die Brauchbarkeit der Varianz-Kovarianz-Matrix zur Beschreibung der Genauigkeitsstruktur im Modell deutlich unter Beweis gestellt. Damit gilt auch als sicher, daß beliebige weitere Untersuchungen, die mit dieser Kovarianz-Matrix arbeiten, plausible und praktisch gültige Ergebnisse liefern müssen. Hierbei soll u. a. mit Hilfe der Varianz-Kovarianz-Matrix eine Genauigkeitssteigerung des Ausgleichsergebnisses erreicht werden. Dieser Fall wird anhand der stufenweisen absoluten Orientierung untersucht.

Um die Auswirkungen der Kovarianzmatrix zu zeigen, werden sowohl praktische als auch fehlertheoretische Untersuchungen angestellt. Zuerst wird für die vorhandenen 47 Modelle eine erneute räumliche Ähnlichkeits-transformation mit Berücksichtigung der empirischen Varianz-Kovarianz-Matrix und 4 Paßpunkten angesetzt. Die dabei erhaltenen Ergebnisse sind in x um etwa 20%, in y um etwa 30% genauer als bei der Einpassung von gleichgenauen und unkorrelierten Modellkoordinaten. Die Höhe z ändert sich dagegen nicht.

Die theoretische Überprüfung dieser Werte durch Inversion der Normalgleichungsmatrix eines schematisch konstruierten Modells liefert in der Lage um ca. 10% genauere Ergebnisse, woraus auf zusätzliche Fehlereinflüsse der terrestrischen Koordinaten bei der empirischen Bestimmung geschlossen werden kann.

Ein Vergleich mit den Resultaten der Bündelorientierung zeigt, daß jene nur um etwa 10% ungenauer sind. Der Unterschied hätte eigentlich etwas größer ausfallen müssen, da die empirische Kovarianzmatrix auch korrelierte Anteile der Koordinatenfehler im Bild enthält. Die Bündellösung benützte dagegen die Annahme gleich genauer und unkorrelierter Bildkoordinaten. Der Grund kann daran liegen, daß die Einpassung nur auf 4 Paßpunkte erfolgt und damit die Varianz-Kovarianz-Matrix nicht voll zur Wirkung kommen kann.

Diese letzte Aussage gilt besonders für die Höhe z. Zum Beweis werden zwei zusätzliche Höhenpaßpunkte auf den Seitenmitten des linken und rechten Modellrandes angenommen. In diesem Fall lautet der mittlere Höhenfehler für den vereinfachten Ansatz der Zweistufenlösung

$$\sigma_z = 7.7 \mu\text{m}.$$

Wird die empirische Kovarianzmatrix bei der Ausgleichung berücksichtigt, verändert sich die Streuung in z um etwa 15% auf

$$\sigma_z = 6.5 \mu\text{m}.$$

Die Kovarianzmatrix ist also bei entsprechender Paßpunktanordnung imstande, auch in der Höhe eine spürbare Genauigkeitssteigerung zu bringen.

Zur Veranschaulichung enthält Abbildung 9 die mittleren Koordinatenfehler der einzelnen Punkte in der bekannten Darstellungsweise. Die Genauigkeit zeigt sich jetzt im ganzen Modell als sehr homogen. Man sieht, daß die Photogrammetrie im Bedarfsfall eine außerordentlich gute Genauigkeit liefern kann.

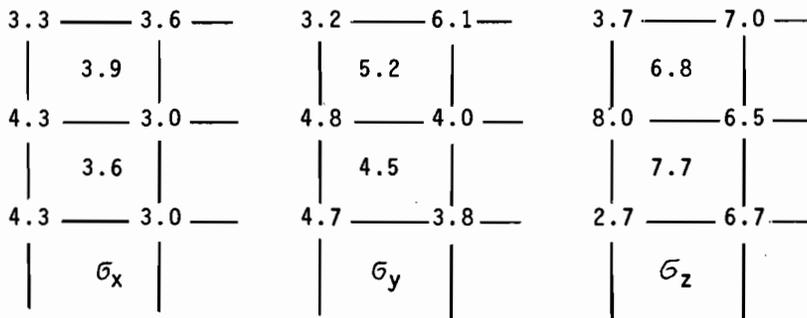


Abbildung 9 Theoretische Genauigkeit der räumlichen Ähnlichkeitstransformation mit vollbesetzter Kovarianzmatrix
 Einpassung auf 4 Lage- und 6 Höhenpaßpunkte
 Angaben in μm bezogen auf den Bildmaßstab

Die Wirkung der Kovarianzmatrix bei der praktischen Ausgleichung wird besonders deutlich in einzelnen Modellen, in denen nach der klassischen Zweistufenorientierung noch relativ große Restfehler übrig bleiben. Da der unregelmäßige Meßfehler sich als konstant erwiesen hat, muß der Gesamtfehler in diesen Modellen einen besonders hohen korrelierten Anteil enthalten, der durch die Einführung

der Kovarianzmatrix reduziert werden kann.

