

Eine Überprüfung der theoretischen Anblockgenauigkeit mit Hilfe eines allgemeineren stochastischen Modells

von Heinrich Ebner, Stuttgart

1. Einleitung

Die Lage-Ausgleichung photogrammetrischer Streifen und Blöcke nach der ANBLOCK-Methode wurde erstmals von VAN DEN HOUT vorgeschlagen [1] und von ECKHART programmiert [2]. Das Funktionalmodell*) der Methode setzt hinreichend genau horizontalisierte photogrammetrische Einzelmodelle voraus und läßt an jedem eine ebene Ähnlichkeitstransformation zu. Die mathematische Behandlung erfolgt nach dem zweiten Standardproblem der Ausgleichsrechnung. Beobachtungen sind die Modellkoordinaten x , y der Verknüpfungspunkte und der Paßpunkte, als Unbekannte treten die Geländekoordinaten der Verknüpfungspunkte und die Transformationsparameter aller Modelle auf.

Zum Erfolg der Anblock-Methode haben neben der Linearität des Ausgleichsprozesses sicherlich die günstigen Genauigkeitseigenschaften beigetragen. ACKERMANN hat die theoretische Genauigkeit ausgeglichener Streifen und Blöcke systematisch untersucht [3], [4], [5] und dabei insbesondere für den Fall der dichten Paßpunktbesetzung des Blockrandes eine Koordinatengenauigkeit der Verknüpfungspunkte gefunden, die nahezu konstant ist und etwa in der Größe des mittleren Gewichtseinheitsfehlers (der Genauigkeit im einzelnen Modell) liegt. Eine daran anschließende theoretische Untersuchung des Verfassers hat weiter ergeben, daß die mittlere und die maximale Streuung der Koordinaten der Verknüpfungspunkte in Blöcken mit dichtbesetztem Paßpunktrand nur mit dem Logarithmus der Modellanzahl ansteigen und selbst bei 10 000 Modellen noch unterhalb des 1,5fachen Betrages des mittleren Gewichtseinheitsfehlers bleiben [6].

Diesen Genauigkeitsuntersuchungen liegt ein außerordentlich einfaches stochastisches Modell zugrunde: die Gewichtskoeffizientenmatrix der Beobachtungen wird als Einheitsmatrix angenommen. Das bedeutet, daß die Modellkoordinaten als unkorreliert und gleich genau unterstellt werden. Die Fehlertheorie der Anblock-Ausgleichung unterstellt weiterhin, daß die Modellkoordinaten nur zufällige, aber keine systematischen Fehler aufweisen. Solch ein einfaches mathematisches Modell ist für praktische Ausgleichungen zwar ausreichend, bei Genauigkeitsabschätzungen jedoch besteht die Gefahr, daß dadurch zu unrealistische Ergebnisse erhalten werden.

Eine Überprüfung der bisherigen Untersuchungen zur Anblock-Genauigkeit ist mit Hilfe statistischer Tests und auf theoretischem Wege möglich. Empirische Überprüfungen sind einerseits realistisch, andererseits handelt es sich bei jedem Test nur um eine Stichprobe, bei der lediglich einzelne Genauigkeitsmaße, wie zum Beispiel die mittlere Streuung innerhalb eines Blockes, signifikant kontrolliert werden können. Mit dem OEEPE-Projekt „Oberschwaben“ ist ein umfangreicher empirischer Genauigkeitstest derzeit in Bearbeitung. Eine Überprüfung der Anblock-Genauigkeit auf theoretischem Weg ist mit Hilfe eines übergeordneten mathematischen Modells möglich. Das dafür erforderliche Formel-System wurde vom Verfasser in [7] angegeben.

