

## Interpolation nach kleinsten Quadraten in der Photogrammetrie

Von KARL KRAUS, Stuttgart

*Summary:* As compared with the other methods, the most accurate results are obtained by the least squares interpolation. In this paper the least squares interpolation is applied to the problems of analytical photogrammetry.

### 1. Einleitung

Bei analytisch-photogrammetrischen Auswertungen tritt mehrmals das Problem der Interpolation auf. So versuchen wir, aus den gemessenen Filmdeformationen an einigen Reseaupunkten auf das Verhalten im gesamten Bild zu schließen [13]. Andere Beispiele sind die Behandlung der Klaffungen nach einer ebenen Blockausgleichung: Größere Klaffungen an den Paßpunkten — häufig Indiz der Spannungen im trigonometrischen Netz — sind im Interesse der Homogenität auf die umliegenden Neupunkte zu verteilen [9]; mit Hilfe der Klaffungen an den Verknüpfungspunkten — ein Aufschluß über die Modellverbiegungen vor allem dann, wenn alle Verknüpfungspunkte in die Blockausgleichung einbezogen werden [1] — sollte man die Innenpunkte verbessern [11]. Die Beseitigung der Klaffungen nach einer räumlichen Aerotriangulation [2] sowie die Einzelmodelleinpassung auf überschüssige Lage- und/oder Höhenpaßpunkte [3, 4, 6, 10] sind ebenfalls solche Interpolationsaufgaben.

Alle diese Aufgaben führen auf das allgemeine Problem, aus Beobachtungen an einzelnen Punkten den Verlauf systematischer Fehlereinflüsse zu bestimmen. Die gesuchten Fehlereinflüsse sind nur auf engem Raum systematisch und werden mit wachsender Entfernung immer unregelmäßiger. Die bekannten Beobachtungswerte setzen sich aus systematischen und unregelmäßigen Fehlern zusammen. Das bedeutet für die Interpolation, daß nicht die ursprünglichen Beobachtungen anzuhalten sind, sondern die um die unregelmäßigen Fehler verbesserten Werte.

### 2. Kovarianzfunktion

Das fehlertheoretische Verhalten der Beobachtungen und systematischen Fehlereinflüsse kann man mit der Varianz und einer Kovarianz- bzw. Streuungsfunktion [7] — für jede Koordinatenrichtung getrennt<sup>1)</sup> — beschreiben. Die Kovarianz  $C(s)$  der systematischen Fehler wird mit wachsender Entfernung der korrespondierenden Punkte immer mehr gegen Null gehen. Die Varianz  $C(0)$  der Beobachtungen  $l_i$  wird — infolge der zusätzlichen unregelmäßigen Fehler — auf der Ordinatenachse über der Kovarianzfunktion

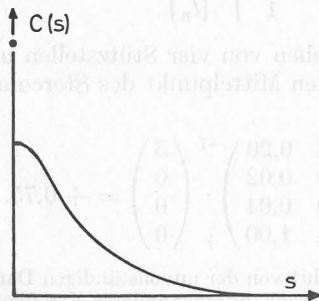


Abb. 1. Varianz  $C(0)$  und Kovarianzfunktion

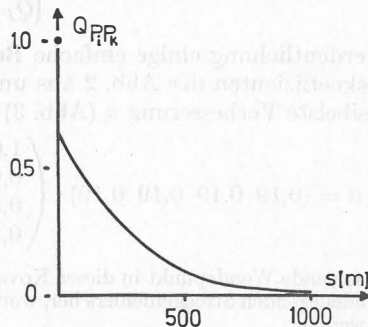


Abb. 2. Gewichtskoeffizienten in Abhängigkeit der Entfernung  $s$

<sup>1)</sup> Dabei setzen wir zunächst voraus, daß zwischen den Beobachtungen  $l_x$ ,  $l_y$  und  $l_z$  in den drei Koordinatenrichtungen keine Korrelation besteht. Damit zerfällt eine räumliche Interpolationsaufgabe in drei Einzelaufgaben.

liegen (Abb. 1). Die Varianz und Kovarianzfunktion lassen sich aus einem umfangreichen Beobachtungsmaterial bestimmen:

Varianz aller Beobachtungen:  $C(0) = M[l_i l_i]$ ,  $M$  = Symbol für Mittelung.

Kovarianz der Punktepaare  $P_i P_k$  mit einem ungefähren Abstand  $s_1$ :  $C(s_1) = M[l_i l_k]$ .

Kovarianz der Punktepaare  $P_i P_k$  mit einem ungefähren Abstand  $s_2$ :  $C(s_2) = M[l_i l_k]$  usw. Die einzelnen Kovarianzen verbindet man mit einer ausgleichenden Kurve, die dann als Kovarianzfunktion für die folgenden Interpolationsaufgaben zur Verfügung steht.

