

## ZUSÄTZLICHE PARAMETER ODER INTERPOLATION?

Von F. Ackermann, Stuttgart

### 1. Einleitung

Im Mittelpunkt der Entwicklung der Präzisions-Photogrammetrie stehen gegenwärtig die systematischen Bildfehler und ihre Kompensation. Das Interesse konzentriert sich

- auf die Untersuchung der Existenz, Konstanz und Wirkung systematischer Fehler,
- auf die Methoden ihrer Kompensation und
- die erreichbare Genauigkeitssteigerung.

Die Erforschung der systematischen Bildfehler ist in dem größeren Zusammenhang der Fehlereigenschaften und der Genauigkeitsstruktur photogrammetrischer Bilder, Bildpaare und Bildverbände zu sehen.

Das Problem der systematischen Fehler ist in der Photogrammetrie keineswegs neu. Die Voraussetzungen und die Möglichkeiten, sie zu erfassen und zu kompensieren sind heute jedoch wesentlich günstiger als bisher, vor allem als Folge der analytisch-numerischen Verfahren. Durch sie ist das allgemeine Genauigkeitsniveau so weit gesteigert worden, daß die systematischen Bildfehler, deren Maximalbeträge in der Regel um oder unter 10  $\mu\text{m}$  liegen, deutlich in Erscheinung treten. Gleichzeitig bieten die rechnerischen Verfahren die Möglichkeit, die systematischen Bild- oder Modellfehler aus dem Bildmaterial direkt zu bestimmen und sie gemeinsam mit der Blockausgleichung zu korrigieren. Als allgemeine Voraussetzung für den Erfolg der Verfahren muß weiterhin auf die hohe und offenbar sehr konstante geometrische Genauigkeit moderner Aufnahmekammern und insbesondere auch des Filmmaterials hingewiesen werden.

Im folgenden soll eine Übersicht über die Verfahren zur Korrektur systematischer Bildfehler gegeben werden, und zwar nach praktischen Gesichtspunkten. Es ist nicht beabsichtigt, die Theorie ausführlich abzuhandeln. Vielmehr sollen die verschiedenen Korrekturverfahren, die Bedingungen ihrer Anwendung und ihre Erfolgsaussichten besprochen werden. Einige vergleichende empirische Ergebnisse sollen das Bild abrunden und die bisher bekannten Angaben über die erreichbare Genauigkeitssteigerung ergänzen.

### 2. Ursachen und Erscheinungsformen der systematischen Fehler

Wir gehen zunächst von der Annahme systematischer Bilddeformationen (bzw. systematischer Fehler der gemessenen Bildkoordinaten) aus, die wenigstens im Bereich benachbarter Bilder, z.B. innerhalb eines Bildstreifens, als hinreichend konstant betrachtet werden können. Genauer gesagt verstehen wir unter systematischen Bildfehlern die deterministischen geometrischen Abweichungen der Meßbilder (einschließlich des Meßprozesses) von dem als Bezug geltenden Funktionalmodell der perspektiven Abbildung (bei gegebener innerer Orientierung). In der Praxis sind allerdings die systematischen Fehler des Funktionalmodells von den

(hoch-)korrelierten Anteilen des stochastischen Modells nicht deutlich unterschieden, zumal eine gewisse Austauschbarkeit zwischen funktionalem und stochastischem Modell besteht.

Als Folge der Bildfehler weisen die Bildpaare nach der relativen Orientierung entsprechende Modellverbiegungen auf. Ebenso verbleiben im ausgeglichenen Streifen oder Block Restwirkungen, deren Typen und Größen von der Anzahl und Anordnung der Paßpunkte, von der Oberdeckung und von der Art der Ausgleichung abhängen. Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen und Bündelblockausgleichung können sich dabei im einzelnen verschieden verhalten.

Gemäß dieser 3 Ebenen, auf denen die systematischen Bildfehler in Erscheinung treten, kann man entsprechend ihre Korrektur im Bild, im Modell, oder im Block in Angriff nehmen.

Die eigentlichen, physikalischen Ursachen der systematischen Bildfehler brauchen nicht bekannt zu sein und uns im einzelnen nicht zu interessieren. Tatsächlich wissen wir über die Ursachen der Bildfehler qualitativ gut Bescheid, aber quantitativ ist im Einzelfall wenig genug über sie bekannt. Glücklicherweise ist es für den Nachweis der Existenz systematischer Bildfehler und für ihre rechnerische Korrektur unwesentlich, ob wir sie ursächlich analysieren oder erklären können. Selbstverständlich ergeben sich aus der Abhängigkeit der systematischen Bildfehler von den Aufnahme- und Flugparametern Hinweise auf Ursachenbereiche. Sie einzeln aufzugliedern und zu analysieren ist jedoch erst dann erforderlich, wenn z.B. zur Verbesserung der Kammerkonstruktionen oder der Filme die wirksamsten Fehlerquellen erkannt und ausgeschaltet werden sollen.

In Obereinstimmung mit dieser rein phänomenologischen Betrachtungsweise sind die in der Literatur bekannten Untersuchungen über die Auswirkung systematischer Fehler auf Streifen und Blöcke von der Annahme bestimmter einfacher Typen der Bilddeformation ausgegangen. Ebenso sind bei den selbstkalibrierenden Blockausgleichungen durch die Wahl der zusätzlichen Parameter die Typen der zu korrigierenden systematischen Bildfehler a priori eingeführt und festgelegt.

Neben den Bild- und Modellfehlern gibt es bei Blockausgleichungen eine zweite Art systematischer Fehlerwirkungen, deren Ursache nicht im photogrammetrischen Aufnahme- oder Meßprozeß liegt. Dazu gehören die Wirkungen der Erdkrümmung, der geodätischen Projektion und Netzspannungen im Paßpunktsystem. Während die beiden ersten Wirkungen im Prinzip mathematisch streng erfaßbar und völlig korrigierbar sind, können Netzspannungen nur empirisch festgestellt und höchstens nach statistischen Gesichtspunkten erfaßt und korrigiert werden. Allgemein handelt es sich um Fehler oder um Inkompatibilitäten im Paßpunktsystem. Sie treten daher erst bei der Blockausgleichung in Erscheinung und werden dementsprechend am besten im Block korrigiert. Sie können aber auch ersatzweise durch Korrekturen im Bild oder Modell kompensiert werden.

Bei der Blockausgleichung lassen sich wegen gleicher oder ähnlicher Erscheinungsbilder die von den Bildfehlern verursachten Fehlerwirkungen von denen der Inkompatibilitäten des Paßpunktsystems nicht ohne weiteres trennen. Deshalb werden sie in der Praxis stets gemeinsam kompensiert, entweder an den Anfangselementen des Prozesses, d.h. im Bild oder Modell, oder im ausgeglichenen Block.

Durch diese Vermischung wird in der Regel eine der beiden ursächlich verschiedenen Fehlerwirkungen nicht optimal korrigiert.

### 3. Die konventionelle Behandlung systematischer Fehler

Ehe wir uns den neuen Methoden zur Korrektur systematischer Fehler zuwenden, sei doch daran erinnert, daß auch bei den konventionellen Verfahren der Streifen- und Blocktriangulation ein großer Teil der systematischen Bildfehler wirksam korrigiert oder kompensiert wird. Hier sind zunächst die sogenannten "a priori"-Korrekturen zu nennen, worunter wir die Korrektur der Bild- oder Modellkoordinaten um absolut (Refraktion, Erdkrümmung) oder aus Labor-Kammerkalibrierung (optische Verzeichnung) bekannte Fehlerbeträge verstehen. In die gleiche Kategorie gehören die analytischen Korrekturen bei der Bildtransformation auf die Rahmenmarken (Helmert- oder Affin-Transformation) oder die aus Réseau-Bildern ableitbaren Bildkorrekturen.

