

Sonderdruck aus der „Zeitschrift für Vermessungswesen“

97. Jahrgang 1972, Heft 4

(Verlag Konrad Wittwer in Stuttgart)

---

**A posteriori Varianzschätzungen  
für die Koordinaten unabhängiger Modelle**

Von HEINRICH EBNER, Stuttgart

## A posteriori Varianzschätzungen für die Koordinaten unabhängiger Modelle

Von HEINRICH EBNER, Stuttgart

*Summary:* Based on 3 triangulation strips (2 wide angle, 1 super wide angle) which have been adjusted by the method of independent models, unbiased variances of the  $x$ ,  $y$ ,  $z$ -coordinates of the model points and of the projection centres are estimated a posteriori. In all cases the variances of the model coordinates  $x$  and  $y$  were found equal, and smaller than the variance of  $z$ . The variances of the coordinates of the projection centres are largest in  $x$ ,  $y$  and smallest in  $z$ . The results of two of the strips which are from the same project Oberschwaben suggest that the coordinates of wide-angle and super wide-angle models are of about the same accuracy.

### 1. Prinzip und bisherige Anwendungen der Varianzschätzung

In der Ausgleichsrechnung sind die Genauigkeitseigenschaften der Beobachtungen für gewöhnlich bis auf den mittleren Gewichtseinheitsfehler a priori gegeben. Dieser wird in bekannter Weise aus den Verbesserungen berechnet. Bei der a posteriori Varianzschätzung werden im Gegensatz dazu die einzelnen Varianzen und damit die Genauigkeit der Beobachtungen geschätzt. Schon HELMERT hat diese Möglichkeit aufgezeigt [1]. KUBIK hat das Problem wieder aufgegriffen und in mehreren Arbeiten Algorithmen zur Schätzung von Varianzen und auch von Kovarianzen angegeben [2].

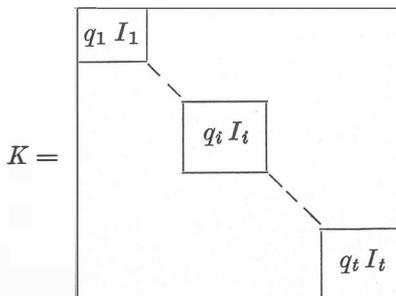
Trotz der praktischen Bedeutung, die der a posteriori Varianzschätzung zweifellos zukommt, ist sie bisher nur in sehr beschränktem Maße angewendet worden. Der Grund dafür ist wohl nicht zuletzt im außerordentlich hohen numerischen Aufwand der Verfahren zu suchen. KUBIK hat auf diese Weise die Strecken- und Richtungsgewichte bei Netzausgleichungen bestimmt [3] und die Varianzen der Übertragungselemente bei der Aero-triangulation [4]. Über die Schätzung von Kovarianzen ist bisher noch nichts bekannt. LINK und WALDBAUER haben zwar den Versuch unternommen, aber in keinem der behandelten Fälle befriedigende Ergebnisse erhalten [5].

### 2. Die beiden verwendeten Schätzverfahren

Die a posteriori Varianzschätzung ist als Erweiterung der Methode der kleinsten Quadrate interpretierbar, bei der zusätzlich zu den Verbesserungen  $v$  und den Unbekannten  $x$  noch die Varianzen  $q$  der Beobachtungen geschätzt werden. In der vorliegenden Untersuchung werden gruppenweise gleiche Varianzen unterstellt (Abb. 1). Wenn  $\bar{q}_i$  der theoretische Wert einer Varianz ist, so soll für ihren Schätzwert  $q_i$  gelten:

$$E[q_i] = \bar{q}_i \quad (E = \text{Erwartungswert oder Mittelwert}). \quad (1)$$