Grundsätzlich besteht auch die Möglichkeit, von bekannten Verteilungen anderer Fehlereigenschaften auf die Kovarianzfunktion zu schließen. In [5] wurde aus der gegebenen Zunahme des mittleren Streckenfehlers mit der Entfernung eine Kovarianzfunktion abgeleitet, die die Fehlereigenschaften der Lagekoordinaten innerhalb eines Stereomodells aufzeigt (Abb. 2)<sup>2)</sup>. Anstelle der Kovarianzen  $C$  sind auf der Abszissenachse die Gewichtskoeffizienten  $Q$  aufgetragen, die sich auf den mittleren Koordinatenfehler  $m_0$  beziehen:

$$C = m_0^2 Q. \quad (1)$$

### 3. Interpolation nach kleinsten Quadraten [7]

Bei den einleitend aufgezählten Problemstellungen können wir mit der Kovarianzfunktion und der Varianz aller Beobachtungen das stochastische Modell verhältnismäßig gut beschreiben. Wir haben dagegen, wie die unterschiedlichen Ansätze der zitierten Autoren zeigen, keine Anhaltspunkte vom geometrischen Modell. Gerade von solchen Voraussetzungen geht aber die Interpolation nach kleinsten Quadraten aus [12]. Sie liefert außerdem — wie auch die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate — die kleinsten mittleren Fehler der Unbekannten. Den systematischen Fehleranteil  $u$  in einem beliebigen Punkt  $P$  bekommt man aus den Kovarianzen, der Varianz und den Beobachtungen  $l_i$  in den  $n$  Stützpunkten  $P_i$  nach der Beziehung:

$$u = (C(\overline{PP_1}), C(\overline{PP_2}), \dots, C(\overline{PP_n})) \cdot \begin{pmatrix} C(0) & C(\overline{P_1 P_2}) & \dots & C(\overline{P_1 P_n}) \\ C(\overline{P_1 P_2}) & C(0) & \dots & C(\overline{P_2 P_n}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C(\overline{P_1 P_n}) & C(\overline{P_2 P_n}) & \dots & C(0) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdot \\ l_n \end{pmatrix} = c C^{-1} l \quad (2)$$

oder mit den Gewichtskoeffizienten (1), bezogen auf  $C(0) = m_0^2$ :

$$u = (Q_{PP_1}, Q_{PP_2}, \dots, Q_{PP_n}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & Q_{P_1 P_2} & \dots & Q_{P_1 P_n} \\ Q_{P_1 P_2} & 1 & \dots & Q_{P_2 P_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{P_1 P_n} & Q_{P_2 P_n} & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdot \\ l_n \end{pmatrix} = q Q^{-1} l \quad (3)^3$$

Zur Verdeutlichung einige einfache Beispiele: Wir gehen von vier Stützstellen und den Gewichtskoeffizienten der Abb. 2 aus und suchen für den Mittelpunkt des Stereomodells die plausibelste Verbesserung  $u$  (Abb. 3):

$$u = (0,19 \ 0,19 \ 0,19 \ 0,19) \cdot \begin{pmatrix} 1,00 & 0,04 & 0,02 & 0,20 \\ 0,04 & 1,00 & 0,20 & 0,02 \\ 0,02 & 0,20 & 1,00 & 0,04 \\ 0,20 & 0,02 & 0,04 & 1,00 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = +0,75.$$

<sup>2)</sup> Der fehlende Wendepunkt in dieser Kovarianzfunktion rührt von der unvollständigen Darstellung des zugrundeliegenden Streckenfehlers her, worauf wir im Zusammenhang einer anderen Veröffentlichung eingehen werden.

<sup>3)</sup> Treten auch Korrelationen zwischen den Koordinatenrichtungen auf (z.B. Affinitäten), so sind die Kovarianzen  $C_{xy}(0) = M[l_x l_y]$ ,  $C_{xy}(s) = M[l_x l_y]$  usw. nicht Null und wir erhalten die allgemeinere Beziehung:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{xy} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{xz} & q_{yz} & q_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{xz} & Q_{yz} & Q_{zz} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}.$$

Abb. 3 veranschaulicht die gesamte Verteilung und Abb. 4 das Interpolationsergebnis der Verfahren [3, 4, 6, 10]. Die Interpolation nach kleinsten Quadraten überträgt die zufälligen Fehler der Stützstellen nicht auf die benachbarten Bereiche.

Der Kompromiß, den diese neue Methode bei eng zusammenliegenden Stützpunkten findet, ist besonders aufschlußreich. Wir gehen von zwei unendlich benachbarten Stützpunkten aus und fragen, welche Verbesserung ein unendlich benachbarter Neupunkt erhält, d. h. mit welchem Betrag wird hier der systematische Anteil festgesetzt (Abb. 5) ?