Die vorliegende Untersuchung stellt sich zur Aufgabe, jene Verfälschungen der theoretischen Genauigkeit abzuschätzen, die zu Lasten des besonders einfachen stochastischen Modells der Anblock-Methode gehen. Dazu wird eine allgemeinere Kovarianzmatrix der Modellkoordinaten konstruiert und mit dieser die vereinfacht berechnete Anblock-Genauigkeit nach [7] überprüft. Eine Abschätzung von Genauigkeits-Verfälschungen zufolge systematischer Fehler der Modellkoordinaten dagegen bleibt zukünftigen Arbeiten vorbehalten.

Den Annahmen in [4] und [6] entsprechend werden auch hier schematische Verhältnisse zugrunde gelegt: horizontales Gelände, konstante Flughöhe und Modellgröße, 60 % Längs- und 20 % Querüberdeckung usw. Verknüpfungspunkte werden nur in den Modellecken angenommen.

*) Die Begriffe „Funktionalmodell“ und „stochastisches Modell“ aus der Statistik sind hier vom photogrammetrischen Modell zu unterscheiden.

Die Überprüfung der theoretischen Anblock-Genauigkeit wird für Streifen mit je 2 Paßpunkten an den Streifenenden und für Blöcke mit dichtem Paßpunkttrand (Abstand der Paßpunkte 2 Basislängen) durchgeführt. Die elektronischen Berechnungen erfolgten an den Computern Telefunken TR 4 und Control Data 6600 der Universität Stuttgart. Die Rechenprogramme wurden vom Verfasser in Algol – für die TR 4 und in Fortran – für die CDC 6600 – geschrieben.

2. Die Methode der Genauigkeitsüberprüfung

Bei der Wahl eines allgemeineren stochastischen Modells bietet sich die Möglichkeit an, von den Bildkoordinaten anstelle von den Modellkoordinaten auszugehen. Weiterhin erscheint es als realistisch, eine gewisse Genauigkeitsabhängigkeit vom Bildradius anzunehmen. Für die 9 schematisch angeordneten Bildpunkte wurden entsprechend ihren Radien demnach 3 gruppenweise gleiche Varianzen gewählt. Die Streuungen $\sigma_x = \sigma_y$ sind aus Bild 1 ersichtlich. Die unterstellte Genauig-

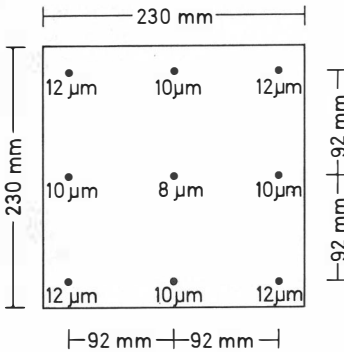


Bild 1 (links) Angenommene Streuungen $\sigma_x = \sigma_y$ im Bild für die Konstruktion der allgemeineren Kovarianzmatrix der Modellkoordinaten

Bild 2 Die Struktur der allgemeineren Kovarianzmatrix der Modellkoordinaten für einen Streifen mit 6 Modellen

KS1	KS2				
KS2 ^T	KS1	KS2			
	KS2 ^T	KS1	KS2		
		KS2 ^T	KS1	KS2	
			KS2 ^T	KS1	KS2
				KS2 ^T	KS1

keitsverteilung innerhalb des Bildes dürfte einigermaßen zutreffend sein. Sie liegt übrigens zwischen den entsprechenden Annahmen in [8] und [9], Seite 76. Die absoluten Beträge der Streuungen sind für die Genauigkeitsüberprüfung ohne Bedeutung. Sie sollen lediglich gewisse Durchschnittswerte repräsentieren. In Einzelfällen sind heute durchaus kleinere Streuungen erreichbar.

Aus der Kovarianzmatrix der Bildkoordinaten erfolgt nun die Konstruktion der Kovarianzmatrix der Modellkoordinaten, indem die relative Orientierung der einzelnen unabhängigen Modelle a der Fehlerfortpflanzung nachvollzogen wird. Bild 2 veranschaulicht die Struktur der Kovarianzmatrix der Modellkoordinaten eines Bildstreifens mit 6 Modellen. Die 8×8 Kovarianzmatrix eines einzelnen Modells mit 4 Verknüpfungspunkten in den Ecken wird durch die Submatrix KS 1 dargestellt. Die Submatrix KS 2 beschreibt die Korrelation benachbarter Modelle über das gemeinsame Bild. Zwischen den einzelnen Streifen besteht dagegen keine Korrelation, da keine gemeinsamen Bilder vorliegen.