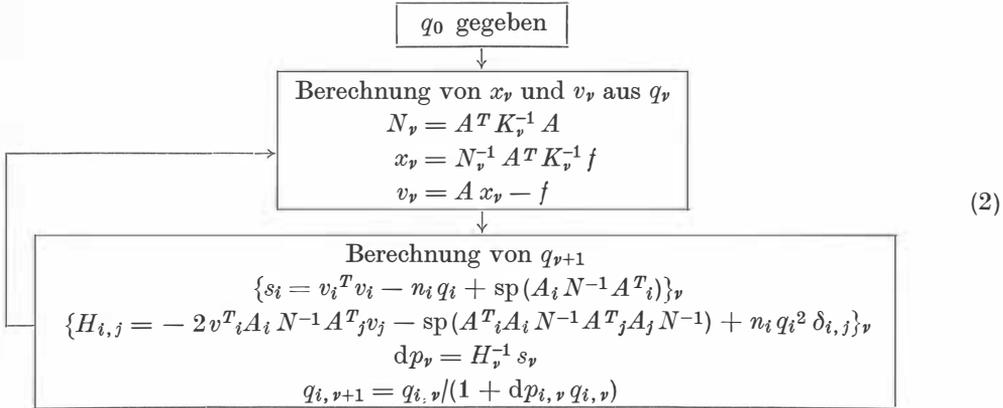
Mit Gleichung (1) wird gefordert, daß die Varianzen  $q$  unverzerrt (ohne Bias) geschätzt werden.



$K$  = Kovarianzmatrix der Beobachtungen,  
 $q_i$  = Varianzen der Beobachtungen der Gruppe  $i$ ,  
 $I_i$  = Einheitsmatrix vom Rang  $n_i$ ,  
 $n_i$  = Anzahl der Beobachtungen in der Gruppe  $i$ .

Abb. 1. Die Kovarianzmatrix unkorrelierter Beobachtungen bei gruppenweise gleichen Varianzen.

Die Ausgleichung soll nach vermittelnden Beobachtungen erfolgen. Für dieses Standardproblem II ergibt sich aus [3] und aus einem persönlichen Schriftwechsel mit KUBIK der folgende Newtonsche Iterationsprozeß für die Schätzung unverzerrter gruppenweise gleicher Varianzen:



- $q_0$  = Vektor der Anfangswerte der Varianzen  $q$ ,
- $A$  = Koeffizientenmatrix der Fehlergleichungen,
- $N$  = Normalgleichungsmatrix,
- $x$  = Vektor der Unbekannten,
- $v$  = Vektor der Verbesserungen,
- $f$  = Absolutvektor,
- $v_i$  = Subvektor von  $v$  für die Gruppe  $i$  der Beobachtungen,
- $A_i$  = Submatrix von  $A$  für die Gruppe  $i$  der Beobachtungen,
- sp = Spur einer Matrix,
- $\delta_{i,j}$  = Kronecker-Symbol:  $\delta_{i,j} = 1$  für  $i = j$ ,  $\delta_{i,j} = 0$  für  $i \neq j$ .

Der Iterationsprozeß ist beendet und die endgültigen Schätzwerte sind gefunden, wenn alle Elemente  $s_i$  verschwinden.

$$s_{i,v} = v_{i,v}^T v_{i,v} - n_i q_{i,v} + \text{sp}(A_i N_v^{-1} A_i^T) = 0 \tag{3}$$

$$s_{i,v} = 0 \rightarrow dp_{i,v} = 0 \rightarrow q_{i,v+1} = q_{i,v} \tag{4}$$

KUBIK hat die Gleichung (3) auf der Grundlage der Maximum-Likelihood-Methode und unter der Annahme normalverteilter Beobachtungen erhalten. Die Beziehung (3) kann aber auch direkt mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz und ohne die Einschränkung der Normalverteilung hergeleitet werden, wie kurz gezeigt werden soll. Für das Standardproblem II der Ausgleichsrechnung gilt zunächst:

$$x = (A^T K^{-1} A)^{-1} A^T K^{-1} f \tag{5}$$

$$v = A x - f = (A (A^T K^{-1} A)^{-1} A^T K^{-1} - I) f \tag{6}$$

$$K^{vv} = K - A (A^T K^{-1} A)^{-1} A^T \tag{7}$$

Wird nun die Struktur der Kovarianzmatrix in Abb. 1 berücksichtigt, so ergibt sich für die Gruppe  $i$  der Beobachtungen:

$$\text{sp} K_i^{vv} = \sum_{j=1}^{n_i} q_{v_i,j} = n_i q_i - \text{sp}(A_i (A^T K^{-1} A)^{-1} A_i^T) \tag{8}$$