Eine besondere Variante der a priori-Bildkorrekturen stellen die aus Befliegungen von Testfeldern abgeleiteten Kammer- oder besser System-Kalibrierungen dar. Sie sind durch die Untersuchungen von Prof. Kupfer, Bonn, wieder aktuell geworden, nachdem sich in den 60er Jahren Prof. Hallert, Stockholm, sehr um die Kammerkalibrierung außerhalb des Laboratoriums möglichst unter Flugbedingungen bemüht hat.

Eine zweite Art der konventionellen Kompensation systematischer Bildfehler kann man in der Paßpunktanordnung sehen. Die in der Aerotriangulation üblichen Paßpunktanordnungen (z.B. dichte Randbesetzung mit Lagepaßpunkten oder Höhenpaßpunktketten mäßigen Abstandes) haben die Eigenschaft, mit der üblichen Ausgleichung einen großen Teil der Auswirkungen systematischer Bildfehler zu kompensieren. Aus den Untersuchungen von K. Kubik, Delft, der als erster auf die Wirkung systematischer Bildfehler hingewiesen hat, kann man im einzelnen erkennen, daß gewisse Typen der Bilddeformation neutralisiert werden. Dabei ist noch zu unterscheiden, ob sich die Existenz systematischer Fehler im Betrag des Varianz-Faktors ( $\sigma_0$ ) der Blockausgleichung niederschlägt oder nicht. Von den Bild- oder Modelldeformationen, die sich in einer Reihe von Fällen in örtlichen Diskrepanzen bzw. Verbesserungen  $v$  an den Verknüpfungspunkten äußern, ist nämlich grundsätzlich die Fehlerfortpflanzung der Bild- oder Modellfehler im Block zu unterscheiden. Es gibt Fälle, bei denen erhebliche Blockdeformationen, insbesondere in der Höhe, unerkant bleiben, da die Verbesserungen  $v$  an den Paß- und Verknüpfungspunkten keine oder keine hinreichenden Hinweise darauf geben. Dagegen werden bei dichtem Paßpunktrand in den von Kubik untersuchten Fällen die systematischen Lagefehler entweder sehr weitgehend kompensiert oder wird ihre Existenz wenigstens im  $\sigma_0$  angezeigt.

Zusätzlich zu den Paßpunktanordnungen haben auch die verschiedenen Arten der Bildüberdeckung bzw. der Fluganordnung die Eigenschaft, gewisse Typen systematischer Bild- oder Modellfehler weitgehend zu kompensieren. Von praktischer Bedeutung sind Flugstreifen mit 60 % Querüberdeckung und Befliegungen mit entgegengesetzten oder senkrecht zueinander verlaufenden Flugachsen. Für verschiedene Lagedeformationen von Modellen genügt selbst bei Blöcken mit 20 %

Querüberdeckung schon die Umkehrung der Flugrichtung benachbarter Streifen, um die Fehlerwirkung fast vollständig zu kompensieren bzw. die Fehlerfortpflanzung im Block zu verhindern.

Die Auswirkungen systematischer Bild- oder Modellfehler auf Blöcke in Abhängigkeit von der Paßpunktanordnung und von der Bildüberdeckung können hier nicht weiter besprochen werden, sie wären ein Thema für sich. Die beiden Abbildungen 1 und 2 sollen genügen, um für eine angenommene systematische Maßstabsaffinität der Modelle die Fehlerwirkung auf einen schematischen quadratischen (Lage-) Block von 200 Modellen für 2 Paßpunktfälle und Blockausgleichung nach der Methode der unabhängigen Modelle aufzuzeigen und den Grad der Kompensation zu demonstrieren. Dabei ist von einer systematischen Modelldeformation von  $5 \mu\text{m}$  (Koordinatenfehler an den Modell-Eckpunkten) ausgegangen. Auf die verschiedenen Maßstäbe der Fehlervektoren sei hingewiesen.

#### 4. Methoden zur Korrektur systematischer Bild- oder Modellfehler

Die neuen Methoden zur Korrektur systematischer Bild- oder Modellfehler zeichnen sich dadurch aus, daß sie sich ausschließlich auf die bei der Blockausgleichung verfügbare Information stützen, die Korrekturen sich also direkt oder indirekt über die Verbesserungen  $v$  der Ausgleichung ableiten. Wir gehen davon aus, daß nach Berücksichtigung der a priori bekannten Korrekturen weitere, zunächst unbekannte systematische Bild- oder Modellfehler vorhanden sind, die zusammen oder im Zusammenhang mit der Blockausgleichung bestimmt und korrigiert werden sollen. Die Verfahren werden deshalb unter dem Begriff der Selbstkalibrierung der Bilder oder der Modelle zusammengefaßt, in Anlehnung an die bisher übliche Kammerkalibrierung im Laboratorium.

Das in der Zukunft wichtigste und leistungsfähigste Verfahren<sup>1)</sup> der Selbstkalibrierung ist die Blockausgleichung mit zusätzlichen Parametern (Abschn. 4.2). Dabei werden die Korrekturen der Bilder oder Modelle in den Fehlergleichungen durch zusätzliche Parameter beschrieben, die als Unbekannte in die Ausgleichung eingehen und durch sie mit Hilfe des Minimum Prinzips der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden. Damit verwandt ist ein stärker pragmatisch orientiertes iteratives Verfahren (Abschn. 4.1), bei dem durch Analyse der Verbesserungen nach einer Blockausgleichung (ohne zusätzliche Parameter) systematische Bild- oder Modelldeformationen abgeleitet werden. Mit den entsprechend korrigierten Bildern oder Modellen wird eine erneute Blockausgleichung durchgeführt und gegebenenfalls der ganze Prozeß noch einmal wiederholt.

Beide Verfahren der Selbstkalibrierung lassen sich sowohl für Blockausgleichungen nach der Bündelmethode als auch nach der Methode der unabhängigen Modelle anwenden. Wir beschränken uns in der folgenden Diskussion im wesentlichen auf letztere Methode.

<sup>1)</sup> Unter Selbstkalibrierung wird bisher in der Literatur nur dieses Verfahren verstanden,

Der Bestimmung der systematischen Fehler der Bilder oder der Modelle, d.h. der Recheneinheiten, die in die Blockausgleichung eingehen, steht die Korrektur der Blockdeformationen nach durchgeführter Blockausgleichung gegenüber (Abschn. 5). Es handelt sich um eine nachträgliche Korrektur (Interpolation) der Neupunktskoordinaten. Die Korrektur wird nur aus den Restfehlern an Paßpunkten abgeleitet, unterscheidet also nicht, ob ihre Ursachen in den Recheneinheiten des Blocks oder im Paßpunktsystem liegen. Dementsprechend wird nur die Fehlerwirkung auf das Feld der Neupunkte nachträglich korrigiert, ohne die entsprechenden Bild- oder Modelldeformationen explizit zu bestimmen.

#### 4.1 Korrektur von Bild- und Modellfehlern durch Analyse der Verbesserungen v der Blockausgleichung

Im Vortrag Nr. 3 hat M. Schilcher am Beispiel der "Oberschwaben"-Blöcke gezeigt, daß aus der Analyse der Restfehler  $v$  an den Verknüpfungspunkten systematische Modelldeformationen einschließlich der Projektionszentren durch Superposition der Modelle abgeleitet werden können. Dieses einfache empirische Verfahren ist wohl zuerst am IGN, Paris, von de Masson d'Autume entwickelt und angewendet worden. Die Analyse erfordert im Prinzip keine besonderen Hilfsmittel, kann aber natürlich mit Rechenprogrammen entsprechend bequem gestaltet werden.