Die Elemente der Submatrizen KS 1 und KS 2 sind aus Bild 3 ersichtlich (Einheit μm^2). Die y-Koordinaten weisen wesentlich größere Varianzen auf als die x-Koordinaten – $707 \mu m^2$ gegen $281 \mu m^2$. Alle Koordinaten zweier benachbarter Modelle sind miteinander korreliert, die Kovarianzen erreichen bis zu $219 \mu m^2$. Das allgemeinere stochastische Modell für die Genauigkeitsüberprüfung unterscheidet sich somit sehr stark vom entsprechenden Modell der Anblock-Ausgleichung, das untereinander gleiche Varianzen unterstellt und keinerlei Korrelationen zuläßt.

Die so konstruierte Kovarianzmatrix der x- und y-Koordinaten der Modellverknüpfungspunkte (Modelleckpunkte) und die damit durchgeführte Überprüfung der theoretischen Anblockgenauigkeit ist unabhängig von der Kammerkonstante, sofern die Genauigkeitsverteilung im Bild als konstant angesehen wird.

Wenn das Standardproblem II der Ausgleichsrechnung definiert wird als

$$v = Ax - f \tag{1}$$

$$f = b - a_0 \tag{2}$$

b = Vektor der Beobachtungen

a_0 = Absolutvektor

v = Vektor der Verbesserungen

A = Koeffizientenmatrix der Fehlergleichungen

x = Vektor der Unbekannten,

so ergibt sich im Falle der Anblock-Ausgleichung mit der Einheitsmatrix als Gewichtskoeffizientenmatrix der Beobachtungen der Unbekannten-Vektor zu:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b \tag{3}$$

und die Gewichtskoeffizientenmatrix G^{xx} der Unbekannten erhält die Form

$$G^{xx} = (A^T A)^{-1} \tag{4}$$

Daraus ergibt sich die Kovarianzmatrix K^{xx} der Unbekannten bekanntlich zu

$$K^{xx} = \sigma_0^2 G^{xx} \tag{5}$$

wobei der Varianzfaktor σ_0^2 (Quadrat des mittleren Gewichtseinheitsfehlers) aus den Verbesserungen berechnet wird nach:

$$\sigma_0^2 = \frac{v^T v}{r} \tag{6}$$

r = Redundanz = Anzahl der überschüssigen Beobachtungen.

281	-185	-53	43	47	-185	-47	-57	-9	-10	9	-10	-9	-10	9	-10
-185	707	-43	63	185	219	-57	-37	46	-25	82	103	10	-25	-10	103
-53	-43	281	185	-47	57	47	185	9	10	-9	10	9	10	-9	10
43	63	185	707	57	-37	-185	219	-82	103	-46	-25	10	103	-10	-25
47	185	-47	57	281	185	-53	-43	127	-146	101	82	-9	-46	9	82
-185	219	57	-37	185	707	43	63	146	-125	82	103	10	-25	-10	103
-47	-57	47	-185	-53	43	281	-185	101	-82	127	146	9	-82	-9	46
-57	-37	185	219	-43	63	-185	707	-82	103	-146	-125	10	103	10	-25
KS 1								KS 2							

Bild 3 Die Submatrizen KS 1 und KS 2 der allgemeineren Kovarianzmatrix der Modellkoordinaten; Varianzen und Kovarianzen in μm^2

Setzt man Gleichung (1), (2) und (3) in (6) ein, so ergibt sich weiter:

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{r} (b - a_0)^T (A(A^T A)^{-1} A^T - E)^T (A(A^T A)^{-1} A^T - E) (b - a_0) \tag{7}$$