Die Varianzen  $q_{v_i,j}$  der Verbesserungen aber können empirisch ermittelt werden nach

$$q_{v_i,j} = E[(v_{i,j} - E[v_{i,j}])^2] \tag{9}$$

Wenn die Beobachtungen keinen Bias haben, gilt für alle  $v_{i,j}$ :

$$E[v_{i,j}] = 0 \quad (10)$$

und damit für  $qv_{i,j}$ :

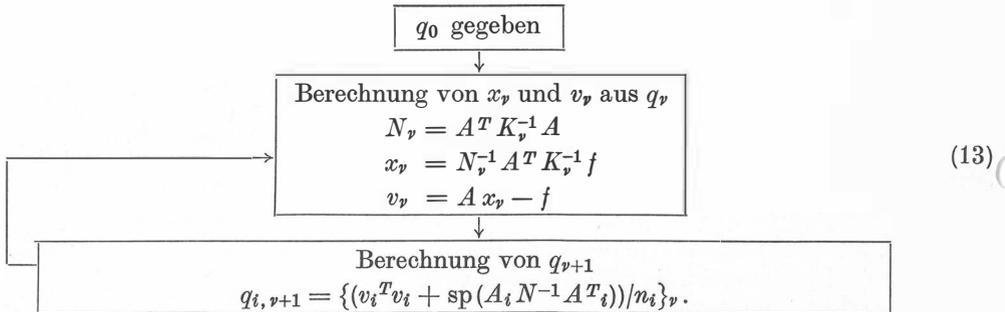
$$qv_{i,j} = v_{i,j}^2. \quad (11)$$

Damit geht (8) über in:

$$\sum_{j=1}^{n_i} qv_{i,j} = \sum_{j=1}^{n_i} v_{i,j}^2 = v^T v_i = n_i q_i - \text{sp}(A_i(A^T K^{-1} A)^{-1} A^T v_i). \quad (12)$$

(12) hat aber die gleiche Gestalt wie (3).

Als Alternative zum Newton-Prozeß (2) nach KUBIK soll nun ein Jakobi-Prozeß angegeben werden, der direkt auf Gleichung (12) aufgebaut ist.



Der Jakobi-Prozeß (13) besitzt nur eine Konvergenzgeschwindigkeit erster Ordnung und benötigt damit wesentlich mehr Iterationsschritte als der Newton-Prozeß (2) mit seiner Konvergenzgeschwindigkeit zweiter Ordnung. Die größere Anzahl benötigter Iterationen bei (13) wird durch den geringeren numerischen Aufwand für einen einzelnen Iterationsschritt nur zum Teil wettgemacht. Die beiden Prozesse unterscheiden sich aber auch in der Breite des Bereiches, innerhalb dessen sie konvergieren. In [6] ergibt sich, daß der Jakobi-Prozeß (13), angewendet auf Streifenungleichungen mit unabhängigen Modellen und die Schätzung von sechs gruppenweise gleichen Varianzen eine wesentlich größere Konvergenzbreite hat als der Newton-Prozeß (2).

### 3. Zielsetzung und Material der Untersuchung

Bei der Streifen- und Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen werden die photogrammetrischen Koordinaten der Modellpunkte und der Projektionszentren als Beobachtungen behandelt, die Geländekoordinaten der Verknüpfungspunkte und die Transformationsparameter aller Modelle sind unbekannt. Einzelne Rechenprogramme für die Blockausgleichung lassen in bestimmtem Umfang unterschiedliche Gewichte der Modellkoordinaten zu (siehe zum Beispiel [7]). Bei der Wahl dieser Gewichte besteht aber bis heute noch eine große Unsicherheit, da für die Varianzen der Beobachtungen bisher nur zum Teil empirische Werte vorliegen. So wurde beispielsweise in [8] die Koordinatengenauigkeit der Modellpunkte, nicht aber der Projektionszentrum untersucht. Eine a posteriori Varianzschätzung für die Koordinaten sowohl der Modellpunkte als auch der Projektionszentren entspricht daher einem praktischen Bedürfnis.

