

Genauigkeitserwartung photographischer Sternpositionen bei geschlossener Blockausgleichung

H. EBNER, Stuttgart

Institut für Photogrammetrie

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen 1969 August 28)

Es wird auf theoretischem Weg die Genauigkeit untersucht, die für photographisch bestimmte Sternpositionen zu erwarten ist, wenn die ganze Sphäre mit einem Netz von Feldern je 4 Platten überdeckt wird und diese in einem geschlossenen Block simultan ausgeglichen werden. Anhand durchgerechneter schematischer Kugelblöcke mit nur wenigen Anhaltsternen wird der Einfluß der Zahl der Felder auf die Genauigkeit abgeschätzt. Bei Aufnahmen mit 2 m Brennweite ist für einen Block mit 2500 Feldern eine mittlere Positionsgenauigkeit von 0",1 zu erwarten.

The theoretical accuracy of photographically determined star positions is studied, based on the assumption that the whole sphere is covered by a net of fields, 4 plates each, and that all the plates are adjusted simultaneously in a closed block. The influence of the number of fields on the accuracy is estimated by computing schematized spheric blocks containing only a few reference stars. If the plates are taken with a focal length of 2 meters, the block will consist of 2500 fields, and a mean accuracy of star position of 0",1 can be expected.

1. Einleitung

Auf die Möglichkeit, für die Reduktion photographischer Sternpositionen die gesamte Sphäre mit einander überlappenden photographischen Platten zu überdecken und das auftretende System von Beobachtungsgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate simultan auszugleichen, hat erstmals EICHHORN [1] hingewiesen. Durch die Anwendung eines solchen kugelförmigen Verbandes von Platten ließen sich über den gesamten Himmel homogene Sternpositionen erhalten. Falls für diese geschlossenen Verbände bei Verwendung entsprechend vieler Einzelplatten und relativ weniger Anhaltsterne günstige Genauigkeitseigenschaften, das heißt eine geringe Fehlerfortpflanzung nachgewiesen werden kann, müßte es durch Anwendung entsprechend langer Brennweiten mit dieser Methode möglich sein, ein neues, sehr dichtes System von Sternpositionen zu schaffen, dessen Genauigkeit bei 0",1 oder darunter liegt. Auf diese Weise wäre es möglich, die vorhandenen Kataloge zu überprüfen bzw. zu verbessern.

Die theoretische Genauigkeit solcher kugelförmiger Verbände wurde im Rahmen der Dissertation des Autors untersucht (EBNER [2]). Die Sphäre wird in einzelne Areale oder Felder zerlegt. Zu jedem Feld gehören 4 Platten, von denen jede einzelne das Feld vollständig überdeckt. Auf diese Weise kann das Feld von verschiedenen systematischen Fehlern der Einzelplatten befreit und die Streuung einer einzelnen Sternposition auf die Hälfte verkleinert werden. In erster Linie sollte festgestellt werden, in welchem Maße die Fehlerfortpflanzung vom Öffnungswinkel der Aufnahmen und damit von der Anzahl der Felder abhängt. Im vorliegenden Aufsatz werden die Voraussetzungen und die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit dargelegt. Für einen zusammenhängenden Verband von Feldern wird im folgenden die in der Photogrammetrie übliche Bezeichnung „Block“ verwendet.

2. Das mathematische Modell

Für jede Meßkoordinate der Anhaltsterne und der Feldsterne wird eine Beobachtungsgleichung aufgestellt. Die sphärischen Koordinaten der Anhaltsterne werden als fehlerfrei angenommen. Eine anderweitige, sehr sichere Bestimmung ihrer Positionen ist somit vorausgesetzt. Die Meßkoordinaten werden als unkorreliert und gleich genau unterstellt. Wenn der Stern i auf der Platte k abgebildet ist, so treten in den Beobachtungsgleichungen die Meßkoordinaten x_{ik} und y_{ik} als Funktionen der unbekanntenen Plattenkonstanten a_k, b_k, \dots und der sphärischen Koordinaten α_i und δ_i auf.

$$\begin{aligned} x_{ik} &= f_1(a_k, b_k, \dots, \alpha_i, \delta_i) \\ y_{ik} &= f_2(a_k, b_k, \dots, \alpha_i, \delta_i) . \end{aligned} \quad (1)$$

Ist der Stern i ein Feldstern, so stellen α_i und δ_i zu bestimmende Parameter dar. Handelt es sich beim Stern i hingegen um einen Anhaltstern, so sind α_i und δ_i gegeben. Das gesamte System der Beobach-

tungsgleichungen enthält somit als Unbekannte die Plattenkonstanten aller Aufnahmen und die sphärischen Koordinaten aller Feldsterne. Für die ausgleichungstechnische Behandlung sind die allgemeinen Beziehungen (1) einer Linearisierung zu unterziehen. Dazu ist die Kenntnis von Näherungswerten für die sphärischen Koordinaten α und δ der Feldsterne erforderlich. Diese können zum Beispiel aus einer Vorausgleichung unter Verwendung vorhandener Kataloge gewonnen werden. In den linearisierten Beobachtungsgleichungen treten dann anstelle von α und δ die Korrekturen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ auf.

