

Sonderdruck aus der „Zeitschrift für Vermessungswesen“

98. Jahrgang 1973, Heft 4

(Verlag Konrad Wittwer in Stuttgart)

Prädiktion und Filterung mit zwei verschiedenen Stützpunkt-Gruppen

Von KARL KRAUS, Stuttgart

DK 519.283+512.52:519.281

Prädiktion und Filterung mit zwei verschiedenen Stützpunkt-Gruppen

Von KARL KRAUS, Stuttgart

Summary: When using least-squares interpolation and filtering it has been presumed up to now that all reference points belong to the same statistical population. This assumption cannot be kept up for some practical applications. In this paper the method of least squares interpolation and filtering is extended in such a way that the reference points may be divided into two classes and that there is less correlation between the two classes than between the reference points within one individual class. The efficiency of least-squares interpolation and filtering being extended like this is demonstrated by simulated examples. At last some possible applications are indicated.

Zusammenfassung: Bei der Interpolation und Filterung nach kleinsten Quadraten setzt man bisher voraus, daß alle Stützpunkte der gleichen statistischen Grundgesamtheit angehören. Diese Voraussetzung läßt sich für einige Anwendungen in der Praxis nicht aufrecht erhalten. In diesem Aufsatz wird

die Interpolation und Filterung nach kleinsten Quadraten dahingehend erweitert, daß die Stützpunkte in *zwei* Gruppen aufgeteilt sein können und die beiden Gruppen miteinander weniger korreliert sind als die Stützpunkte innerhalb der jeweiligen Gruppe. Die Stützpunkte innerhalb der jeweiligen Gruppe. Die eine Gruppe ist mit P und die andere mit Q bezeichnet. Spaltet man von den ursprünglichen Stützwerten L^p und L^q die unregelmäßigen Anteile r^p und r^q ab, repräsentieren die so verbesserten Stützwerte der beiden Gruppen zwei mehr oder weniger gegeneinander versetzte Funktionen. Die Funktion, die in der Abb. 1 vermittelnd zwischen den beiden versetzten Funktionen verläuft, wird als Ergebnis des gestellten Interpolationsproblems angesehen.

1. Problemstellung

In Abb. 1 ist ein interessantes Interpolationsproblem skizziert, das — wie später gezeigt wird — in der Praxis eine gewisse Rolle spielt. Man hat *zwei Gruppen* von Stützpunkten, die voneinander weniger abhängig sind als die Stützpunkte innerhalb der jeweiligen Gruppe. Die eine Gruppe ist mit P und die andere mit Q bezeichnet. Spaltet man von den ursprünglichen Stützwerten L^p und L^q die unregelmäßigen Anteile r^p und r^q ab, repräsentieren die so verbesserten Stützwerte der beiden Gruppen zwei mehr oder weniger gegeneinander versetzte Funktionen. Die Funktion, die in der Abb. 1 vermittelnd zwischen den beiden versetzten Funktionen verläuft, wird als Ergebnis des gestellten Interpolationsproblems angesehen.