In der vorliegenden Arbeit sollen sechs gruppenweise gleiche Varianzen geschätzt werden:

$q_x, q_y, q_z$ : Varianzen der  $x, y, z$ -Koordinaten der Modellpunkte,  
 $q_{0x}, q_{0y}, q_{0z}$ : Varianzen der  $x, y, z$ -Koordinaten der Projektionszentren.

Alle Modellpunkte sind dabei als gleich genau unterstellt. Diese Vereinfachung empfiehlt sich aus Gründen der höheren Redundanz und der damit verbundenen sichereren Bestimmung der Varianzen der Modellkoordinaten.

Für die a posteriori-Schätzung der sechs Varianzen wurden drei verschiedene photogrammetrische Streifen aus OEEPE-Befliegungen (Kommission A/B) verwendet, deren Kenndaten in Tabelle 1 zusammengestellt sind.

Tabelle 1. Die untersuchten photogrammetrischen Streifen

Streifen	Kammer	Bild-format	Brennweite	Bildmaßstab	Modellanzahl	Auswertegerät
Gramastetten	Wild RC 8	23 × 23 cm <sup>2</sup>	15 cm	1 : 9 200	18	Wild A 8
Oberschwaben 1	Zeiss RMKA	23 × 23 cm <sup>2</sup>	15 cm	1 : 28 000	24	Zeiss PSK
Oberschwaben 10	Zeiss RMKA	23 × 23 cm <sup>2</sup>	8,5 cm	1 : 28 000	24	Wild StK

Der Streifen Gramastetten wurde am ITC in Delft trianguliert. Die Koordinaten der Projektionszentren des Wild A 8 sind vor der Triangulation aus Gittermessungen bestimmt worden und blieben für alle Modelle gleich. Die Messung des Streifens Oberschwaben 1 erfolgte am Institut für angewandte Geodäsie in Frankfurt, der Streifen Oberschwaben 10 wurde wieder am ITC in Delft gemessen. Die Berechnung der Modellkoordinaten für das Material Oberschwaben hatte generell das IfaG in Frankfurt übernommen.

4. Die numerische Durchführung der Varianzschätzung

Die Streifenausgleichung mit unabhängigen Modellen läßt an jedem photogrammetrischen Einzelmodell eine räumliche Ähnlichkeitstransformation zu und ist daher nicht linear. Die Prozesse (2) und (13) unterstellen aber ein lineares Ausgleichungsproblem. Vor Beginn der Varianzschätzung war es daher notwendig, die einzelnen Modelle der drei Streifen durch Ähnlichkeitstransformation hinreichend genau räumlich vorzutransformieren. Dazu wurde das Streifenausgleichungsprogramm STRIM des Instituts für Photogrammetrie in Stuttgart verwendet [9]. Die linearisierten Fehlergleichungen für die Varianzschätzung ergeben sich dann zu:

$$\begin{aligned}
 v_x &= -z b + y c - x m - \Delta x && + x_G && - x \\
 v_y &= z a && - x c - y m && - \Delta y && + y_G && - y \\
 v_z &= -y a && x b && - z m && - \Delta z && + z_G - z .
 \end{aligned} \tag{14}$$

- $x, y, z$ : Modellkoordinaten,
- $x_G, y_G, z_G$ : Geländekoordinaten,
- $a, b, c, m, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ : Parameter der räumlichen Ähnlichkeitstransformation,
- $v_x, v_y, v_z$ : Verbesserungen der Modellkoordinaten.

