Sonderdruck aus der „Zeitschrift für Vermessungswesen“
98. Jahrgang 1973, Heft 9
(Verlag Konrad Wittwer in Stuttgart)

Zusätzliche Parameter in Ausgleichungen

Von H. Ebner, Stuttgart

Summary: The mathematical model of a least squares adjustment can be improved by the admission of additional parameters used as constants, unknowns or observations. It is shown that the concept of additional observations is the most general one. For the practical realisation of this concept three different facilities are presented. Although they are identic in theory the three versions guide to matrices with completely different structure and condition. The power of the concept is demonstrated in combination with the topical problem of block adjustment with additional parameters. The decision which version should be applied in practice depends on the type and number of the additional observations.

1. Einführung

Die Grundlage der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ist das mathematische Modell. Den funktionellen Zusammenhang zwischen den behandelten Konstanten, Unbekannten und Beobachtungen gibt das Funktionalmodell an. Das stochastische Modell ordnet den Beobachtungen eine Gewichtskoeffizientenmatrix zu, welche ihre Genauigkeitseigenschaften beschreibt.

Nun kann sich bei der praktischen Anwendung ergeben, daß das zugrundegelegte mathematische Modell für die Lösung der gestellten Aufgabe noch zu wenig leistungsfähig ist und daher verfeinert werden soll. Eine solche Verfeinerung kann durch die Aufnahme zusätzlicher Parameter in das mathematische Modell erfolgen. Diese Maßnahme läßt sich auch als Kompensation systematischer Modellfehler interpretieren.

In der Ausgleichung können diese zusätzlichen Parameter entweder als Konstante oder als Unbekannte oder als Beobachtungen behandelt werden. Ihre Integration in das Ausgleichungsproblem läuft auf eine Verallgemeinerung des Funktionalmodells oder des stochastischen Modells hinaus.

Die vorliegende Arbeit verfolgt die zweifache Absicht, die verschiedenen Möglichkeiten der ausgleichungstechnischen Behandlung zusätzlicher Parameter darzustellen und ihre Eigenschaften im Hinblick auf die praktische Anwendung zu diskutieren. Das Schwergewicht wird dabei auf die Behandlung zusätzlicher Parameter als Beobachtungen gelegt.

Wir gehen von einem linearen oder zuvor linearisierten Ausgleichungsproblem aus. Um die Darstellung übersichtlich zu halten und nicht vom wesentlichen abzulenken, legen wir das Standardproblem II: *Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen* zugrunde. Eine Verallgemeinerung für höhere Standardprobleme ist aber ohne prinzipielle Schwierigkeiten möglich.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{f}, \qquad \boldsymbol{G}_{bb} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}_0 \tag{2}$$

$\boldsymbol{b}$ = Vektor der Beobachtungen
$\boldsymbol{a}_0$ = Vektor der Konstanten
$\boldsymbol{v}$ = Vektor der Verbesserungen
$\boldsymbol{x}$ = Vektor der Unbekannten
$\boldsymbol{A}$ = Koeffizientenmatrix der Unbekannten
$\boldsymbol{p}$ = Vektor der zusätzlichen Parameter
$\boldsymbol{B}$ = Koeffizientenmatrix der zusätzlichen Parameter
$\boldsymbol{G}_{bb}$ = Gewichtskoeffizientenmatrix der Beobachtungen.

2. Zusätzliche Parameter als Konstante

Sind die zusätzlichen Parameter Konstante, so ist ihre ausgleichungstechnische Behandlung besonders einfach:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{k}), \qquad G_{bb} \tag{3}$$

$\boldsymbol{k}$ = Vektor der zusätzlichen Konstanten

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{G}_{bb}^{-1} \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{G}_{bb}^{-1} (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{k}) \tag{4}$$

Die praktische Anwendung sollte auf zusätzliche Parameter beschränkt werden, die nahezu fehlerfrei bekannt sind. Die Berücksichtigung der Erdkrümmung und der Kartenprojektion bei der photogrammetrischen Blockausgleichung sind Beispiele hierfür.