Der Varianzfaktor ist somit eine quadratische Form des Vektors b der Beobachtungen, für den oben die allgemeinere, übergeordnete Kovarianzmatrix K konstruiert wurde. In Gleichung (7) ist σ_0^2 noch vom zufälligen Wert des Vektors b abhängig. Geht man aber vom Varianzfaktor auf dessen Mittel- oder Erwartungswert $E[\sigma_0^2]$ über, so ergibt sich für diesen nur noch eine Abhängigkeit von der Kovarianzmatrix K der Beobachtungen. In [7] hat der Verfasser für den Erwartungswert des Varianzfaktors allgemeine Beziehungen hergeleitet. Spezialisiert man Gleichung (21) in [7] für den vorliegenden Fall, so ergibt sich:

$$E[\sigma_0^2] = \frac{1}{r} \text{sp} (K (E - A (A^T A)^{-1} A^T)) \tag{8}$$

Analog zu Gleichung (5) gilt damit für den Erwartungswert $E[K^{xx}]$ der Kovarianzmatrix der Unbekannten: $E[K^{xx}] = E[\sigma_0^2] G^{xx}$

$$E[K^{xx}] = \frac{1}{r} (\text{sp} (K (E - A (A^T A)^{-1} A^T))) (A^T A)^{-1} \tag{9}$$

Diese mit der vereinfachten Fehlertheorie der Anblockausgleichung erhaltene Kovarianzmatrix $E [K^{xx}]$ kann nun mit Hilfe der Kovarianzmatrix K^{xx}_p überprüft werden. Sie ergibt sich durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf Gleichung (3) unter Berücksichtigung der übergeordneten Kovarianzmatrix K der Beobachtungen:

$$K^{xx}_p = (A^T A)^{-1} A^T K A (A^T A)^{-1} \tag{10}$$

Die Kovarianzmatrizen $E [K^{xx}]$ bzw. K^{xx}_p enthalten in der Hauptdiagonale demnach die genähert bzw. streng berechneten Varianzen σ^2_t der unbekanntem Transformationsparameter und σ^2_k der ausgeglichenen Koordinaten der Verknüpfungspunkte. In der vorliegenden Untersuchung sind die Streuungen σ_k als Quadratwurzel-Werte der Varianzen σ^2_k von eigentlichem Interesse.

Der freien Wahl des übergeordneten stochastischen Modells entsprechend kann die vorliegende Untersuchung im Prinzip nur den Rang einer relativen Genauigkeits-Überprüfung beanspruchen. Allerdings ist die gewählte Kovarianzmatrix der Beobachtungen gegenüber der Fehlertheorie der Anblock-Ausgleichung um eine deutliche Stufe realistischer. Es ergeben sich sowohl betragslich unterschiedliche Varianzen als auch starke Korrelationen zwischen den einzelnen Modellkoordinaten. In bezug auf Allgemeinheit liegt die Untersuchung auf einer Linie mit anderen Arbeiten, wie zum Beispiel [8] und [10], die ebenfalls von unkorrelierten Bildkoordinaten ausgehen.