Die Analyse wird besonders wirksam sein, wenn Modelldeformationen eines bestimmten, einfachen Typs vorherrschend sind, wie es beim Bildmaterial Oberschwaben in überraschendem Maße der Fall war.

Die Grenzen des Verfahrens sind dadurch gegeben, daß die Bestimmbarkeit der systematischen Modelldeformationen in gewissem Umfang von der Anzahl und Anordnung der Paßpunkte und von der Überdeckung abhängig ist. Dies gilt insbesondere für die Höhen. Z.B. können zylindrische Durchbiegungen der Modelle ( $\sim y^2$ ) bei 20 % Querüberdeckung nicht erkannt werden.

Die Methode ist im Prinzip sehr anpassungs- und leistungsfähig. So wird man z.B. die Modelldeformationen streifenweise analysieren, um die Bereiche konstanter systematischer Fehler leichter beurteilen und abgrenzen zu können. Ebenso kann man sich in der Art der Korrekturen an die Anzahl der pro Modell gemessenen Punkte oder an die gegebenen Überdeckungsverhältnisse anpassen. Trotzdem muß zumindest in den bisherigen Anwendungen der pragmatisch-empirische Charakter des Verfahrens betont werden. Insbesondere fehlt eine ausgearbeitete theoretische Basis zur Beurteilung der Signifikanz der Ergebnisse, obwohl aus den jeweiligen Zwischenergebnissen die Wirkung und die Zulässigkeit der Korrekturen deutlich abzulesen ist. Außerdem werden in der Regel zur Bestimmung der systematischen Modellfehler nur die Verbesserungen der Verknüpfungspunkte, nicht aber der Paßpunkte herangezogen. Ebenso sind bei der Zusammenfassung der Verbesserungen Vereinfachungen üblich,

Die Anwendung des Verfahrens ist einfach. Nach der vorläufigen Blockausgleichung werden die Restfehler auf systematische Modellverbiegungen analysiert und die Modellpunkte aller Modelle entsprechend korrigiert. Daraufhin wird die normale Blockausgleichung wiederholt und das Ergebnis erneut analysiert. In vielen Fällen wird kein zweiter Korrekturdurchgang mehr erforderlich sein. Die

in Tabelle 1 zusammengestellten Ergebnisse zeigen, daß dabei in der Lagegenauigkeit Steigerungen um den Faktor 1.4 festgestellt wurden. Die Steigerung der Höhengenaugigkeit dagegen ist bei 20 % Querüberdeckung gering, erreicht lediglich bei schwacher Paßpunktbesetzung den Faktor 1.3. Dagegen lassen Blöcke mit 60 % Querüberdeckung die Höhendeformationen vollständiger erfassen, was sich in dem einen verfügbaren Beispiel in einer Steigerung der Höhengenaugigkeit um den Faktor 2.5 ausdrückt. Im übrigen wird auf die Tabellen 7 und 8 des Vortrags von M. Schilcher verwiesen.

#### 4.2 Blockausgleichung unabhängiger Modelle mit zusätzlichen Parametern

Diese Methode ist im Vortrag Nr. 4 von H. Ebner beschrieben worden. Für die Bündelblockausgleichung sind verschiedene Programme von D. Brown, USA, das finnische Programm und das Programm BAP von J. Müller, Hannover, zu nennen.

Die Methode der Blockausgleichung mit zusätzlichen Parametern gilt wegen ihres allgemeinen und formalen Ansatzes als die direkteste und leistungsfähigste Realisierung des verfeinerten mathematischen Modells des photogrammetrischen Meßbildes bzw. Modells. Der Ansatz ist am einfachsten zu verstehen, wenn die zusätzlichen Parameter zur Beschreibung der Bild- oder Modelldeformationen als Unbekannte in die Ausgleichung eingeführt werden.

Da man nicht voraussetzen kann, daß die Bild- oder Modellverbiegungen eines ganzen Blocks konstant sind, muß man gegebenenfalls den Block in eine Anzahl von Modellgruppen untergliedern, denen jeweils unabhängige Parametergruppen zugeordnet werden. Z.B. kann für jeden Streifen eine unabhängige Gruppe anzusetzen sein. Dadurch steht man vor der Schwierigkeit, daß gegebenenfalls die Parameter in Abhängigkeit von der Überdeckung und der Lage und Anzahl der Meßpunkte unbestimmt werden und die Ausgleichung numerisch zusammenbricht. Diese Gefahr ist umso kritischer, als für alle möglicherweise auftretenden Bild- oder Modelldeformationen Korrekturglieder vorgesehen werden sollten.

Diese Schwierigkeit kann dadurch entschärft werden, daß den unbekanntem Parametern zusätzliche Fehlergleichungen, d.h. Beobachtungen mit Zahlenwerten und Gewichten zugeordnet werden. Wenn die Parameter auf Grund der Geometrie der Messungen nicht bestimmbar sind, sorgt in diesem Fall das Minimum-Prinzip der Methode der kleinsten Quadrate dafür, daß die eingeführten Zahlenwerte angehalten werden. d.h. die Verbesserungen die Werte  $v = 0$  erhalten.

Ohne numerische Instabilität der Ausgleichung können somit hinreichend viele Parameter angesetzt werden. Damit ist die Schwäche der Methode neutralisiert, die in der Notwendigkeit zu sehen ist, von vornherein Anzahl und Typ der Bild- oder Modelldeformationen sowie Anzahl und Zusammensetzung der einem Satz von Parametern zugeordneten Bild- oder Modellgruppen festzulegen.

Die zusätzlichen Parameter werden zwar überwiegend aus den Beobachtungen der Verknüpfungspunkte bestimmt, sie sind jedoch auch von den Paßpunkten abhängig, insbesondere wenn bei schwacher Paßpunktbesetzung nicht alle systematischen Modelldeformationen voll in Erscheinung treten. Außerdem bleibt die Bestimmbarkeit der Parameter von den Bildüberdeckungen abhängig. Z.B. können bei 20 % Querüberdeckung gewisse Höhendeformationen der Modelle nicht erfaßt werden.

Als Nebeneffekt der Behandlung der Parameter als Beobachtungen können a priori bekannte Modellverbiegungen, die z.B. aus anderen, früheren Projekten derselben Kammer bestimmt worden sind, als Beobachtungswerte eingeführt werden<sup>1)</sup>. Nachdem sich eine bemerkenswerte Konstanz der Modellverbiegungen verschiedener Flüge herausgestellt hat, scheint dieses Verfahren durchaus praktikabel zu sein.

Mit diesen Erweiterungen erweist sich die Methode der zusätzlichen Parameter als allgemein anwendbar und höchst anpassungsfähig. Sie kann derzeit als wirksamste Strategie zur Erfassung systematischer Fehler angesehen werden. Sie setzt allerdings voll entwickelte, aufwendige Rechenprogramme voraus. Gegenüber der normalen Blockausgleichung treten bei der numerischen Behandlung zusätzliche Ordnungsprobleme auf (geränderte Bandmatrizen).