3. Zusätzliche Parameter als Unbekannte

Haben wir keinerlei Kenntnis über Betrag und Vorzeichen der zusätzlichen Parameter, so ist es angemessen, sie als Unbekannte zu behandeln:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}, \qquad G_{bb} \tag{5}$$

$\boldsymbol{y}$ = Vektor der zusätzlichen Unbekannten.
Faßt man die beiden Vektoren der Unbekannten zusammen, so gilt:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z} - \boldsymbol{f}, \qquad G_{bb} \tag{6}$$

mit

$$\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}] \tag{7}$$

$$\boldsymbol{z}^T = [\boldsymbol{x}^T \quad \boldsymbol{y}^T]. \tag{8}$$

Die Unbekannten z ergeben sich als

$$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{G}_{bb}^{-1} \boldsymbol{C})^{-1} \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{G}_{bb}^{-1} \boldsymbol{f}. \tag{9}$$

Schmid behandelt auf diese Weise die zusätzlichen Parameter für die Orientierung von Satellitenaufnahmen [1]. Dieselbe Konzeption liegt auch der Bündelausgleichung mit zusätzlichen Parametern von Bauer und Müller zugrunde [2].

Bei der Einführung zusätzlicher Unbekannter ist stets sicherzustellen, daß alle Unbekannten linear unabhängig und darüberhinaus von möglichst unterschiedlicher Wirkung sind, da die Normalgleichungsmatrix $\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{G}_{bb}^{-1} \boldsymbol{C}$ ansonsten singulär oder zumindest schlecht konditioniert ist.

Durch die Einführung zusätzlicher Unbekannter wird aber auch die Fehlerfortpflanzung ungünstiger. Eine Beschränkung auf die effektivsten zusätzlichen Parameter ist bei dieser Konzeption daher unbedingt zu empfehlen.

4. Zusätzliche Parameter als Beobachtungen

Sobald die Genauigkeitseigenschaften der zusätzlichen Parameter zumindestens in etwa bekannt sind, ist es zweckmäßig sie als Beobachtungen zu behandeln. Für die ausgleichungstechnische Lösung stehen verschiedene Wege offen, die aber theoretisch zum gleichen Ergebnis führen. Sie werden im folgenden Kapitel aufgezeigt und durch einfache Zahlenbeispiele verdeutlicht. Gleichzeitig werden die konditionellen und damit numerischen Probleme, die sich bei den einzelnen Lösungen ergeben können, diskutiert.

Ein aktuelles Anwendungsbeispiel wird im Kapitel 4.2 behandelt. Hier zeigt sich auch, daß die verschiedenen Lösungen zu ganz unterschiedlichen Matrizenstrukturen führen. Je nach Art und Anzahl der zusätzlichen Parameter ist die eine oder die andere Lösungsvariante optimal.

4.1 *Ausgleichungstechnische Lösungen*

4.1.1 Variante 1

Die zusätzlichen Parameter werden zunächst als Unbekannte eingeführt. Danach wird dem Umstand Rechnung getragen, daß diese Unbekannten beobachtet sind. Der Ansatz geht auf Brown zurück [3].

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{G}_{bb} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{y} - \boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{G}_{ss} \tag{10a, 10b}$$

$\boldsymbol{s}$ = Vektor der zusätzlichen Beobachtungen
$\boldsymbol{v}_2$ = Vektor der zusätzlichen Verbesserungen
$\boldsymbol{E}$ = Einheitsmatrix
$\boldsymbol{G}_{ss}$ = Gewichtskoeffizientenmatrix der zusätzlichen Beobachtungen.

Aus (10) ergibt sich nach entsprechender Zusammenfassung

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{z} - \boldsymbol{h}, \qquad \boldsymbol{G}_{hh} \tag{11}$$

mit

$$\boldsymbol{v}_3^T = [\boldsymbol{v}_1^T \quad \boldsymbol{v}_2^T] \tag{12}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ 0 & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{h}^T = [\boldsymbol{f}^T \quad \boldsymbol{s}^T] \tag{14}$$

$$\boldsymbol{G}_{hh} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{bb} & \boldsymbol{G}_{bs} \\ \boldsymbol{G}_{bs}^T & \boldsymbol{G}_{ss} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Für $\boldsymbol{z}$ gilt wie zuvor Gl. (8). Die Existenz der Submatrix $\boldsymbol{G}_{bs}$ in (15) bedeutet, daß die Beobachtungen $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{s}$ korreliert sein dürfen.