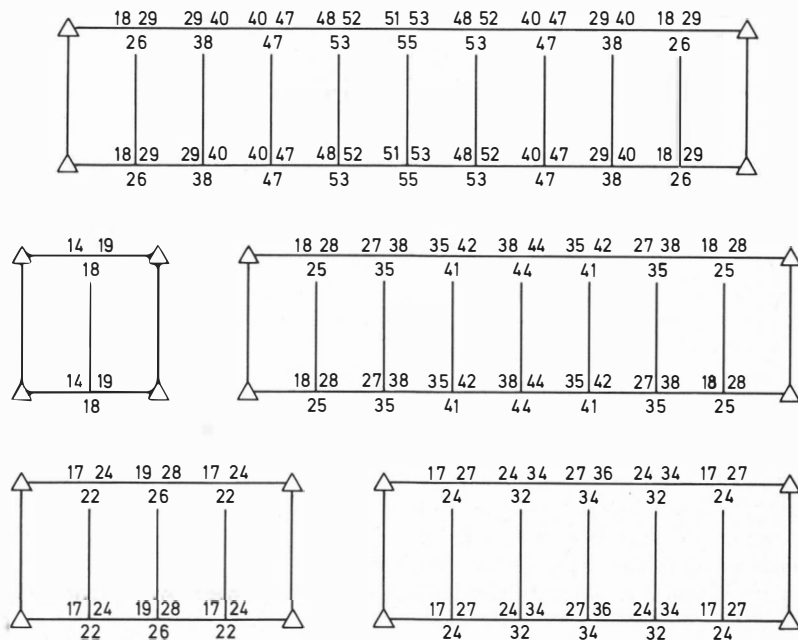
3. Ergebnisse und Diskussion

3.1 Streifen

Fünf verschieden lange Streifen mit 2 bis 10 Modellen und jeweils zwei Paßpunkten am Streifenanfang und am Streifenende wurden untersucht. Die Ergebnisse sind aus Bild 4 ersichtlich. Für jeden Verknüpfungspunkt sind oben die nach Gleichung (10) streng berechneten Streuungen σ_x und σ_y sowie unten die nach Gleichung (9) genähert berechneten Streuungen $\sigma_x = \sigma_y$ in μm dargestellt. Die Beziehung $\sigma_x = \sigma_y$ ist ein Charakteristikum der Anblock-Methode. Alle Streuungen sind auf Modellmaßstab = Bildmaßstab bezogen. Die mit Hilfe der vereinfachten Anblock-Fehlertheorie genähert berechneten Streuungen sind mit den von ACKERMANN in [3] angegebenen und jeweils mit $(E [\sigma_o^2])^{1/2}$ multiplizierten Werten identisch.

Bild 4 Theoretische Streuungen der Koordinaten der Verknüpfungspunkte in μm , bezogen auf den Bildmaßstab für einige Streifen mit 4 Paßpunkten

oben: streng berechnete Streuungen σ_x und σ_y
 unten: $\sigma_x = \sigma_y$ nach der vereinfachten Anblock-Fehlertheorie



Bei den streng berechneten Streuungen fällt auf, daß σ_x stets kleiner ist als σ_y , daß der Genauigkeitsunterschied zwischen den beiden Koordinaten für Punkte in der Streifenmitte mit zunehmender Modellanzahl aber immer kleiner wird. Ein Vergleich der streng berechneten Streuungen mit den darunterstehenden Näherungswerten $\sigma_x = \sigma_y$ zeigt, daß diese zwischen den strengen Streuungen σ_x und σ_y liegen und zum Teil sogar größer als beide sind.

Bild 5 stellt die maximalen Streuungen σ_{max} und die quadratischen Mittelwerte aller Streuungen σ_{mittel} für Streifen mit 2 bis 10 Modellen graphisch dar.

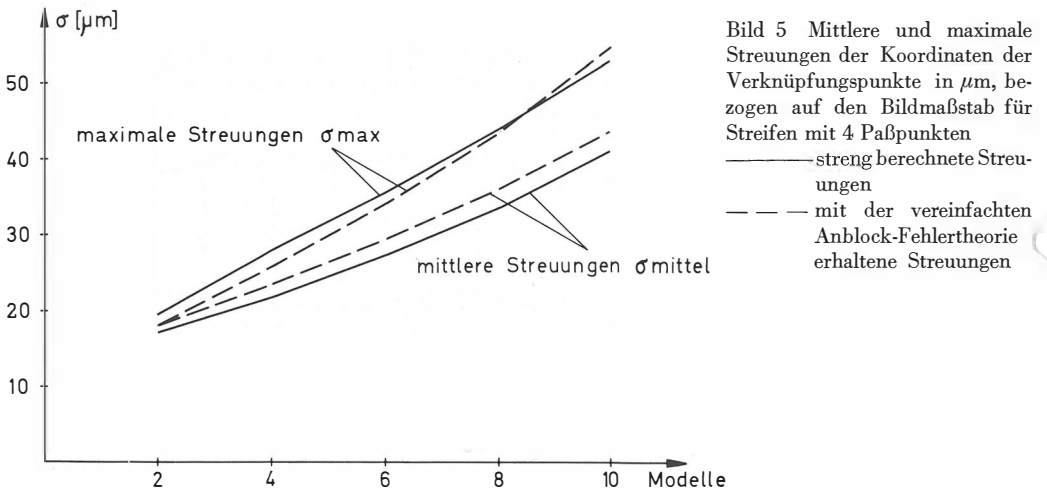
Das streng berechnete σ_{mittel} ist stets kleiner als die genähert berechnete mittlere Streuung. Die gleiche Tendenz ergibt sich für σ_{max} und längere Streifen. Nur in kurzen Streifen ist die streng berechnete maximale Streuung größer als sie durch die vereinfachte Anblock-Theorie angegeben wird.