Die wenigen bisher verfügbaren kontrollierten Versuche mit unabhängigen Modellen (vgl. Tab. 1) zeigen die Wirksamkeit der Methode auf und bestätigen gleichzeitig, daß bei 20 % Querüberdeckung keine oder nur geringe Höhenverbesserungen erreicht werden. Der Zahlenwert von  $\sigma_0$  läßt abschätzen, wie nahe die Ausgleichung dem Rauschpegel der Modellkoordinaten gekommen ist, der für signalisierte Punkte bei etwa 3 - 3.5  $\mu\text{m}$  anzusetzen ist.

Die wenigen bisher vorliegenden praktischen Untersuchungen haben eine unerwartet hohe Konstanz der systematischen Modellverbiegungen aufgezeigt. Außerdem scheinen die systematischen Fehler praktisch nur von der Kammer (d.h. vom jeweiligen Aufnahmesystem einschließlich Film) abhängig zu sein. Erstaunlich ist ferner der Befund, wonach bei dem bisher untersuchten Bildmaterial von 3 verschiedenen Kammern der Firma Carl Zeiss, Oberkochen (1 RMK 8.5/23, 2 RMK 15/23) sehr ähnliche Modelldeformation aufgetreten sind.

Über die Wirkung der zusätzlichen Parameter bei Blockausgleichungen mit Bündeln und unabhängigen Modellen liegen noch kaum direkte Vergleiche vor. Die Wirkungen scheinen jedoch in der gleichen Größenordnung zu liegen. Die Bündelmethode müßte eigentlich ihre auf der Basis zufälliger Fehler zu erwartende theoretische Überlegenheit endlich praktisch erreichen können. Nach den für Bündelblockausgleichungen mit Parametern in der Literatur mitgeteilten  $\sigma_0$ -Werten von 3.5  $\mu\text{m}$  - 7  $\mu\text{m}$  scheint der theoretische Grenzwert noch nicht erreicht zu sein. Die Forschung hat deshalb in nächster Zeit die Aufgabe, direkt vergleichbare Fälle zu untersuchen.

---

1) Dieselbe Möglichkeit der Überlagerung der empirisch gefundenen Modelldeformationen durch a priori gegebene Modelldeformationen besteht auch bei der in Abschnitt 4.1 besprochenen Methode.

## 5. Die lineare Prädiktion oder kleinste-Quadrate-Interpolation

Die unter dem Namen Kollokation bekannt gewordene Verallgemeinerung der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate stellt eine Kombination der konventionellen Ausgleichung mit einer Interpolation (des sog. Signals) dar. Die Erweiterung besteht in der getrennten Berücksichtigung und Behandlung der durch Korrelation beschreibbaren Fehlereigenschaften von Beobachtungen. (Im hier gegebenen Anwendungsbereich könnten diese Korrelationen allerdings auch mit der konventionellen Ausgleichsrechnung behandelt werden.)

Die Interpolation nach kleinsten Quadraten ist in den früheren Lehrgängen über numerische Photogrammetrie in der Anwendung auf die Katasterphotogrammetrie von K. Kraus bereits ausführlich dargestellt worden. Sie beruht auf der Interpolation von Korrekturen für den ausgeglichenen Block auf der Basis der Korrelationseigenschaften der Restfehler an den Paßpunkten. Diese Korrelationseigenschaften werden im Falle der Homogenität und Isotropie durch die Kovarianzfunktion beschrieben. Die Korrelation zwischen beliebigen Punkten ist dann nur eine Funktion ihres gegenseitigen Abstandes.

Man kann die Blockausgleichung mit nachträglicher Interpolation als 2-stufige Kollokation auffassen und sie dementsprechend mit der Blockausgleichung mit zusätzlichen Parametern in Beziehung setzen, da letztere ebenfalls als Kollokation interpretierbar ist. Allerdings müßten dann die Korrelationen im ausgeglichenen Block von demselben stochastischen Ansatz abgeleitet werden, der dem Parameteransatz zugrunde liegt.

Da genau diese Voraussetzung in der praktischen Anwendung nicht vorliegt, können wir hier die Interpolation nach der Blockausgleichung als völlig selbständige Methode betrachten, ohne tiefere Beziehungen mit dem Parameter-Ansatz zu verfolgen.

Der entscheidende und unabhängige Ansatz der Interpolation nach kleinsten Quadraten besteht darin, daß aus den Widersprüchen an den Paßpunkten bzw. den sogenannten Stützpunkten die Kovarianzfunktion, d.h. das Korrelationsverhalten des Punktverbandes, empirisch abgeleitet wird<sup>1)</sup>. Auf die Fehlereigenschaften der Modelle oder der Bilder wird nicht Bezug genommen, wie auch die Korrekturen lediglich in einer zusätzlichen, flächenhaften Deformation des Punktfeldes des ausgeglichenen Blocks bestehen.

Damit ist klaggestellt, daß die Wirksamkeit der Interpolation, im Gegensatz zu den bisher besprochenen Verfahren, völlig von der Anzahl und Verteilung der Stützpunkte (= Paßpunkte) abhängig ist. Außerdem ist deutlich, daß die Feinstruktur systematischer Blockdeformationen nur unzureichend erfaßt wird.

Andererseits ist die Interpolation nicht davon abhängig, daß sich die Blockdeformationen als Funktionen systematischer (konstanter) Bild- oder Modelldeformationen darstellen lassen. Die Probleme der Abgrenzung von Parameter- und Modellgruppen treten nicht auf.

1) Selbst wenn a priori-Kovarianzfunktionen benützt werden, wird nur auf vergleichbare andere empirische Bestimmungen zurückgegriffen,



Die Abbildungen 3 - 5 und die Tabelle 2 zeigen anhand simulierter schematischer Beispiele die Wirksamkeit der Interpolation bei den Lage deformationen eines Blockes aufgrund vorgegebener Modelldeformationen. Die Beispiele verdeutlichen die Abhängigkeit von der Paß- und Stützpunktanordnung. Dabei sind auch Varianten aufgenommen, bei denen für die Blockausgleichung nur eine Auswahl aus den bekannten Punkten als Paßpunkte benutzt wurden, also die Anzahl der Paßpunkte für die Blockausgleichung nicht mit der Anzahl der Stützpunkte für die anschließende Interpolation identisch ist.

Für die an realen Blöcken erreichte Genauigkeitssteigerung gibt Tabelle 3 eine Zusammenstellung. Danach tritt in der Lagegenauigkeit eine Steigerung um 20 - 40 % regelmäßig ein. Dagegen ist die Interpolation für die Höhen nicht oder nur wenig wirksam.

Ein Blick in die Tabelle 1 bestätigt, daß unter den für die Interpolation günstigen Voraussetzungen die Genauigkeitssteigerung bei allen Unterschieden im Detail eine ähnliche Größenordnung erreichen kann wie bei den zusätzlichen Parametern.

## 6. Zusammenfassung

Nach den angeführten Gesichtspunkten kann der Standort der verschiedenen Verfahren recht eindeutig beurteilt werden:

Das Verfahren der empirischen Analyse der Restfehler nach Blockausgleichungen und entsprechender Bild- oder Modellkorrektur ist als überraschend wirksames Hilfsmittel einzustufen, das ohne aufwendige Rechenprogramme einfach anzuwenden ist. Man wird es zusammen mit normalen Blockausgleichungen hauptsächlich dann ansetzen, wenn besonderer Verdacht auf systematische Fehler vorliegt und Rechenprogramme mit zusätzlichen Parametern nicht verfügbar sind.