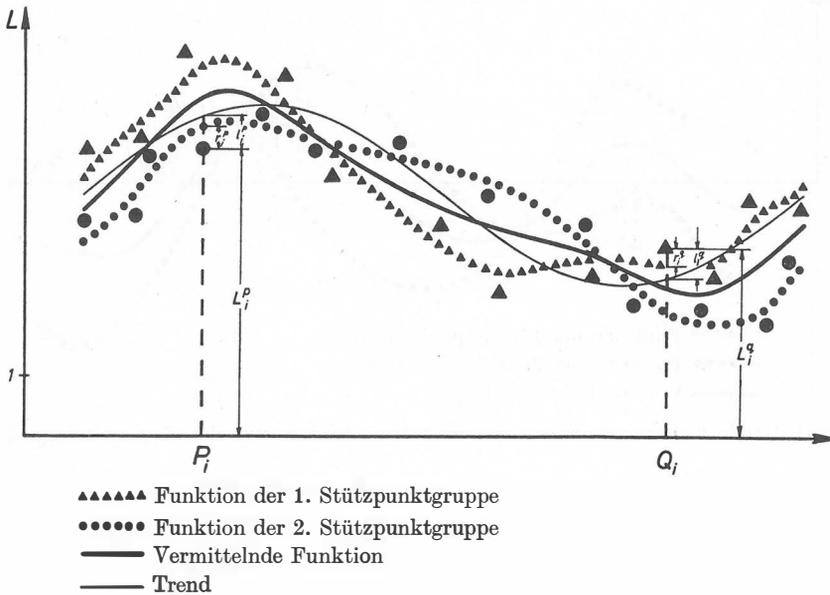


Abb. 1. Vermittelnde Funktion zwischen den ursprünglichen Stützwerten der beiden Stützpunktgruppen

Die gesamte Aufgabe enthält demnach eine Filterung der ursprünglichen Stützwerte und die Prädiktion einer ausgleichenden Kurve unter der Annahme, daß die beiden Gruppen der gefilterten Stützwerte jeweils für sich eine Funktion beschreiben. Abgesehen von der Einschränkung, daß keine Diskontinuitäten auftreten dürfen, ist über den Verlauf der Funktionen nichts bekannt.

Im Hinblick auf die Anwendungsmöglichkeiten ist die Problemstellung der Abb. 1 dahingehend zu erweitern, daß die Stützpunkte oftmals nicht entlang einer Geraden sondern zweidimensional in einer Ebene angeordnet sind und anstelle einer ausgleichenden Kurve eine Fläche gesucht ist.

Grundsätzlich kann die gestellte Aufgabe mit Polynomapproximationen gelöst werden. Allerdings tritt dabei immer das Problem der richtigen Wahl des Polynomgrades auf. Wählt man zu wenig Parameter, ist die Funktion nicht elastisch genug; wählt man zu viele, verläuft die Funktion in stützpunktarmen Bereichen mehr oder weniger unkontrolliert.

Für das einfachere Interpolationsproblem ausgehend von Stützwerten einer einheitlichen Gruppe verwenden wir am Institut für Photogrammetrie mit gutem Erfolg die sogenannte

Interpolation nach kleinsten Quadraten bzw. die lineare Prädiktion [KRAUS, 1972], [KRAUS, MIKHAIL, 1972]. Bei dieser Methode muß über den Verlauf der Funktionen nichts bekannt sein. Es wird lediglich ein kontinuierlicher Funktionsverlauf vorausgesetzt, obwohl — wie in [KRAUS, 1973] angedeutet — mit dieser Methode grundsätzlich auch Diskontinuitäten bewältigt werden können. In diesem Aufsatz wird die Interpolation nach kleinsten Quadraten so erweitert, daß auch das in Abb. 1 angedeutete Interpolationsproblem mit Stützwerten aus zwei verschiedenen Gruppen gelöst werden kann.

Bei der linearen Prädiktion geht man im allgemeinen in zwei Schritten vor: Zuerst wird der Trend — z. B. mit einem stark überbestimmten Polynom (Abb. 1) — abgespalten und diese sogenannten zentrierten Stützwerte l^p und l^q (Abb. 2) sind dann die Eingangsgrößen in die Grundgleichung der Interpolation nach kleinsten Quadraten¹⁾. Die übrigen Parameter dieser Grundgleichung sind Varianzen sowie Auto- und Kreuz-Kovarianzen. Der eigentlichen Interpolation nach kleinsten Quadraten ist deshalb ein gesonderter Abschnitt über diese stochastischen Größen vorangestellt.

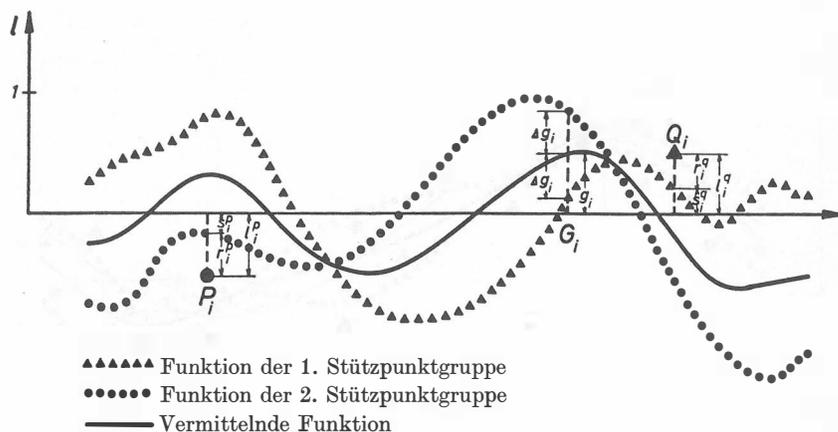


Abb. 2. Vermittelnde Funktion zwischen den zentrierten Stützwerten der beiden Stützpunktgruppen