Diese Ergebnisse für den Fall der Streifenausgleichung stellen den bisherigen Anblock-Genauigkeitsuntersuchungen das gute Zeugnis aus, die Streuungen der Verknüpfungspunkte ziemlich realistisch und eher zu groß als zu klein auszuweisen.

3.2 Blöcke

Die Genauigkeitsüberprüfung wurde für drei verschiedene quadratische Blöcke mit 8, 18 und 32 Modellen durchgeführt. Auf eine Behandlung noch größerer Blöcke mußte aus Aufwandsgründen verzichtet werden. Für alle Blöcke wurde wegen der besonders günstigen Genauigkeitseigenschaften eine dichte Paßpunktbesetzung des Randes im Abstand der doppelten Basislänge angenommen. Die Ergebnisse sind aus Bild 6 ersichtlich. Der „Block“ mit 2 Modellen ist der Vollständigkeit halber mit dargestellt. Wie in Bild 4 sind für jeden Verknüpfungspunkt oben die strengen Streuungen σ_x und σ_y und unten die genäherten $\sigma_x = \sigma_y$ in μm , bezogen auf den Bildmaßstab, aufgeführt.

Im Randgebiet der Blöcke sind die streng berechneten Streuungen wie bei den Streifen auch für



x deutlich kleiner als für y . In der Nähe der Blockmitte aber sind σ_x und σ_y etwa gleich; zum Teil ist die y -Koordinate sogar genauer als die x -Koordinate.

Analog zu den Streifenresultaten liegen die genähert berechneten Streuungen $\sigma_x = \sigma_y$ auch bei den Blöcken zumeist zwischen den strengen σ_x und σ_y . In der Nähe der Blockmitte allerdings täuscht die vereinfachte Fehlertheorie der Anblock-Methode eine zu gute Genauigkeit vor.

Um die Verhältnisse zwischen den streng und genähert berechneten Streuungen detaillierter studieren zu können, wurden für alle Koordinaten die Quotienten $\sigma_{streng}/\sigma_{genähert}$ berechnet. Sie sind in Tabelle 1 für die wichtigsten drei Fälle und alle 4 Blockgrößen auf 5 Stellen genau zusammengestellt:

Tabelle 1 Quotienten aus den streng berechneten und mit der vereinfachten Anblock-Fehlertheorie erhaltenen Streuungen für quadratische Blöcke mit dichter Paßpunktbesetzung des Randes

	Max. Quotient am Blockrand		Max. Quotient in der Blockmitte		Quadratisches Mittel aller Quotienten	
	$\Delta [10^{-4}]$		$\Delta [10^{-4}]$		$\Delta [10^{-4}]$	
1 Streifen	1.0931	33	1.0931	-13	0.9566	503
2 Streifen	1.1014	148	1.0918	-40	1.0069	252
3 Streifen	1.1162	55	1.0878	9	1.0321	147
4 Streifen	1.1217		1.0887		1.0468	