Die Blockausgleichung mit zusätzlichen, als Beobachtungen mit Gewichten einzuführenden Parametern ist zweifellos für die Erfassung systematischer Bild- oder Modellfehler die leistungsfähigste und flexibelste Methode. Es besteht kein Zweifel, daß anspruchsvolle Rechenprogramme der Blockausgleichung in Zukunft diese Erweiterung enthalten müssen. Dadurch wird einerseits im Durchschnitt bessere Absicherung der Ergebnisse und eine beträchtliche Genauigkeitssteigerung erzielt. Andererseits sollten die Ergebnisse besser als bisher mit den theoretischen Genauigkeitserwartungen übereinstimmen. Außerdem darf festgestellt werden, daß das damit erreichte Genauigkeitsniveau höchst erstaunlich ist und alle bisherigen Erwartungen erheblich übersteigt.

Die Voraussetzungen für die Anwendung der kleinste-Quadrate-Interpolation sind von der Anzahl der erforderlichen Stützpunkte her nicht stets gegeben. Wenn sie jedoch gegeben sind, wie z.B. häufig in der Katasterphotogrammetrie, ist auch diese Methode sehr wirksam. Im übrigen sei darauf hingewiesen, daß die kleinste-Quadrate-Interpolation neben der Blockausgleichung auch eigenständige Anwendungsgebiete hat.

Abschließend sei noch festgestellt, daß mit den genannten Methoden die Entwicklung zur weiteren Genauigkeitssteigerung in der Aerotriangulation noch nicht abgeschlossen ist. Es besteht nämlich über die Erfassung systematischer Fehler hinaus die Aufgabe und die Möglichkeit, die stochastischen Eigenschaften der Bilder und Modelle im Blockverband, d.h. ihre internen Korrelationen und die Korrelationen zwischen den Nachbarbildern zu berücksichtigen. Ob dadurch noch einmal eine wesentliche Genauigkeitssteigerung zu erreichen sein wird, mag allerdings bezweifelt werden.



Mit der Anwendung der zusätzlichen Parameter fallen bei jeder Blockausgleichung Angaben über Größe, Typ und Konstanz der systematischen Bild- oder Modelldeformationen an. Nach den ersten Erfahrungen kann vermutet werden, daß nur wenige Typen mit vielleicht erstaunlich geringer Variation von primärer Bedeutung sind. Es ist daher eine dringende Aufgabe, umfangreiches Bildmaterial aus der regulären Praxis auf die Konstanz bzw. Streubreite der Bild- oder Modelldeformationen zu analysieren. Es ist denkbar, daß für eine gegebene Kammer, Kassette oder Filmrolle die Deformationen unerwartet konstant ausfallen. Daraus könnten einerseits Folgerungen z.B. über a priori vorzugebene Modelldeformationen gezogen oder Hinweise auf die mögliche Verbesserung der Aufnahmesysteme gewonnen werden.

Tabelle 1 Wirksamkeit verschiedener Korrekturverfahren, empirische Ergebnisse

	Paßpunkte		Blockausgl. unabhängiger Modelle	empirische Korrektur (Schilcher)	Blockausgl. mit zusätzl. Parametern	kl. Quadrate-Interpolation
Testblock "Oberschwaben" WW Block Frankfurt (8 Streifen, 200 Modelle) q = 20 %	Lage Rand i = 2b	$\sigma_{oL}$	6,9 $\mu\text{m}$	4,6 $\mu\text{m}$	4,3* $\mu\text{m}$	8,1 $\mu\text{m}$
		$\mu_{x,y}$	12,1 (9,9)*	8,5	6,3**	
	+ Raster 4b 4 Ecken	$\mu_{x,y}$	10,3			
		$\sigma_{oL}$	6,3	4,6		
	Höhen Ketten i = 2b	$\mu_{x,y}$	45,3	29,8		
		$\sigma_{oH}$	8,4 (8,4)*	8,2	8,3**	
		$\mu_{x,y}$	12,9 (14,4)*	12,9	14,4*	
		3 Ketten i = 12,5b	$\sigma_{oH}$	8,4 (8,3)*	8,1	
$\mu_z$			19,0 (22,1)*	14,9	19,2**	
Testblock "Oberschwaben" WW, q = 60 % (15, Streifen, 375 Modelle)		Lage 4 Ecken	$\sigma_{oL}$	6,0	6,1	
	$\mu_{x,y}$		24,6	16,4		
	Höhen 3 Ketten i = 12,5b	$\sigma_{oH}$	8,9	7,9		
		$\mu_z$	54,7	21,9		
WW-Block "Appenweier" q = 20 % (112 Modelle)	Rand + Innenpunkte	$\sigma_{oL}$	4,9	3,6	3,7	
		$\mu_{x,y}$	7,8	5,3	5,6	

\*) Teilgebiet von 100 Modellen

**Tabelle 2** Theoretische Wirksamkeit der kleinste-Quadrate-Interpolation bei vorgegebener systematischer Modell-Lagedeformation, ohne Berücksichtigung zufälliger Fehler (Blockgröße 200 Modelle, Modelldeformationen jeweils 5  $\mu\text{m}$  in den Modellecken; Flugrichtung benachbarter Streifen jeweils entgegengesetzt)

Fehlertyp	Iaßpunkte für Blockausgleichung	Stützpunkte für Interpolation	Genauigkeit des Blocks			
			nach Blockausgleichung		nach kl. Quadrate Interpolation	
			$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_x$	$\sigma_y$
e (Maßstabsaffinität)	4 (Ecken)	40, Rand, $i = 2b$	5,3 $\mu\text{m}$	5,4 $\mu\text{m}$	1,1 $\mu\text{m}$	1,0 $\mu\text{m}$
	40 (Rand)	40, Rand, $i = 2b$	0,3	0,4	0,3	0,2
	4 (Ecken)	49, Rand, $i = 2$ + Raster 5b x 5b	5,3	5,3	0,6	0,5
	40 (Rand)	49, Rand, $i = 2$ + Raster 5b x 5b	0,3	0,3	0,1	0,1
f Winkelaffinität (Scherung)	4 (Ecken)	50, Rand, $i = 2b$ + Raster 4b x 4b	5,4	5,3	0,2	0,3
	40 (Rand)	56, Rand, $i = 2$ + Raster 4b x 4b	0,4	0,3	0,1	0,1
p 	4 (Ecken)	40, Rand, $i = 2b$	0,5	0,4	0,4	0,2
	16 (Rand)	40, Rand, $i = 2b$	0,5	0,3	0,4	0,1
q 	4 (Ecken)	40, Rand, $i = 2b$	0,4	0,5	0,1	0,5
	16 (Rand)	40, Rand, $i = 2b$	0,3	0,5	0,1	0,5

**Tabelle 3** Verbesserung der Absolutgenauigkeit ausgeglichener Blöcke durch die kleinste Quadrate-Interpolation; kontrollierte praktische Beispiele

Block	Paßpunkte vorläufige Blockausgleichung	Stützpunkte Interpolation	absolute Genauigkeit	
			nach Blockausgleichung $\mu_{x,y}$ $\mu_z$ ( $\mu\text{m}$ )	nach Interpolation $\mu_{x,y}$ $\mu_z$ ( $\mu\text{m}$ )
Oberschwaben WW, $q = 60\%$ 375 Modelle	4 Eckpunkte	Maschen 2b x 4b	12,8	
	4 Eckpunkte	Rand $i = 2b$ 4b x 4b	16,8	12,6
Oberschwaben WW, $q = 20\%$ Block Frankfurt	Maschen 2b x 2b		12,9	
	Rand $i = 2b$ , Maschen 4b x 4b		10,3	8,1
Appenweier, WW 4-fach Block 448 Modelle	Rand $i = 2b$ , Maschen 4b x 4b		7,3	
	28 Randpunkte		4,2	3,2
	30 Punkte, verteilt		4,5	3,4
Appenweier, WW 4 Einzelblöcke $q = 20\%$ je 112 Modelle	25 Randpunkte		6,5	5,7
	27 Punkte, verteilt		6,8	5,6