Ist ein Punkt Verknüpfungspunkt, so sind  $x_G, y_G, z_G$  freie Unbekannte, ist er Paßpunkt, so sind seine Koordinaten gegeben. Die Paßpunkte werden als fehlerfrei unterstellt.

Der numerische Aufwand für die Schätzung der sechs Varianzen nach (2) oder (13) übersteigt den Aufwand der reinen Streifenausgleichung ganz wesentlich, da die Inverse  $N^{-1}$  der Normalgleichungsmatrix und die entsprechenden Multiplikationen mit der Koeffizientenmatrix  $A$  benötigt werden. Demgegenüber können die Normalgleichungen bei der Streifenausgleichung auf das System der unbekanntem Transformationsparameter reduziert werden, und anstelle einer Inversion ist lediglich eine Gleichungslösung notwendig. Außerdem erfordert die Varianzschätzung wesentlich mehr Iterationsschritte als die Streifenausgleichung.

Bei der elektronischen Rechnung kommt zum hohen Rechenaufwand noch der große Speicherplatzbedarf dazu. Im Gegensatz zur reinen Ausgleichung wird bei der Varianzschätzung nämlich die volle Matrix  $N^{-1}$  gespeichert.

Die elektronische Rechnung wurde von den Herren LINK und WALDBAUER im Rahmen ihrer Diplomarbeit an der Anlage Telefunken TR 4 der Universität Stuttgart durchgeführt. Auf die Programmierung, die in Algol erfolgte, wird in [6] näher eingegangen. Die beschränkte Kernspeicherkapazität und Rechengeschwindigkeit der TR 4 hat dazu gezwungen, die Streifen in Teilstreifen zu je drei Modellen zu zerlegen. Trotzdem ergab sich noch eine Gesamtrechnenzeit von ca. 250 Stunden. Der hohe Aufwand der a posteriori Varianzschätzung wird damit deutlich demonstriert.

Auf jeden der insgesamt 21 Teilstreifen wurde der Newton-Prozeß (2) und der Jakobi-Prozeß (13) zur Schätzung der sechs gruppenweise gleichen Varianzen angewendet. Die Konvergenzeigenschaften beider Verfahren werden in [6] detailliert behandelt und miteinander verglichen. Wenn beide Verfahren konvergieren, liefern sie naturgemäß die gleichen Ergebnisse. In [6] wird auch auf Probleme des Iterationsabbruches eingegangen.

Aus den Varianzen der Teilstreifen wurden mittlere Varianzen für jeden der drei Gesamtstreifen berechnet. Gleichzeitig ergab sich die Möglichkeit, aus den Abweichungen der Varianzen der Teilstreifen von den Mittelwerten die Streuungen der mittleren Varianzen abzuschätzen.

### 5. Zusammenstellung der Ergebnisse

In der Tabelle 2 sind für den Streifen Gramastetten die a posteriori geschätzten Varianzen, getrennt nach den 6 Teilstreifen, zusammengestellt. Tabelle 3 enthält die Ergebnisse des Weitwinkel-Streifens 1 Oberschwaben und Tabelle 4 die Varianzen für den Überweitwinkel-Streifens 10 des gleichnamigen Projektes. In Tabelle 4 fehlt der Teilstreifen 5, da sich in diesem schon bei der vorläufigen Streifenausgleichung an einem der Projektionszentren große Verbesserungen ergaben, die auf einen Datenfehler hinweisen. Alle Varianzen sind

Tabelle 2. Streifen Gramastetten, Weitwinkel

Die Ergebnisse der Varianzschätzung für alle 6 Teilstreifen.

Teilstreifen	$q_x   \mu\text{m}^2$	$q_y   \mu\text{m}^2$	$q_z   \mu\text{m}^2$	$q_{0x}   \mu\text{m}^2$	$q_{0y}   \mu\text{m}^2$	$q_{0z}   \mu\text{m}^2$
1	134	245	360	282	3225	823
2	106	277	739	3	2	1
3	238	185	222	4212	484	200
4	105	286	455	40	505	0
5	170	627	200	871	384	266
6	1183	139	366	2	0	0
Mittelwert	$323 \pm 173$	$293 \pm 71$	$390 \pm 80$	$902 \pm 676$	$767 \pm 500$	$215 \pm 130$

Tabelle 3. Streifen 1 Oberschwaben, Weitwinkel

Die Ergebnisse der Varianzschätzung für alle 8 Teilstreifen.