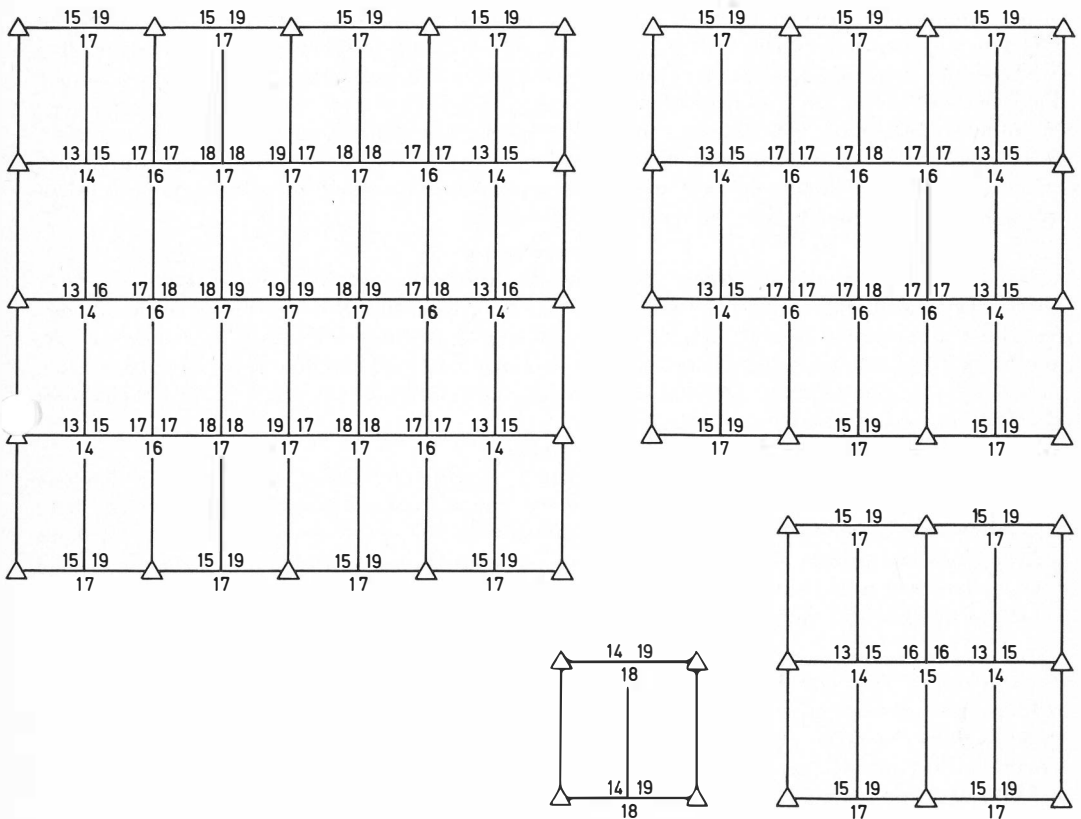


Bild 6 Theoretische Streuungen der Koordinaten der Verknüpfungspunkte in μm , bezogen auf den Bildmaßstab für einige quadratische Blöcke mit dichter Paßpunktbesetzung des Randes.

oben: streng berechnete Streuungen σ_x und σ_y

unten: $\sigma_x = \sigma_y$ nach der vereinfachten Anblock-Fehlertheorie

Der maximale Quotient am Blockrand steigt mit zunehmender Blockgröße an, allerdings wesentlich geringer als linear, wie die Differenzen Δ in Tabelle 1 zeigen. Die gleiche Tendenz zeigt sich für den quadratischen Mittelwert aller Quotienten $\sigma_{\text{streng}}/\sigma_{\text{genähert}}$. In der Blockmitte hingegen ergibt sich ein praktisch konstanter maximaler Quotient von etwa 1,09. Der maximale Quotient überhaupt tritt in Blöcken ab 3 Streifen am Blockrand auf und ist dann mit dem entsprechenden Wert in der ersten Spalte in Tabelle 1 identisch.