Wie (11) zeigt, bleibt bei der Variante 1 das Standardproblem II erhalten. Die Unbekannten $\boldsymbol{z}$ ergeben sich zu:

$$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{D}^T \boldsymbol{G}_{hh}^{-1} \boldsymbol{D})^{-1} \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{G}_{hh}^{-1} \boldsymbol{h}. \tag{16}$$

Ein *Zahlenbeispiel* soll die Variante 1 verdeutlichen:

$$\begin{aligned} v_{11} &= x_1 - 2x_2 + 5y - 25 \\ v_{12} &= 7x_1 + 3x_2 - 9y + 21 \\ v_{13} &= -4x_1 + 2x_2 + 7y - 11 \\ v_{14} &= -5x_1 - 8x_2 - 3y + 9 \\ v_2 &= y - 5 \end{aligned} \qquad G_{hh} = \begin{bmatrix} 31 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 56 & 4 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 44 & 9 & -8 \\ 5 & 7 & 9 & 62 & -3 \\ 3 & -6 & -8 & -3 & 80 \end{bmatrix}$$

Die Lösung ergibt:

$$\begin{aligned} v_{11} &= 0.08435599 \\ v_{12} &= 0.36841523 \\ v_{13} &= 0.40340719 \\ v_{14} &= 0.27025970 \\ v_2 &= -1.29609400. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 2.65303626 \\ x_2 &= -1.95589487 \\ y &= 3.70390600 \end{aligned}$$

H. H. Schmid und E. Schmid haben darauf hingewiesen, daß die Behandlung von Parametern als Beobachtungen die allgemeinste Konzeption ist, die sowohl Konstante als auch Unbekannte mit einschließt [4]. Analog dazu sind zusätzliche Konstante und zusätzliche Unbekannte Sonderfälle zusätzlicher Beobachtungen. Dies kann ausgehend von (10) sehr einfach gezeigt werden.

Sollen die Beobachtungen s als Konstante k behandelt werden, so ist $\boldsymbol{G}_{ss} = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{G}_{bs} = \boldsymbol{0}$ zu setzen. Daraus folgt dann, daß die Verbesserungen $\boldsymbol{v}_2$ in (10b) zu Null und die Unbekannten $\boldsymbol{y}$ gleich den Konstanten $\boldsymbol{k}$ werden. Mit $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{k}$ aber wird (10a) auf (3) zurückgeführt.

Wird dagegen $\boldsymbol{G}_{ss} = \infty\,\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{G}_{bs} = \boldsymbol{0}$ gesetzt, so trägt (10b) nichts mehr zur Ausgleichung bei und kann daher weggelassen werden. Die allein verbleibende Beziehung (10a) behandelt die zusätzlichen Parameter dann nur noch als Unbekannte und ist mit (5) identisch.

Spezifische konditionelle Probleme treten bei der Variante 1 nicht auf. Zwar ergibt sich in den beiden eben behandelten Sonderfällen mit $\boldsymbol{G}_{ss} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{G}_{bs} = \boldsymbol{0}$ und mit $\boldsymbol{G}_{ss} = \infty\,\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{G}_{bs} = \boldsymbol{0}$ jeweils eine singuläre Normalgleichungsmatrix $\boldsymbol{G}_{hh}$, die Singularität läßt sich aber leicht vermeiden indem man $\boldsymbol{G}_{ss} = n\boldsymbol{E}$ setzt und n im ersten Fall sehr klein, im zweiten Fall aber entsprechend groß wählt.

Für die Inversion von $\boldsymbol{G}_{hh}$ gilt dann:

$$\boldsymbol{G}_{hh}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{bb} & \boldsymbol{0} \\ 0 & n\boldsymbol{E} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{bb}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ 0 & 1/n\,\boldsymbol{E} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Die weitere ausgleichungstechnische Behandlung nach (16) verläuft völlig problemlos.

4.1.2 Variante 2

Setzt man (10b) in (10a) ein, so werden die zusätzlichen Parameter ausschließlich als Beobachtungen behandelt.