Teilstreifen	$q_x   \mu\text{m}^2$	$q_y   \mu\text{m}^2$	$q_z   \mu\text{m}^2$	$q_{0x}   \mu\text{m}^2$	$q_{0y}   \mu\text{m}^2$	$q_{0z}   \mu\text{m}^2$
1	17	53	65	4629	2157	118
2	47	12	76	0	0	0
3	35	23	98	0	578	0
4	15	42	92	0	1352	0
5	6	143	72	406	165	202
6	71	9	58	96	497	1
7	72	48	187	0	722	0
8	200	67	179	0	0	0
Mittelwert	$58 \pm 22$	$50 \pm 15$	$103 \pm 18$	$641 \pm 572$	$684 \pm 263$	$40 \pm 27$

Tabelle 4. Streifen 10 Oberschwaben, Überweitwinkel

Die Ergebnisse der Varianzschätzung für die 7 Teilstreifen.

Teilstreifen	$q_x   \mu\text{m}^2$	$q_y   \mu\text{m}^2$	$q_z   \mu\text{m}^2$	$q_{0x}   \mu\text{m}^2$	$q_{0y}   \mu\text{m}^2$	$q_{0z}   \mu\text{m}^2$
1	98	49	151	1877	69	21
2	55	26	28	173	427	0
3	18	69	77	70	271	0
4	95	95	148	426	1081	0
6	35	132	49	0	30	100
7	22	38	327	0	0	0
8	64	36	87	97	91	121
Mittelwert	$55 \pm 12$	$64 \pm 14$	$124 \pm 38$	$378 \pm 256$	$281 \pm 145$	$35 \pm 20$

in  $[\mu\text{m}]^2$  im Bildmaßstab ausgedrückt. Die Ergebnisse der Streifen Gramastetten und Oberschwaben können daher unmittelbar miteinander verglichen werden.

In allen drei Tabellen fällt zunächst auf, daß sich die Varianzen für die einzelnen Teilstreifen relativ stark unterscheiden. Das hängt zweifellos damit zusammen, daß jeder Teilstreifen nur 3 Modelle und im Durchschnitt nur 14 Punkte enthält. Ein Phänomen für sich sind die außerordentlich kleinen oder überhaupt verschwindenden Varianzen der Koordinaten der Projektionszentren, die sich in ca. 40% aller Fälle ergeben. Eine Erklärung kann in den kurzen Teilstreifen gesucht werden, die jeweils nur zwei verknüpfende Projektionszentren enthalten. Bemerkenswert ist hier, daß zumeist die Varianzen jener Koordinaten verschwinden, die schon bei der vorläufigen Streifenausgleichung sehr kleine Verbesserungen erhielten. Offenbar verstärkt die a posteriori Varianzschätzung die Tendenzen der Verbesserungen der Ausgleichung.

Aus den Varianzen für die Teilstreifen wurden für jeden der drei Gesamtstreifen die mittleren Varianzen sowie die Streuungen der Mittelwerte berechnet und in den Tabellen 2 bis 4 ausgewiesen. Wie aus den Unterschieden zwischen den Varianzen für verschiedene Teilstreifen zu erwarten war, sind die Streuungen der Mittelwerte relativ groß. Dazu kommt noch die Unsicherheit, die sich aus dem geringen Umfang der Stichproben ergibt: Die Mittelwerte werden nur aus 6 bis 8 Einzelwerten geschätzt. An den Modellpunkten weisen die Streuungen die 0.2- bis 0.5fachen Beträge der mittleren Varianzen auf, an den Projektionszentren liegen sie beim 0.4- bis 0.9fachen Betrag der Mittelwerte.