Abb. 1  
Blockdeformation nach Blockausgleichung  
mit unabhängigen Modellen  
4 Paßpunkte  
Systematischer Fehler Typ e (Maßstabsaffinität)

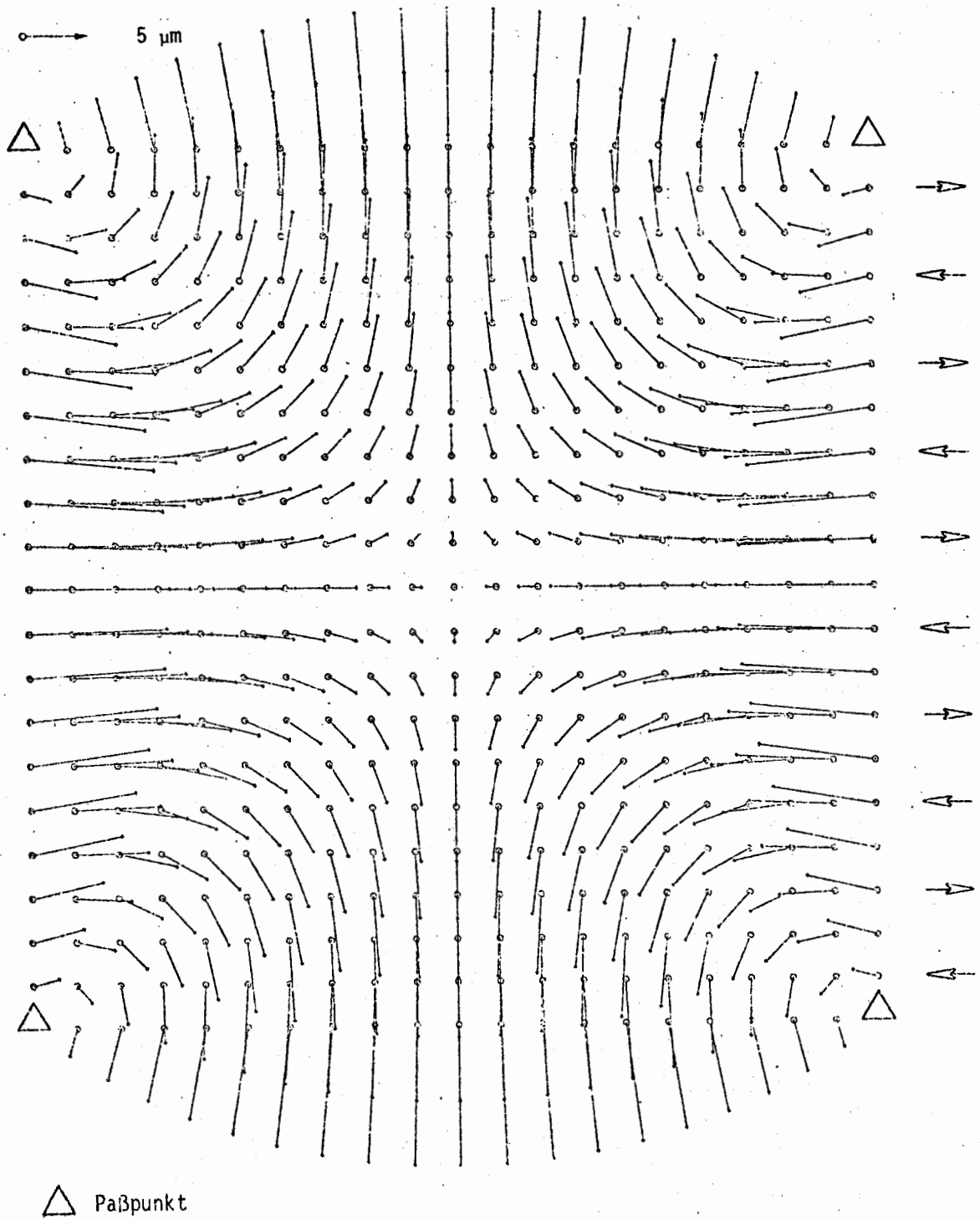
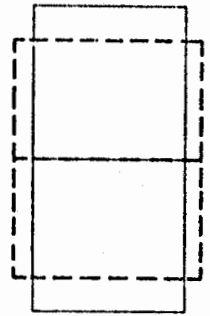
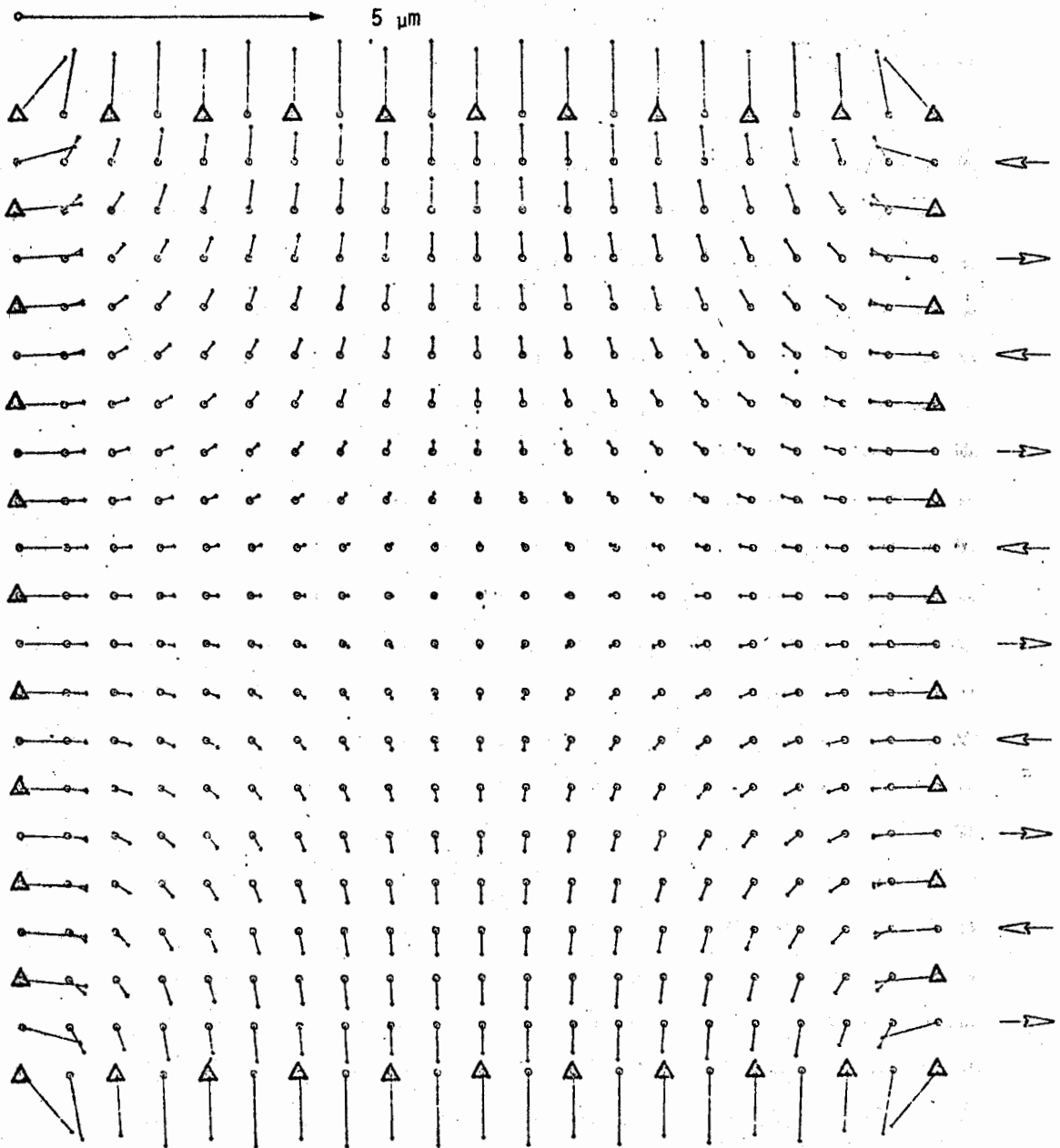
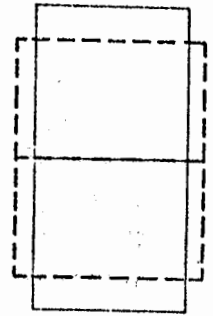