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{v}_2) - \boldsymbol{f}, \qquad \boldsymbol{G}_{hh}. \tag{18}$$

Eine entsprechende Zusammenfassung führt hier auf das Standardproblem IV: *Bedingte Beobachtungen mit Unbekannten.*

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}, \qquad \boldsymbol{G}_{hh} \tag{19}$$

mit

$$\boldsymbol{U} = [-\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}] \tag{20}$$

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{s} = -\,\boldsymbol{U}\boldsymbol{h}. \tag{21}$$

Für $\boldsymbol{v}_3$, für $\boldsymbol{h}$ und für $\boldsymbol{G}_{hh}$ gelten wieder die Beziehungen (12), (14) und (15). Die gesuchten Verbesserungen und Unbekannten ergeben sich nach den Algorithmen des Standardproblems IV als

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{U}\boldsymbol{G}_{hh}\,\boldsymbol{U}^T)^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{U}\boldsymbol{G}_{hh}\,\boldsymbol{U}^T)^{-1}\boldsymbol{t} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{G}_{hh}\,\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{U}\boldsymbol{G}_{hh}\,\boldsymbol{U}^T)^{-1}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}) \tag{23}$$

und sind identisch mit den entsprechenden Ergebnissen der Variante 1. Die zusätzlichen Unbekannten ergeben sich aufgrund von (10b) als $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{v}_2$.

Mikhail stellt der Variante 1 eine eingeschränkte Variante 2 mit $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{f}$ gegenüber. Dementsprechend führen die beiden Varianten nur unter der Bedingung $\boldsymbol{s} = 0$ zu den gleichen Ergebnissen [5].

In der Formulierung der Variante 2 erhält das zuvor behandelte Zahlenbeispiel die folgende Form:

$$\begin{array}{llllrl}
-v_{11} & & & & +5v_2 + x_1 - 2x_2 = & 0\\
 & -v_{12} & & & -9v_2 + 7x_1 + 3x_2 = & 24\\
 & & -v_{13} & & +7v_2 - 4x_1 + 2x_2 = & 24\\
 & & & -v_{14} & -3v_2 - 5x_1 - 8x_2 = & 6.
\end{array}$$

Mit derselben Gewichtskoeffizientenmatrix G_{hh} wie bei Variante 1 ergibt die Lösung:

$$\begin{array}{llll}
v_{11} = & 0.08435600 & x_1 = & 2.65303626\\
v_{12} = & 0.36841525 & x_2 = & -1.95589488\\
v_{13} = & 0.40340721 & y\ = & s + v_2\\
v_{14} = & 0.27025971 & \ = & 3.70390597\\
v_2\ = & -1.29609403 & &
\end{array}$$

Die Differenzen gegenüber den Ergebnissen der Variante 1 betragen einige Einheiten der 8. Dezimale und entsprechen damit der Rechenschärfe der Anlage TR4, an welcher das Beispiel gerechnet wurde.

Der Sonderfall zusätzlicher Konstanter $s = k$ läßt sich bei der Variante 2 mit $\boldsymbol{G}_{ss} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{G}_{bs} = \boldsymbol{0}$ problemlos realisieren. Mit

$$\boldsymbol{G}_{hh} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{bb} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{24}$$

ergibt sich streng

$$(\boldsymbol{U}\boldsymbol{G}_{hh}\,\boldsymbol{U}^T)^{-1} = \boldsymbol{G}_{bb}^{-1}. \tag{25}$$

Dadurch wird (22) auf (4) zurückgeführt.

Demgegenüber ist der Sonderfall zusätzlicher Unbekannter mit $\boldsymbol{G}_{bs} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{G}_{ss} = n\boldsymbol{E}$ und sehr großem n aus konditionellen Gründen nicht realisierbar.

Mit

$$\boldsymbol{G}_{hh} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{bb} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & n\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \tag{26}$$

ergibt sich

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{G}_{hh}\,\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{G}_{bb} + n\,\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T. \tag{27}$$

Da der Rang von $\boldsymbol{B}$ stets kleiner ist als der Rang von $\boldsymbol{G}_{bb}$, ist $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T$ grundsätzlich singulär. Auf diese Weise wird die Kondition der Matrix (27) und damit auch die Rechenschärfe bei ihrer Inversion umso schlechter, je größer man n ansetzt. Bei sehr großem n wird die Matrix (27) praktisch singulär.

Während die Variante 1 universell anwendbar ist, muß die Anwendung der Variante 2 somit aus konditionellen Gründen auf zusätzliche Beobachtungen mit einer gewissen, im Einzelfall noch festzulegenden Minimalgenauigkeit beschränkt werden.