Hier ist allerdings zu bemerken, daß diese Beträge etwa auf die Hälfte zurückgehen, wenn anstelle der mittleren Varianzen mittlere Streuungen betrachtet werden. In Tabelle 5 sind diese Werte  $\sigma$ , die Quadratwurzeln der mittleren Varianzen für die drei Gesamtstreifen zusammengestellt.

Tabelle 5. Die mittleren Streuungen für die drei untersuchten Gesamtstreifen in  $\mu\text{m}$ , bezogen auf den Bildmaßstab

Gesamtstreifen	$\sigma_x   \mu\text{m}$	$\sigma_y   \mu\text{m}$	$\sigma_z   \mu\text{m}$	$\sigma_{0x}   \mu\text{m}$	$\sigma_{0y}   \mu\text{m}$	$\sigma_{0z}   \mu\text{m}$
Gramastetten, Weitwinkel	$18 \pm 5$	$17 \pm 2$	$20 \pm 2$	$30 \pm 11$	$28 \pm 9$	$15 \pm 4$
Oberschwaben 1, Weitwinkel	$8 \pm 1$	$7 \pm 1$	$10 \pm 1$	$25 \pm 11$	$26 \pm 5$	$6 \pm 2$
Oberschwaben 10 Überweitwinkel	$7 \pm 1$	$8 \pm 1$	$11 \pm 2$	$19 \pm 7$	$17 \pm 4$	$6 \pm 2$

### 6. Diskussion der Ergebnisse

Die Werte in Tabelle 5 ermöglichen zunächst einen Vergleich der beiden Weitwinkelstreifen. Während die Streuungen beim Streifen Gramastetten etwas höher liegen als man sie heute bei vergleichbaren Projekten erwarten kann, muß die Genauigkeit des Streifens 1 Oberschwaben als außerordentlich gut bezeichnet werden. Es zeigt sich, daß sowohl die Streuungen der Koordinaten der Modellpunkte als auch die Streuungen der z-Koordinate der Projektionszentren nur etwa halb so groß sind wie beim Streifen Gramastetten, während die Lagegenauigkeit der Projektionszentren in beiden Projekten etwa gleich ist. Daß das Oberschwaben-Material genauer ist, hatte sich auch schon bei den vorläufigen Streifenausgleichungen gezeigt, die den Varianzschätzungen vorangingen. Dieses Ergebnis läßt sich sicherlich nur zum Teil daraus erklären, daß der Streifen Oberschwaben am Komparator gemessen wurde und Gramastetten an einem Analoggerät.

Die hohe Lagegenauigkeit der Modellpunkte beim Weitwinkelstreifen Oberschwaben ist in der Zwischenzeit bestätigt worden: eine simultane Lageblockausgleichung aller 200 Modelle des Projekts hat einen mittleren Gewichtseinheitsfehler von  $7 \mu\text{m}$  ergeben, der mit den Streuungen  $\sigma_x = 8 \mu\text{m}$  und  $\sigma_y = 7 \mu\text{m}$  in Tabelle 5 ausgezeichnet übereinstimmt.

Die beiden Oberschwaben-Streifen entstammen demselben Projekt und unterscheiden sich lediglich im Bildwinkel. Beide Streifen wurden an Komparatoren gemessen und sind

daher auch vonseiten der Auswertung äquivalent. Auf diese Weise wird ein Genauigkeitsvergleich zwischen Weitwinkel und Überweitwinkel unter sonst gleichen Bedingungen ermöglicht.

Tabelle 5 zeigt, daß sich für die beiden Bildwinkel praktisch die gleichen Streuungen der Modellkoordinaten ergeben, sowohl in der Lage als auch in der Höhe. Dieses Ergebnis steht in ausgezeichnete Übereinstimmung mit [8]. Die früher oft genannte Hypothese, daß Überweitwinkelauswertungen bei gleichem Bildmaßstab eine bessere Höhengenaugigkeit ergeben als Weitwinkelmessungen, kann daher heute kaum noch gehalten werden.