2. Varianzen, Auto- und Kreuzkovarianzfunktionen

Für die Betrachtungen dieses Abschnittes wird angenommen, daß Abb. 2 nur einen Ausschnitt eines unendlich großen Interpolationsgebietes darstellt und daß unendlich viele, sehr eng benachbarte Stützpunkte gegeben sind ($n^p \rightarrow \infty$, $n^q \rightarrow \infty$).

Die zentrierten Stützwerte l^p und l^q setzen sich aus unregelmäßigen Komponenten r^p und r^q sowie sogenannten korrelierten Komponenten s^p und s^q zusammen (Abb. 2):

$$l_i^p = s_i^p + r_i^p, \quad l_i^q = s_i^q + r_i^q. \quad (1)$$

Die unregelmäßigen Komponenten sind innerhalb der jeweiligen Gruppe und zwischen den Gruppen stochastisch unabhängig, d. h. sie wechseln von Punkt zu Punkt den Betrag und das Vorzeichen nach den bekannten Zufallskriterien. Dagegen sind die korrelierten Komponenten innerhalb der jeweiligen Gruppe in der Weise voneinander abhängig, daß die

1) Diese zweistufige Annäherung ist auch in theoretischen Arbeiten über die lineare Prädiktion [MORITZ, 1970] begründet. Allerdings besagt die Theorie, daß bei der ersten Stufe, der Abspaltung des Trends, die Korrelationen der ursprünglichen Stützwerte zu berücksichtigen sind. Bei den im 4. Abschnitt angedeuteten Anwendungsmöglichkeiten sind diese Korrelationen aber nicht bekannt bzw. nur sehr umständlich zu ermitteln und sie werden daher in der Praxis bei der Bestimmung des Trends meistens nicht berücksichtigt. Die bisherigen umfangreichen praktischen Erfahrungen mit der Methode haben außerdem ergeben, daß man bei der Bestimmung des Trends grundsätzlich sehr großzügig sein kann. In Zukunft bietet eventuell der Übergang von der linearen auf die von [GRAFAREND, 1972] beschriebene nichtlineare Prädiktion die Möglichkeit, ganz auf die vorausgehende Abspaltung des Trends zu verzichten.

Korrelationskoeffizienten zwischen benachbarten Punkten mit kleiner werdendem Abstand von Null bis Eins anwachsen.

Die gesuchten Funktionswerte g_i in den einzelnen Interpolationspunkten G_i sind als arithmetisches Mittel der darüber- und darunterliegenden korrelierten Komponenten s_i^p und s_i^q aufzufassen, was sich wie folgt ausdrücken läßt (Abb. 2):

$$s_i^p = g_i + \Delta g_i, \quad s_i^q = g_i - \Delta g_i. \quad (2)$$

Damit lauten die Gleichungen (1):

$$l_i^p = g_i + \Delta g_i + r_i^p, \quad l_i^q = g_i - \Delta g_i + r_i^q. \quad (3)$$

Die Varianzen V_l^p und V_l^q der beiden Stützwertgruppen l^p und l^q ergeben sich dann aus:

$$V_l^p = \frac{[l_i^p l_i^p]}{n^p} = \frac{1}{n^p} ([g_i g_i] + [\Delta g_i \Delta g_i] + [r_i r_i] + 2[g_i \Delta g_i] + 2[g_i r_i^p] + 2[\Delta g_i r_i^p]) \quad n^p \rightarrow \infty.$$

Wegen der stochastischen Unabhängigkeit von g und Δg , ebenso von r^p und g bzw. Δg verschwinden die drei letzten Glieder und wir erhalten für die Varianz V_l^p und in gleicher Weise für die Varianz V_l^q :

$$V_l^p = V_g + V_{\Delta g} + V_r^p, \quad V_l^q = V_g + V_{\Delta g} + V_r^q. \quad (4)$$

Die beiden Varianzen sind in der Abb. 3 auf der Ordinatenachse aufgetragen. Dabei wurden gleiche Varianzen V_r^p und V_r^q angenommen, wovon man in der Praxis auch meistens ausgehen kann.