Abb. 2

Blockdeformation nach Blockausgleichung  
mit unabhängigen Modellen

Paßpunkt-Randbesetzung ( $i = 2b$ )

Systematischer Fehler Typ e (Maßstabsaffinität)



△ Paßpunkt

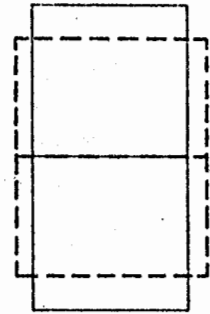
Abb. 3

Blockdeformation nach Blockausgleichung  
 und kl.Qu.Interpolation

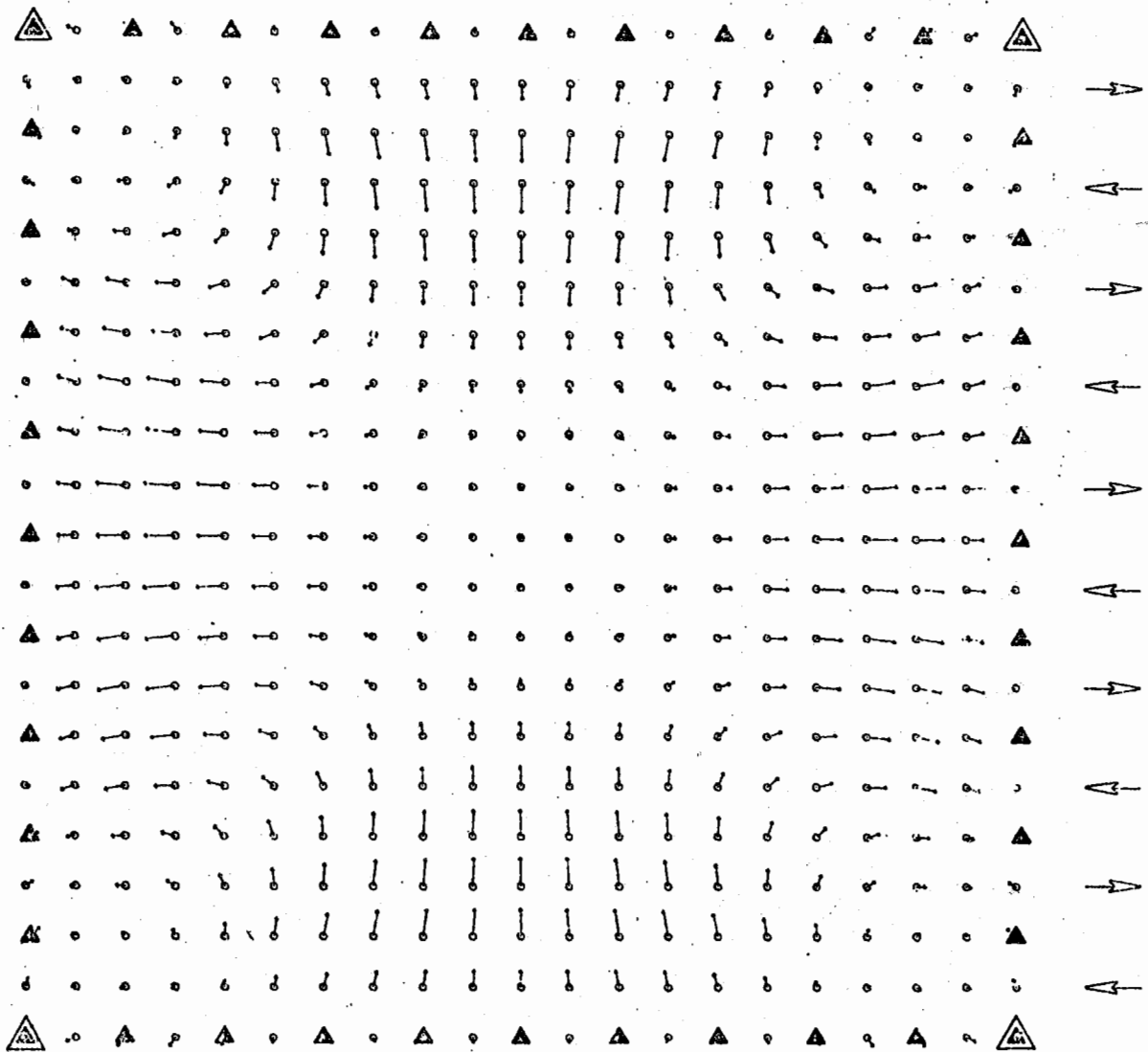
Blockausgleichung mit 4 Paßpunkten

Interpolation mit 40 Stützpunkten am Rand ( $i = 2b$ )

Systematischer Fehler Typ e (Maßstabsaffinität)