4.1.3 Variante 3

Durch Umformung kann (18) auf das Standardproblem II mit neuen, abgeleiteten Beobachtungen zurückgeführt werden. Es ergibt sich:

$$\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}, \qquad \boldsymbol{G}_{tt}. \tag{28}$$

Für $\boldsymbol{t}$ gilt die Beziehung (21), $\boldsymbol{v}_4$ ist der Vektor der Verbesserungen der abgeleiteten Beobachtungen $\boldsymbol{t}$.

$$\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{v}_2 = -\,\boldsymbol{U}\,\boldsymbol{v}_3. \tag{29}$$

Die Gewichtskoeffizientenmatrix $\boldsymbol{G}_{tt}$ ergibt sich durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf (21) zu:

$$\boldsymbol{G}_{tt} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{G}_{hh}\,\boldsymbol{U}^T. \tag{30}$$

Damit gilt für die Unbekannten:

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^T\,\boldsymbol{G}_{tt}^{-1}\,\boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{A}^T\,\boldsymbol{G}_{tt}^{-1}\,\boldsymbol{t}. \tag{31}$$

Mit der Beziehung (30) für $\boldsymbol{G}_{tt}$ ist (31) identisch mit (22). Die Unbekannten werden somit bei Variante 2 und Variante 3 auf dieselbe Weise berechnet. Im Gegensatz zur Variante 2 treten hier aber die Verbesserungen $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ nicht explizit in Erscheinung.

Die Variante 3 wird beispielsweise von Peters verwendet, wobei auf die Berücksichtigung von Korrelationen zwischen den beiden Gruppen von Beobachtungen allerdings verzichtet wird [6].

Das schon zuvor behandelte Zahlenbeispiel lautet in der Formulierung der Variante 3:

$$\begin{aligned} v_{41} &= x_1 - 2x_2 \\ v_{42} &= 7x_1 + 3x_2 - 24 \\ v_{43} &= -4x_1 + 2x_2 + 24 \\ v_{44} &= -5x_1 - 8x_2 - 6 \end{aligned} \qquad G_{tt} = \begin{bmatrix} 2001 & -3541 & 2818 & -1171 \\ -3541 & 6428 & -5066 & 2122 \\ 2818 & -5066 & 4076 & -1674 \\ -1171 & 2122 & -1674 & 764 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung ergibt:

$$\begin{aligned} v_{41} &= 6.56482602 \\ v_{42} &= -11.29643083 \\ v_{43} &= 9.47606520 \\ v_{44} &= 3.61802225 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 2.65303626 \\ x_2 &= -1.95589488 \end{aligned}$$

Die Unbekannten haben die gleichen Zahlenwerte wie bei Variante 2. Die Verbesserungen erfüllen bis auf einige Einheiten der 8. Dezimale die Gl. (29).

In bezug auf die Kondition gilt für die Variante 3 dasselbe wie für Variante 2 (siehe 4.1.2).

4.2 *Ein Anwendungsbeispiel*

Zusätzliche Beobachtungen haben sich im vorangegangenen Kapitel als Allgemeinfall zusätzlicher Parameter erwiesen. Die Leistungsfähigkeit dieser Konzeption soll nun anhand des aktuellen Beispiels der Blockausgleichung mit zusätzlichen Parametern demonstriert werden.

Dabei soll auch die Frage beantwortet werden, welche der Varianten, die im Kapitel 4.1 aufgezeigt wurden, für die Lösung des Problems am besten geeignet ist. Hier wird sich zeigen, daß die Antwort von der Art und Anzahl der zusätzlichen Parameter abhängig ist.

Die Behandlung zusätzlicher Parameter der Blockausgleichung als Beobachtungen

Die Blockausgleichung mit Einzelbildern wird in der Photogrammetrie und in der photographischen Positionsastronomie angewendet. In beiden Bereichen ist die Verfeinerung des mathematischen Modells durch zusätzliche Parameter bekannt. Diese sind entweder allen Bildern des Blocks gemeinsam [2] oder sie gelten jeweils nur für eine Gruppe von

Bildern mit vergleichbaren physikalischen Voraussetzungen [7], [8]. Schließlich besteht die Möglichkeit, für jedes Bild individuelle zusätzliche Parameter anzusetzen [9].

In den angeführten Arbeiten werden diese Parameter als zusätzliche Unbekannte in der Formulierung (5) behandelt. Der Ansatz läßt sich aber noch verallgemeinern, indem man für diese Unbekannten Beobachtungen s einführt und sie als Schätzwerte der zusätzlichen Parameter mit der Gewichtskoeffizientenmatrix $\boldsymbol{G}_{ss}$ behandelt.