Für die Kovarianzen ist es ausreichend, sie in Abhängigkeit der Entfernung d darzustellen. Man muß dabei zwischen den Autokovarianzen $C(\overline{P_i P_k})$ bzw. $C(\overline{Q_i Q_k})$ innerhalb der jeweiligen Stützwertgruppe und den Kreuzkovarianzen $C(\overline{P_i Q_k})$ der beiden verschiedenen Gruppen unterscheiden. Zur Bestimmung dieser Kovarianzen bildet man mehrere Entfernungsintervalle $d - \Delta d \leq \overline{P_i P_k} \leq d + \Delta d$ bzw. $d - \Delta d \leq \overline{Q_i Q_k} \leq d + \Delta d$ bzw. $d - \Delta d \leq \overline{P_i Q_k} \leq d + \Delta d$ und bestimmt aus den Stützwerten jeweils folgende Kovarianzen:

$$C(\overline{P_i P_k}) = \frac{[l_i^p l_k^p]}{n_{ik}^p} = \frac{1}{n_{ik}^p} ([g_i g_k] + [\Delta g_i \Delta g_k] + [r_i^p r_k^p] + [g_i \Delta g_k] + [g_i r_k^p] + [\Delta g_i g_k] + [\Delta g_i r_k^p] + [r_i^p \Delta g_k] + [r_i^p g_k])$$

$$\Delta d \rightarrow 0 \quad n_{ik}^p \rightarrow \infty.$$

Infolge der bereits genannten Unabhängigkeit zwischen verschiedenen Komponenten und der Unabhängigkeit der unregelmäßigen Anteile r_i^p und r_k^p bleiben nur die beiden ersten Glieder übrig:

$$C(\overline{P_i P_k}) = \frac{[l_i^p l_k^p]}{n_{ik}^p} = \frac{1}{n_{ik}^p} ([g_i g_k] + [\Delta g_i \Delta g_k]). \quad (5)$$

Auf die gleiche Weise erhält man die Autokovarianzen der zweiten Stützwertgruppe

$$C(\overline{Q_i Q_k}) = \frac{[l_i^q l_k^q]}{n_{ik}^q} = \frac{1}{n_{ik}^q} ([g_i g_k] + [\Delta g_i \Delta g_k]) \quad (5)$$

und die Kreuzkovarianzen zwischen den beiden Gruppen

$$C(\overline{P_i Q_k}) = \frac{[l_i^p l_k^q]}{n_{ik}^{pq}} = \frac{1}{n_{ik}^{pq}} ([g_i g_k] - [\Delta g_i \Delta g_k]). \quad (6)$$

Wie man aus der Abb. 2 erkennt, hängen die Kovarianzen (5) und (6) von der Entfernung d ab. Diesen funktionellen Zusammenhang bezeichnet man als Kovarianzfunktion. In Abb. 3 sind die aus den Kovarianzen (5) hervorgehende Autokovarianzfunktion und die aus den Kovarianzen (6) hervorgehende Kreuzkovarianzfunktion dargestellt. Sie haben die Form