Die Lagegenauigkeit der Projektionszentren ist nach Tabelle 5 bei Überweitwinkel besser als bei Weitwinkel, was sicherlich mit der kleineren Kammerkonstante in Zusammenhang steht. Die entsprechenden Beträge lassen erwarten, daß der  $\Phi$ -Anschluß zwischen zwei benachbarten Modellen in Streifenrichtung für beide Bildwinkel etwa gleich genau sein wird. Es sind daher auch bei der Streifen- und Blocktriangulation keine großen Genauigkeitsunterschiede zwischen Weitwinkel und Überweitwinkel zu erwarten.

In Tabelle 5 fällt weiterhin auf, daß die Streuungen der  $x$ - und  $y$ -Koordinaten annähernd gleich groß sind. Dies gilt für alle drei Projekte und bezieht sich sowohl auf die Modellpunkte als auch auf die Projektionszentren. In diesem Punkt wird keine volle Übereinstimmung mit MEIER erzielt, der in [8] für  $x$  eine etwas höhere Genauigkeit als für  $y$  erhält.

Bei allen drei Projekten sind die Höhen der Modellpunkte ungenauer als ihre Lagekoordinaten, was zumindest für die Weitwinkelstreifen von vornherein zu erwarten war. Für die Projektionszentren schließlich gilt, daß ihre Lagekoordinaten die größten Streuungen aufweisen, ihre  $z$ -Koordinaten aber am genauesten sind. Es kann somit eine Ungleichung für die a posteriori geschätzten Streuungen angegeben werden, die in allen drei Projekten erfüllt ist:

$$\sigma_{0z} < \sigma_x \sim \sigma_y < \sigma_z < \sigma_{0x} \sim \sigma_{0y}. \quad (15)$$

Die Ergebnisse der Varianzschätzung zeigen somit eine gute Übereinstimmung, sowohl untereinander als auch mit den oben erwähnten Arbeiten. Die Streuungen in Tabelle 5 werden daher bis auf weiteres ziemlich realistische stochastische Modelle für die Streifen- und Blocktriangulation mit unabhängigen Modellen ergeben. Selbstverständlich aber wäre eine Verifikation der Ergebnisse durch weitere Untersuchungen sehr wünschenswert.

#### Literatur

- [1] HELMERT, F. R.: Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 2. Auflage, S. 358ff., 1907.
- [2] KUBIK, K.: Schätzfunktionen für Varianzen, Kovarianzen und für andere Parameter in Ausgleichsaufgaben. ITC Publications A 44, 1969.
- [3] KUBIK, K.: The estimation of the weights of measured quantities, within the method of least squares. Bulletin Géodésique N. 95, S. 21 bis 40, 1970.
- [4] KUBIK, K.: Estimation of variances of the transfer elements in aerial triangulation. Report presented to the Commission A of OEEPE Delft, 1967.
- [5] LINK, E., u. G. WALDBAUER: A posteriori-Schätzung der Varianzen und Kovarianzen für stereoskopische Gittermessungen am Planimat von Zeiss. Selbständige Arbeit am Institut für Photogrammetrie der Universität Stuttgart, 1969.
- [6] LINK, E. und G. WALDBAUER; Erfahrungen mit der a posteriori Schätzung von Varianzen und Kovarianzen photogrammetrischer Modellkoordinaten. Zeitschrift für Vermessungswesen (erscheint demnächst).
- [7] ACKERMANN, F., H. EBNER u. H. KLEIN: Ein Programmpaket für die Aerotriangulation mit unabhängigen Modellen. Bildmessung und Luftbildwesen 38, S. 218—224, 1970.
- [8] MEIER, H.-K.: Modellvorstellungen zur Luftbild-Aufnahmedisposition und ihr Vergleich mit praktischen Testergebnissen, Bildmessung und Luftbildwesen 38, S. 50—62, 1970.
- [9] ACKERMANN, F., H. EBNER u. H. KLEIN: Ein Rechenprogramm für die Streifentriangulation mit unabhängigen Modellen. Bildmessung und Luftbildwesen 38, S. 206—217, 1970.