Hat man keine besseren Schätzwerte, so wird man die Beobachtungen $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$ setzen und die quadratischen Gewichtskoeffizienten von $\boldsymbol{G}_{ss}$ direkt aufgrund der zu erwartenden Beträge der zusätzlichen Parameter festsetzen. Auf die Berücksichtigung von Korrelationen wird man verzichten ($\boldsymbol{G}_{ss}$ = Diagonalmatrix, $\boldsymbol{G}_{bs} = \boldsymbol{0}$). Nach der Ausgleichung kann überprüft werden, ob die a priori Gewichtskoeffizienten den erhaltenen Beträgen der zusätzlichen Parameter hinreichend gut entsprechen. Ist dies nicht der Fall, so ist die Ausgleichung mit verbesserten Annahmen für $\boldsymbol{G}_{ss}$ zu wiederholen.

Dieser Ansatz ermöglicht selbstverständlich auch eine ausgleichungstechnisch strenge Behandlung echt beobachteter zusätzlicher Parameter. Die Sonderfälle zusätzlicher Konstanter und zusätzlicher Unbekannter lassen sich auf die in 4.1 aufgezeigte Weise realisieren.

Diese allgemeine Konzeption ist von DE VEGT und vom Verfasser für die Blockausgleichung in der photographischen Positionsastronomie vorgeschlagen worden [10]. KUBIK erwähnt sie in Verbindung mit der Kompensation systematischer Fehler bei der Ausgleichung photogrammetrischer Blöcke [11].

Die Behandlung zusätzlicher Parameter der Blockausgleichung als Beobachtungen statt als Unbekannte hat zwei entscheidende praktische Vorteile.

Einmal ergibt sich eine Genauigkeitssteigerung, die umso größer ist, je kleiner die Beträge der zusätzlichen Parameter bzw. die quadratischen Gewichtskoeffizienten der Matrix $\boldsymbol{G}_{ss}$ sind. Da die Auswirkungen dieser Parameter auf die Bildkoordinaten zumeist nur die Größenordnung der Streuungen der Bildkoordinaten erreichen, kann der Genauigkeitsgewinn bei praktischen Anwendungen recht deutlich werden.

Zusätzliche Beobachtungen mit vergleichsweise kleinen quadratischen Gewichtskoeffizienten vermeiden aber auch die konditionellen Probleme, die sich bei zusätzlichen Unbekannten ergeben können (siehe Kapitel 3). Das Minimumsprinzip der Methode der kleinsten Quadrate, in das die zusätzlichen Beobachtungen miteinbezogen sind, garantiert hier stets gut konditionierte Normalgleichungen, selbst im Falle linear abhängiger zusätzlicher Parameter.

Bei der Behandlung zusätzlicher Unbekannter in Kapitel 3 wurde eine Beschränkung auf die effektivsten Parameter empfohlen. Die Konzeption zusätzlicher Beobachtungen macht eine solche Beschränkung überflüssig, da hier alle Parameter ihren Genauigkeitseigenschaften entsprechend berücksichtigt werden.

Bei der Klärung der Frage, welche der Varianten, die in 4.1 aufgeführt wurden, für die Ausgleichung am besten geeignet ist, muß zwischen gemeinsamen und individuellen zusätzlichen Parametern unterschieden werden.

Gemeinsame zusätzliche Parameter

In diesem Falle sind alle Bilder, für welche gemeinsame Parameter angesetzt werden, über dieselben miteinander verknüpft. Im Extremfall sind dies alle Bilder des Blocks. Dementsprechend führt die Variante 3 hier zu einer stark oder gar voll besetzten Gewichtskoeffizientenmatrix (30). Daran ändert sich auch nichts, wenn die Beobachtungen wie allgemein üblich als unkorreliert betrachtet werden. Die ungünstige Struktur der Gewichtskoeffizientenmatrix führt sodann zu einer entsprechend stark besetzten Normalgleichungsmatrix. Die Rechenzeit für die Lösung (31) wird auf diese Weise umso länger, je mehr Bildern die zusätzlichen Parameter gemeinsam sind. Dasselbe gilt auch für die Variante 2.

Durch Anwendung der Variante 1, bei der die gemeinsamen Parameter als zusätzliche Unbekannte und Beobachtungen behandelt werden, läßt sich im Falle unkorrelierter Beobachtungen die auch in [2] und [8] auftretende geänderte Bandstruktur der Normalgleichungsmatrix erreichen. Die Rechenzeiten für die Lösung (16) sind hier von der Gesamtzahl der gemeinsamen Parameter abhängig.