3. Interpolation und Filterung nach kleinsten Quadraten

Den Zusammenhang des geschätzten Wertes u im Interpolationspunkt G (Abb. 2) — zur Unterscheidung vom Erwartungswert g mit u bezeichnet — und den zentrierten Stützwerten l beschreibt folgende Grundgleichung der Interpolation nach kleinsten Quadraten²⁾:

$$u = c' C l. \tag{10}$$

Im Vektor c sind die Kovarianzen zwischen dem Interpolationspunkt und den Stützpunkten zusammengefaßt. Die Matrix C enthält entlang der Hauptdiagonalen die Varianz und außerhalb der Hauptdiagonalen die Kovarianzen zwischen den Stützpunkten. Nach den Bemerkungen des vorhergehenden Abschnitts hat man demnach folgende Varianzen und Kovarianzen einzuführen, die alle mit Hilfe der Entfernungen $\overline{GP}_i, \overline{GQ}_i, \overline{P_iP_k}, \overline{Q_iQ_k}, \overline{P_iQ_k}$ aus den Kovarianzfunktionen der Abb. 3 entnommen werden können:

$$u = (C(\overline{GP}_1) \dots C(\overline{GP}_{n^p}), C(\overline{GQ}_1) \dots C(\overline{GQ}_{n^q})) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} V_l & C(\overline{P_1P_2}) \dots C(\overline{P_1P}_{n^p}), C(\overline{P_1Q_1}) \dots \dots \dots C(\overline{P_1Q}_{n^q}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & V_l & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & V_l & C(\overline{Q_1Q_2}) \dots C(\overline{Q_1Q}_{n^q}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & V_l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l_1^p \\ \vdots \\ l_{n^p}^p \\ l_1^q \\ \vdots \\ l_{n^q}^q \end{bmatrix} \tag{11}$$

symmetrisch

Diese Beziehung kann man nicht nur zur Interpolation, sondern auch zur Filterung, d.h. zur Aufspaltung der gegebenen Stützwerte in die unregelmäßigen und korrelierten Komponenten entsprechend der Gleichung (1), verwenden. Zu diesem Zweck läßt man den Interpolationspunkt G in die einzelnen Stützwerte P_i und Q_i wandern und erhält somit geschätzte Werte der korrelierten Komponenten s_i^p und s_i^q und damit auch Schätzungen für die unregelmäßigen Komponenten r_i^p und r_i^q .

Die Genauigkeit σ_u des Interpolationswertes u im jeweiligen Punkt G läßt sich aus der Gleichung³⁾

$$\sigma_u^2 = V_g - c' C^{-1} c \tag{12}$$

bestimmen.

4. Simuliertes Beispiel

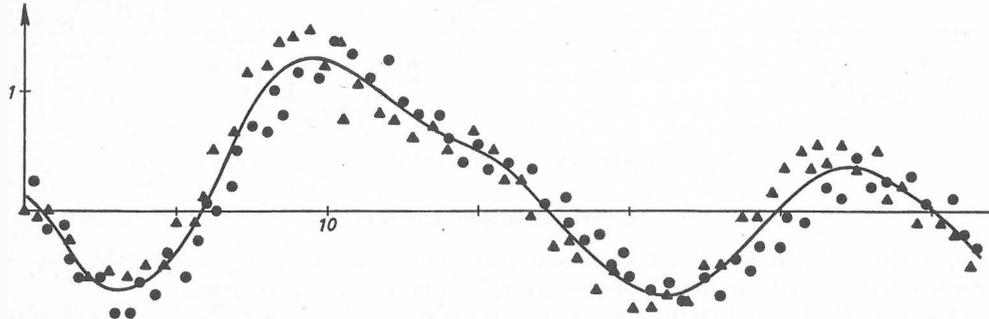


Abb. 4. Simuliertes Beispiel mit 60 bzw. 65 Stützpunkten

²⁾ Elementare Herleitungen dieser Gleichung wurden unter anderen von [KRAUS, 1972] und [LAUER, WROBEL, 1972] angegeben. Besonders zu erwähnen ist die Ableitung von [MORITZ, 1970], die von dem bekannten Minimumsprinzip der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate Gebrauch macht.

³⁾ Gleichung (8) der Veröffentlichung [KRAUS, 1972] in die erste Gleichung der Seite 6 jener Veröffentlichung eingesetzt.

Die Leistungsfähigkeit der Methode soll anhand des simulierten Beispiels der Abb. 4 demonstriert werden. Es wurden 60 bzw. 65 zentrierte Stützwerte in den beiden Stützpunktgruppen angenommen. Das Ergebnis der empirischen Bestimmung der Varianz sowie der Auto- und Kreuzkovarianzfunktionen — wie im Abschnitt 2. erläutert — ist in der Abb. 5 festgehalten. Die Interpolation und Filterung nach kleinsten Quadraten ergab die in der Abb. 4 eingezeichnete Funktion, die sehr plausibel vermittelnd zwischen den gegebenen Stützpunkten verläuft.