| Modell Nr. | 826828 | | 842840 | | 908909 | | 948949 | | |
|-----------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|
| | σ_x | σ_y | σ_x | σ_y | σ_x | σ_y | σ_x | σ_y | |
| Ohne Kov.matrix | 5.4 | 10.5 | 6.0 | 12.5 | 5.8 | 10.0 | 7.9 | 10.8 | μm |
| Mit Kov.matrix | 4.4 | 5.6 | 5.2 | 5.5 | 3.8 | 3.9 | 4.9 | 4.6 | μm |
| Max. Differenz | | | | | 61 % | | 38 % | | |

Tabelle 4 Beispiele für den Einfluß der Varianz-Kovarianz-Matrix der Modellkoordinaten bei der räumlichen Ähnlichkeitstransformation

Als Beispiel dienen 4 Modelle, deren Ergebnisse in Tabelle 4 einander gegenübergestellt sind. Da die Einpassung auf nur 4 Paßpunkte erfolgte, wird nur die Lage angegeben. In extremen Fällen ergibt sich in y eine Genauigkeitssteigerung bis zu 61% und in x bis zu 38%.

Aus allen gezeigten Ergebnissen wird deutlich, daß die gewählte Varianz-Kovarianz-Matrix die stochastischen Eigenschaften der Koordinaten im relativ orientierten Modell sehr gut beschreibt. Mit ihrer Hilfe lassen sich also beliebige Funktionen der Modellkoordinaten fehlertheoretisch in den Griff bekommen, womit es möglich ist, praktisch alle Genauigkeitsfragen zu beantworten, die das Einzelmodell zugrundelegen. Dies müßte von besonderem Interesse für die Anwendung in der Aerotriangulation sein.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Mit den vorgelegten Untersuchungsergebnissen sollte ein Beitrag geleistet werden, um die Genauigkeitszusammenhänge im photogrammetrischen Einzelmodell besser kennenzulernen. Es war beabsichtigt, die erreichbare Genauigkeit im Modell allgemein anzugeben, theoretisch bessere Vorhersagen für bestimmte Fälle zu machen und schließlich Möglichkeiten zur

Gewinnung besserer Ergebnisse durch ein erweitertes stochastisches Modell aufzeigen. Dies dürfte wenigstens für das vorhandene Datenmaterial zufriedenstellend gelungen sein.

Allerdings muß die Frage offen bleiben, ob sich die gewonnenen Ergebnisse verallgemeinern lassen, d.h. ob sie auch für andere Kammern (und zwar sowohl desselben Typs als auch eines anderen Typs, also Überweitwinkel- und Normalwinkelkammern), andere Aufnahmezeiten und -bedingungen Gültigkeit haben. Schön wäre es z.B., wenn der Typ der Genauigkeitsunterschiede und Korrelationen etwa gleichbleiben würde, so daß die Ergebnisse in einem gewissen Rahmen übertragbar wären.

Um hierüber nähere Angaben machen zu können, müssen noch weitere derartige Untersuchungen angestellt werden. Dies gilt insbesondere für die Verwendung eines anderen Kammer-typs und evtl. einer größeren Anzahl von Modellen oder Punkten im Modell. Darüberhinaus wäre eine ähnliche Untersuchung direkt für das Bild wünschenswert, so daß auch über dessen Genauigkeitseigenschaften fundiertere Aussagen möglich sind. Schließlich dürfen die systematischen Bildfehler nicht ganz vergessen werden, die trotz allem noch besser erfaßt und korrigiert werden müßten.

Es ist zu wünschen, daß die vorgelegten Ergebnisse mit dazu beitragen, auf den genannten Gebieten weitere Untersuchungen anzustellen, um wirklich ein abgerundetes Bild über die Genauigkeitsstruktur sowohl im Modell als auch im Bild zu erhalten.

- [1] Ackermann, F.: Ergebnisse kontrollierter Streifen- und Blockausgleichungen. Lehrgang "Numerische Photogrammetrie" der Technischen Akademie Esslingen, Vortrag Nr. 7, 1973.
- [2] Finsterwalder, R.: Der unregelmäßige Fehler der räumlichen Doppelpunkteinschaltung. Allgemeine Vermessungsnachrichten 44, S. 641, 657, 673 ff, 1932.
- [3] Gotthardt, E.: Beiträge zur Frage der Genauigkeit der gegenseitigen Ortung von Senkrechtbildpaaren. Bildmessung und Luftbildwesen 15, S. 2 - 24, 1940.
- [4] Kraus, K.: Interpolation nach kleinsten Quadraten in der Photogrammetrie. Bildmessung und Luftbildwesen 40, S. 7 - 12, 1972.
- [5] Kupfer, G.: Zur Geometrie des Luftbildes. Deutsche geodätische Kommission, Reihe C, Heft 170, München 1971.
- [6] Ligterink, G.H.: The Precision of Photogrammetric Models. Netherlands Geodetic Commission, Volume 4, Number 3, Delft 1972.
- [7] Schürer, K.: Genauigkeitseigenschaften photogrammetrischer Modellkoordinaten. Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen, Reihe I, Heft 54, 1971.