In der Praxis werden die gemeinsamen Parameter zumeist für sehr viele oder gar alle Bilder gelten. Andererseits wird ihre Gesamtzahl im allgemeinen vergleichsweise klein sein. In diesem Falle ist daher die Anwendung der Variante 1 zu empfehlen.

Individuelle zusätzliche Parameter

Wenn für jedes Bild eigene zusätzliche Parameter eingeführt werden, ist die Variante 1 aufgrund der wesentlich erhöhten Anzahl von Unbekannten nicht zu empfehlen.

Die Variante 2 und die Variante 3 erweisen sich hier als günstiger. Wenn wir wieder von unkorrelierten Bildkoordinaten ausgehen, so ergeben die individuellen zusätzlichen Parameter hier eine Gewichtskoeffizientenmatrix (30) mit der günstigen Hyperdiagonalstruktur, die auch bei der Inversion erhalten bleibt. Korrelationen treten nur innerhalb der einzelnen Bilder auf. Auf diese Weise bleibt die Struktur der Normalgleichungen (31) vollkommen unverändert erhalten. Zu den konditionellen Problemen der beiden Varianten siehe 4.1.2.

Die Entscheidung, entweder Variante 2 oder Variante 3 anzuwenden, richtet sich danach, ob die Verbesserungen der originalen und der zusätzlichen Beobachtungen explizit gesucht sind oder nicht (siehe 4.1.3).

Eine optimale Lösung der Blockausgleichung kann von der gleichzeitigen Einführung zweckmäßig ausgewählter gemeinsamer und individueller zusätzlicher Parameter und ihrer Behandlung als Beobachtungen erwartet werden.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß die Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen in ganz analoger Weise verallgemeinert werden kann.

5. Schluß

Die Konzeption verfeinerter mathematischer Modelle, bei denen zusätzliche Parameter eingeführt und als Beobachtungen behandelt werden, ist durch Allgemeinheit sowie hohe Leistungsfähigkeit gekennzeichnet und von zentraler Bedeutung für die optimale Lösung von Ausgleichungsproblemen. Die praktische Anwendung dieser Konzeption kann allgemein empfohlen werden.

Literatur

[1] Schmid, H. H.: Application of Photogrammetry to Three Dimensional Geodesy (Photogrammetric Satellite Triangulation). Invited paper for Commission III, 11th Congress of the International Society of Photogrammetry, Lausanne 1968.

[2] Bauer, H. and Müller, J.: Height Accuracy of Blocks and Bundle Adjustment with Additional Parameters. Presented paper for Commision III, 12th Congress of the International Society of Photogrammetry, Ottawa 1972.

[3] Brown, D. C. et al.: Research in Mathematical Targeting, the Practical and Rigorous Adjustment of Large Photogrammetric Nets. Report by D. Brown Associates, Inc.

[4] Schmid, H. H. and Schmid, E.: A Generalized Least Squares Solution for Hybrid Measuring Systems. The Canadian Surveyor, p. 27—41, 1965.

[5] Mikhail, E. M.: Parameter Constraints in Least Squares. Photogrammetric Engineering, p. 1277—1291, 1970.

[6] Peters, K.: Tendenzen der Ausgleichungsrechnung. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 69—82, 1971.

[7] Ebner, H.: Genauigkeitsuntersuchung zur photogrammetrischen Sternkoordinatenbestimmung durch geschlossene Blockausgleichung. Deutsche Geodätische Kommission. Reihe C, Heft Nr. 141.

[8] Brown, D. C.: Inversion of Very Large Matrices Encountered in Large Scale Problems of Photogrammetry and Photographic Astrometry. Proceedings of a Conference on Photographic Astrometric Technique in Tampa, p. 249—263, 1971.

[9] Googe, W. D., Lukac, C. F. and Eichhorn, H.: The Overlap Approach Toward the Derivation of Photographic Stellar Coordinates. Highlights of Astronomy. p. 338—342.

[10] De Vegt, Chr. and Ebner, H.: Blockadjustment Methods in Photographic Astrometry. Astronomy and Astrophysics, p. 276—285, 1972.

[11] Kubik, K.: Systematic Image Errors in Aerial Triangulation. Invited paper for Commission III, 12th Congress of the International Society of Photogrammetry, Ottawa 1972.