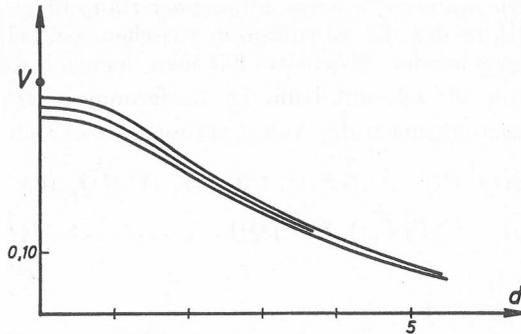


Abb. 5. Ergebnis der empirischen Kovarianzfunktionsbestimmungen des Beispiels der Abb. 4

In dem zweiten berechneten Beispiel (Abb. 6) überlagern sich die Stützwerte der beiden Gruppen nur in der Mitte, während am Rand jeweils nur die Stützpunkte einer der beiden Gruppen vertreten sind. Im Vergleich zur Abb. 5 ist deutlich zu erkennen, wie sich die interpolierte Funktion an den Enden des Überlappungsbereichs den Stützpunkten der jeweiligen Gruppe allmählich anschmiegt. Dabei ist besonders hervorzuheben, daß keine Inhomogenitäten an den beiden Enden des Überlappungsbereiches auftreten.

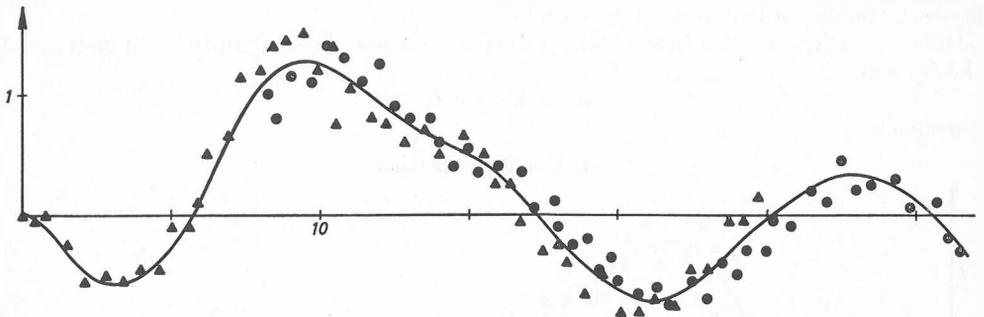


Abb. 6. Simuliertes Beispiel mit jeweils 46 Stützpunkten in jeder Gruppe

5. Anwendungsmöglichkeiten

Die profilweise Erfassung der Höheninformation durch mäanderförmiges Abfahren der Stereomodelle gewinnt in der Photogrammetrie immer mehr an Bedeutung:

- Die manuelle Profilabtastung kann im Vergleich zur direkten Höhenlinienauswertung etwa in der halben Zeit durchgeführt werden und
- die *automatische* Profilabtastung ist an Stereoauswertegeräten mit der Zusatzeinrichtung der Bildkorrelatoren [HARDY, 1970] bereits realisiert.

Einer noch schnelleren manuellen wie auch automatischen Abtastung steht vor allem der sogenannte Abtastfehler entgegen, der stark von der Abfahrriichtung und Abfahrtgeschwindigkeit sowie von der Geländeform abhängt [SCHNEIDER, 1969]. Die Wirtschaftlichkeit der profilweisen Auswertung kann man demnach dadurch weiter steigern, indem man mit

höheren Geschwindigkeiten abtastet und bewußt einen größeren Abtastfehler in Kauf nimmt, den man anschließend auf *rechnerischem* Wege zum Teil wieder kompensiert. Für diese rechnerische Nachbehandlung eignen sich besonders die Interpolation und Filterung mit zwei verschiedenen Stützpunkt-Gruppen. Alle Profile der Hinmessung repräsentieren die erste und alle Profile der Rückmessung die zweite Stützpunktgruppe. Die aus der Prädiktion und Filterung hervorgehende ausgleichende Fläche ist frei von dem Anteil des Abtastfehlers, der sich in den benachbarten Profilen in entgegengesetzter Richtung auswirkt.