Fall a)  $l_1 = l_2 = + 1$

$$u = (0,63 \ 0,63) \begin{pmatrix} 1,00 & 0,63 \\ 0,63 & 1,00 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} + 1 \\ + 1 \end{pmatrix} = + 0,77,$$

Fall b)  $l_1 = + 1, \ l_2 = + 2, \ u = + 1,16.$

Fall c)  $l_1 = + 1, \ l_2 = + 3, \ u = + 1,54.$

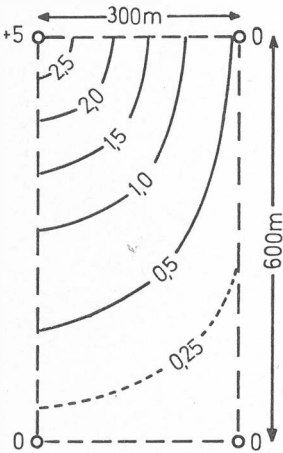


Abb. 3. Interpolation nach kleinsten Quadraten

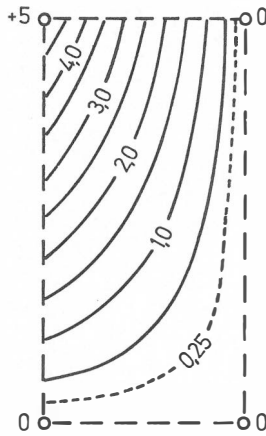


Abb. 4. Interpolation nach den Verfahren [3], [4], [6], [10]

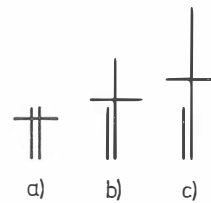


Abb. 5. Interpolation nach kleinsten Quadraten bei Punktnestern

Bei solchen Punktnestern berechnet man nach den bisherigen Methoden Schwerpunkte und betrachtet diese als genau anzuhaltende Stützstellen (z. B. [11]). Die Trennung der unregelmäßigen von den systematischen Fehlern erfolgt bei der Interpolation nach kleinsten Quadraten mit einem verfeinerten stochastischen Modell.

#### 4. Anwendungsmöglichkeiten

Die rechnerische Behandlung der Interpolation nach kleinsten Quadraten kann man mit mittelgroßen EDV-Anlagen bewältigen. Die Kovarianzfunktion ist in der Form eines geschlossenen Ausdrucks — eventuell der Gaußschen Glockenkurve [8] — zu speichern. Aus den Punktkoordinaten, meistens das Ergebnis vorausgehender programmierter Rechnungen, kann man die Strecken für die Entnahme der Kovarianzen berechnen. Über die Anordnung und Anzahl der Punkte sind, wenn man vom begrenzten Speichervorrat der EDV-Anlagen absieht, keine Voraussetzungen zu machen. Es entfällt also die automationsfeindliche Aufgabe, die Punkte in Dreiecks- oder Vierecksmaschen einzuteilen bzw. Beobachtungen einzelner Punktgruppen zu mitteln. Die Interpolation nach kleinsten Quadraten kann in den analytisch-photogrammetrischen Auswerteprozess an verschiedenen Stellen als Unterprogramm eingefügt werden.

#### Literatur

[1] ACKERMANN, F.: Lageblockausgleichungen mit großen Punktmengen. BuL 38, S. 232—240 (1970).

[2] ARTHUR, D.: Interpolation of a Function of Many Variables. Photogr. Eng. 31, p. 348—349 (1965).

- [3] DEKER, H.: Noch ein Beitrag zum Thema „Modelleinpassung“. BuL **32**, S. 8–13 (1964).
- [4] GOTTHARDT, E.: Eine Interpolationsformel für die Modelleinpassung. BuL **30**, S. 50–56 (1962).
- [5] KRAUS, K.: Zur photogrammetrischen Lageblockausgleichung unabhängiger Einzelmodelle. BuL **35**, S. 151–156 (1967).
- [6] KUPFER, G.: Zur Einpassung photogrammetrischer Modelle in das Landesnetz. BuL **31**, S. 86–93 (1963).
- [7] MORITZ, H.: Statistische Methoden in der gravimetrischen Geodäsie. ZfV **88**, S. 407–416 (1963).
- [8] MORITZ, H.: Zur Genauigkeit der Höhen-schichtlinien. ZfV **89**, S. 453–456 (1964).
- [9] MUELLER, B.-G.: Betrachtungen und Untersuchungen zur blockweisen Aerotriangulation. Geodätisches Institut der TH Aachen 1963.
- [10] ROELOFS, R.: Modelleinpassung durch Pseudo-Affintransformation. BuL **30**, S. 143–146 (1962).
- [11] SANDER, W.: Die Nachbarschaft an Modellrändern bei großmaßstäbigen photogrammetrischen Auswertungen. ZfV **89**, S. 12–24 (1964).
- [12] WOLF, H.: Prädiktion und Punktausgleichung. ZfV **94**, S. 165–169 (1969).
- [13] ZIEMANN, H.: Untersuchungen an Reseauaufnahmen. DGK Reihe C, Nr. 104, München 1967.