→ 5 μm



△ Paßpunkt der Blockausgleichung

▲ Stützpunkt der Interpolation

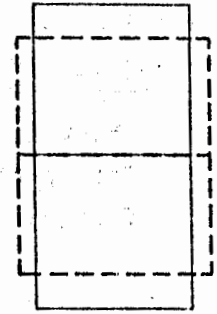
Abb. 4

Blockdeformation nach Blockausgleichung  
 und kl.Qu.Interpolation

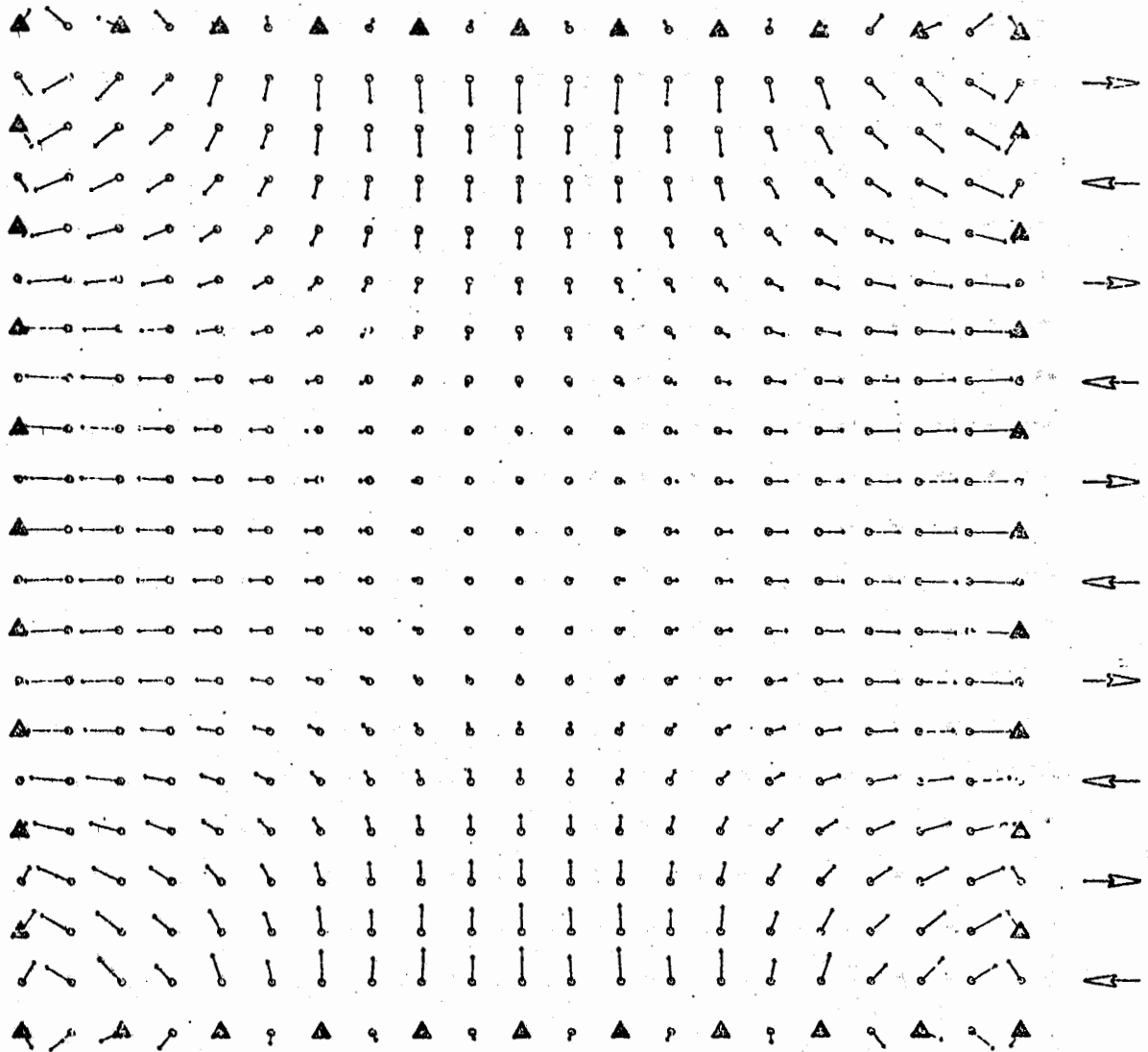
Blockausgleichung mit Paßpunkt-Randbesetzung ( $i = 2b$ )

Interpolation mit Stützpunkt-Randbesetzung ( $i = 2b$ )

Systematischer Fehler Typ e (Maßstabsaffinität)



→ 5  $\mu$ m



▲ Paßpunkt der Blockausgleichung und Stützpunkt der Interpolation

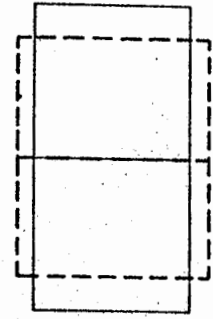
Abb, 5

Blockdeformation nach Blockausgleichung  
 und kl.Qu.Interpolation

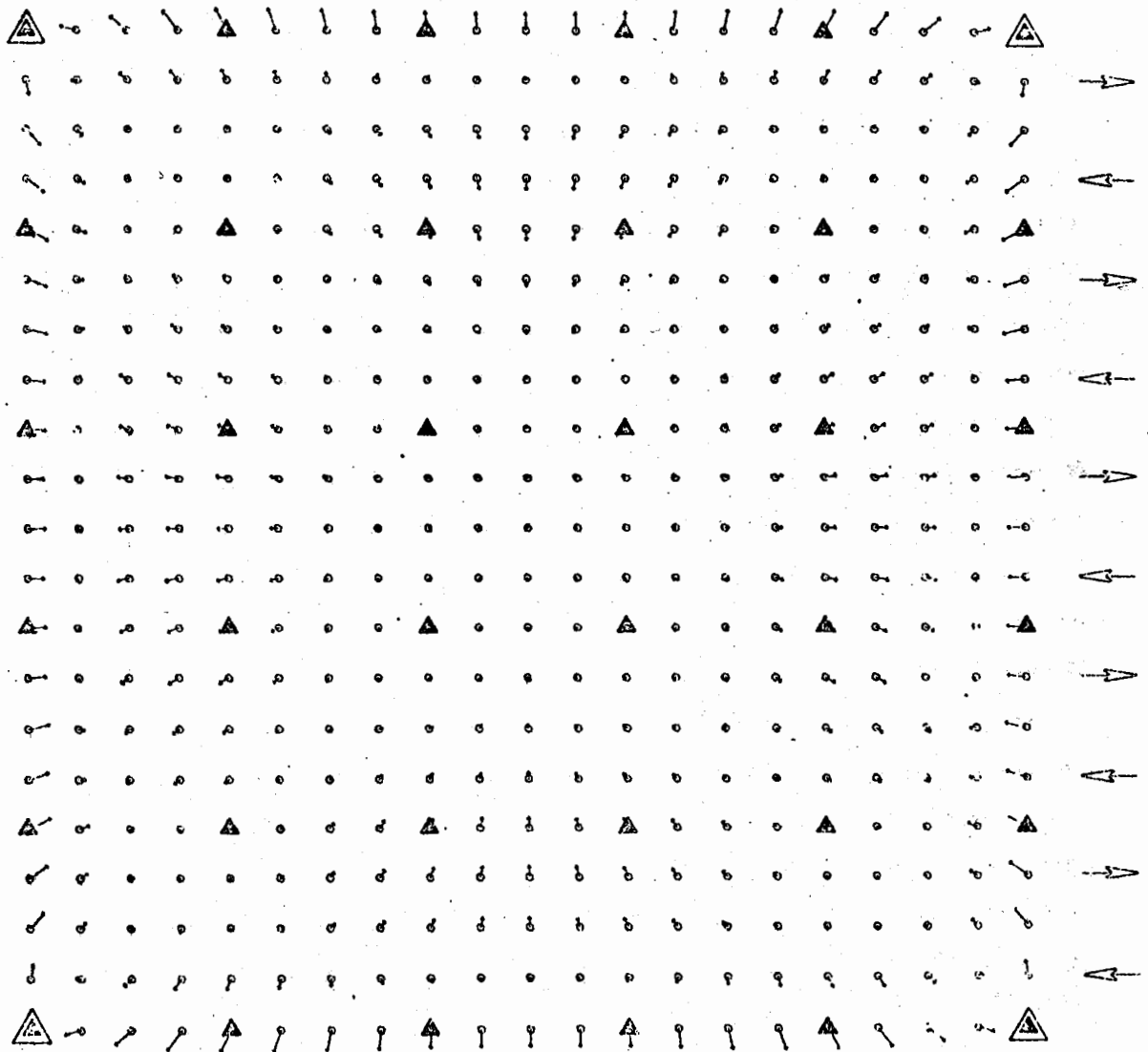
Blockausgleichung mit 4 Paßpunkten



Interpolation mit 36 Stützpunkten (Raster,  $i = 4b$ )

Systematischer Fehler Typ e (Maßstabsaffinität)



5  $\mu\text{m}$



-  Paßpunkt der Blockausgleichung
-  Stützpunkt der Interpolation