Die starke Abnahme der Differenzen Δ mit zunehmender Blockgröße läßt erwarten, daß die Quotienten $\sigma_{\text{streng}}/\sigma_{\text{genähert}}$ auch für Blöcke mit mehreren 100 oder noch mehr Modellen kaum den Betrag 1,2 übersteigen. In der Blockmitte wird der maximale Quotient voraussichtlich den konstanten Wert 1,09 behalten.

Die Ergebnisse der Überprüfung der theoretischen Anblock-Genauigkeit mit Hilfe des zugrundegelegten allgemeineren stochastischen Modells können nun für die untersuchten quadratischen Blöcke zusammengefaßt werden: Die vereinfachte Anblock-Fehlertheorie weist die Streuungen σ_y am Blockrand, die Streuungen beider Koordinaten in der Blockmitte und den quadratischen Mittelwert aller Streuungen systematisch zu klein aus. Die Verfälschungen betragen bis zu 12 % der Streuungen, steigen aber mit zunehmender Modellanzahl nur noch sehr gering, so daß auch in ganz großen Blöcken kaum Verfälschungen der Streuungen um mehr als 20 % zu erwarten sind.

Gemessen an den starken Vereinfachungen der Anblock-Fehlertheorie gegenüber dem zugrundegelegten allgemeineren stochastischen Modell für die Genauigkeitsüberprüfung erscheinen dem Verfasser die oben aufgeführten maximalen Verfälschungen der Streuungen um 12 % und in großen Blöcken eventuell um 20 % als bemerkenswert gering. Dabei ist noch zu beachten, daß die maximale Streuung in Blockmitte unabhängig von der Blockgröße nur um 9 % zu klein ausgewiesen wird. Im Gültigkeitsbereich der hier getroffenen Annahmen wird damit die von ACKERMANN ausgesprochene Erwartung bestätigt, daß die theoretische Anblock-Genauigkeit trotz grober Vernachlässigungen auf stochastischer Seite hinreichend realistisch ist.

Zusammenfassung

Die bisher unter sehr einfachen stochastischen Annahmen erhaltene theoretische Anblock-Genauigkeit für Streifen und Blöcke wird mit Hilfe einer allgemeineren Kovarianzmatrix der Modellkoordinaten überprüft. Es zeigt sich, daß die vereinfachten Annahmen die Ergebnisse nur schwach verzerren. Für quadratische Blöcke mit dichtem Paßpunkttrand sind die Streuungen der Koordinaten der Verknüpfungspunkte um maximal 12 %, in der Blockmitte um maximal 9 %, im Durchschnitt aber nur um maximal 5 % zu klein.

Summary

Previous investigations into the theoretical accuracy of strips and blocks, adjusted by the Anblock method, were based on simplified error assumptions (weight 1, no correlation). By applying a more general covariance-matrix for the model-coordinates the results of the simplified error assumptions are examined and proven to have little bias. For square shaped blocks with dense perimeter control the standard errors at adjusted tie points are too small by 12 % maximum, by 9 % maximum at centre points of blocks, and by only 5 % average.

Résumé

La précision théorique de bandes et de blocs ajustés a été étudiée jusqu'alors par des données stochastiques très simplifiées dont les résultats sont vérifiés à l'aide d'un matrix de covariance plus général. Il est démontré que les résultats simplifiés sont très valables. Pour des blocs carrés, avec des points de controle aux périmètres, les erreurs moyennes ne diffèrent que par 12 % au maximum, par 9 % au maximum au centre d'un bloc et par 5 % à la moyenne.

Schrifttum

- [1] VANDEN HOUT, C. M. A.: The Anblock Method of planimetric Block Adjustment: Mathematical Foundation and Organisation of its practical Application. Photogrammetria 21, 171-178, 1966.
- [2] ECKHART, D.: The Anblock Method: Problems of Programming, Practical Results. Vortrag beim Internationalen Symposium über Aerotriangulation, Urbana/Illinois (USA) 1966.