Die in [KRAUS, 1971] angegebene und inzwischen programmtechnisch [STANGER, 1973] verwirklichte Konzeption, wie aus beliebig verteilten Stützpunkten ein engmaschiges quadratisches Raster als digitales Geländemodell und Höhenlinien gewonnen werden können, ist demnach dahingehend zu erweitern, daß vorher an den registrierten *Profilpunkten* der Abtastfehler herauszufiltern ist. Zum anderen kann diese Theorie in eine Leistungssteigerung der Orthophototechnik umgemünzt werden, indem man diese rechnerisch verbesserten Profile zur digitalen Steuerung des Orthoprojektors verwendet.

Ein ähnliches Interpolationsproblem tritt im Überlappungsbereich von zwei Stereomodellen auf, in dem mehr oder weniger unabhängige absolute Bestimmungen auf engem Raum zusammenkommen und wegen verschiedener Fehlereinflüsse Inhomogenitäten auftreten. Gehen wir ebenfalls von einer punktwisen Auswertung der Höheninformation in beiden Modellen aus, repräsentieren die Höhenpunkte des einen Modells die Stützpunkte der ersten und die des anderen Modells die Stützpunkte der zweiten Gruppe. Die aus der Gleichung (11) hervorgehenden Funktionswerte liegen vermittelnd zwischen den Höhenpunkten der beiden Modelle.

Ähnliche Anwendungsmöglichkeiten wie in der Photogrammetrie gibt es auch in anderen geodätischen Aufgabenstellungen. Ohne darauf näher einzugehen, sei abschließend nur die elementare Aufgabe der Vereinigung von zwei Beobachtungsreihen genannt. In diesem Fall ist die Abszissenachse der Abb. 4 als Zeitskala zu interpretieren und die zwei Stützpunktgruppen sind als Beobachtungen — z. B. an zwei verschiedenen Tagen — einer mehr oder weniger mit dem Tagesablauf periodischen Erscheinung aufzufassen. Die ausgleichende Kurve bedeutet somit die gesuchte Gesetzmäßigkeit. Man erhält sie, obwohl die Beobachtungen an den beiden verschiedenen Tagen nicht zu den gleichen Zeitpunkten durchgeführt wurden und die beiden Beobachtungsreihen infolge veränderter Meßbedingungen etwas gegeneinander versetzt sind.

Literatur

- GRAFAREND, E.: Nichtlineare Prädiktion, ZfV 97, S. 245—255, 1972.
- HARDY, J. W.: Automatic Stereoplotting with the EC-5/Planimat, BuL. 38, S. 62—68, 1970.
- KRAUS, K.: Interpolation nach kleinsten Quadraten in der Photogrammetrie, BuL. 40, S. 4—12, 1972.
- KRAUS, K., und E. MIKHAIL: Linear least-squares Interpolation, Photogrammetric Engineering 38, S. 1016—1029, 1972.
- KRAUS, K.: Ein allgemeines digitales Geländemodell — Theorie und Anwendungsmöglichkeiten. Vortrag an der Technischen Akademie Eßlingen, Lehrgang: Numerische Photogrammetrie, Januar 1973.
- KRAUS, K.: Automatische Berechnung digitaler Höhenlinien, ZfV 96, S. 233—239, 1971.
- LAUER, S., und B. WROBEL: Eine elementare Herleitung der vektoriiellen Prädiktions-Filterung, ZfV 97, S. 97—104, 1972.
- MORITZ, H.: A generalized least-squares Model, Studia geoph. et geod. 14, S. 353—362, 1970.
- SCHNEIDER, H.: Experimentelle Untersuchungen über den Abtastfehler, BuL 37, S. 209—214, 1969.
- STANGER, W.: Das Stuttgarter Höhenlinienprogramm — Beschreibung und Ergebnisse. Vortrag an der Technischen Akademie Eßlingen, Lehrgang: Numerische Photogrammetrie, Januar 1973.