Hinsichtlich der Wahl der Plattenkonstanten wurden verschiedene Ansätze untersucht. Die beiden wichtigsten seien vorgestellt:

Ansatz 1: Für jede Platte werden drei Winkelparameter φ , ω und κ bestimmt, die eine Orientierung der Aufnahme-Strahlenbündel auf der Himmelskugel ermöglichen. Die Drehungen φ und ω wirken in Richtung der Achsen x und y , κ bedeutet eine Drehung um das Plattenzentrum.

Ansatz 2: Zu den Plattenkonstanten des Ansatzes 1 wird eine mehreren Aufnahmen gemeinsame Maßstabskorrektur m der Meßkoordinaten eingeführt. Dabei ist angenommen, daß jeweils Gruppen von Platten unter sehr ähnlichen Aufnahmebedingungen hergestellt werden und somit etwa den gleichen Maßstab aufweisen.

Mit diesen vier Plattenkonstanten ergibt sich der Zusammenhang zwischen den Meßkoordinaten x, y und den Standardkoordinaten ξ, η in linearisierter Form zu:

$$\left. \begin{aligned} x/f &= \xi + (1 + \xi^2) \cdot \varphi + \xi \eta \cdot \omega - \eta \kappa + \xi \cdot m \\ y/f &= \eta + \xi \eta \cdot \varphi + (1 + \eta^2) \omega + \xi \kappa + \eta \cdot m \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

In (2) bedeutet f die Brennweite. Die Drehungen φ und ω sind aus der Photogrammetrie entlehnt. Für schmale Öffnungswinkel können die Glieder ξ^2, η^2 und $\xi \eta$ gegenüber 1 vernachlässigt werden, und φ und ω erhalten dann die Bedeutung reiner Verschiebungen, wie sie in der Astrometrie verwendet werden. Die vier Plattenkonstanten ermöglichen in diesem Falle eine Ähnlichkeitstransformation zwischen den Meßkoordinaten und den Standardkoordinaten. Neben den Ansätzen 1 und 2 wurden noch einige weitere untersucht, darunter ein Affinansatz mit 6 Konstanten und ein projektiver Ansatz mit 8 Parametern pro Platte.

3. Durchführung der Untersuchung

Um die Abhängigkeit der Fehlerfortpflanzung von der Anzahl der Felder zu erhalten, die die gesamte Sphäre überdecken, werden vier verschieden große schematische Blöcke untersucht. Sie sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Die Form der Blöcke mit 12, 32 und 92 Feldern zeigt Abbildung 1.

Tabelle 1. Daten der untersuchten geschlossenen Blöcke

Anzahl der Felder	Öffnungswinkel	Anzahl der Anhaltsterne	Anzahl der Feldsterne
6 (Würfel)	110°	4	4
12 (Dodekaeder)	75°	4	16
32	48°	6	54
92	28°	10	170

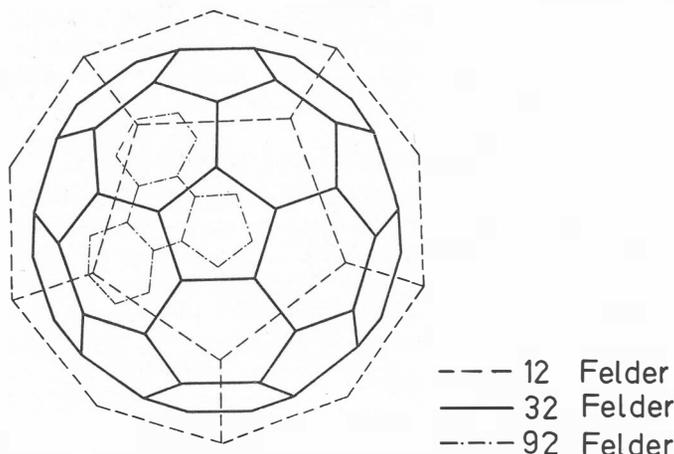


Abb. 1. Schematischer Aufbau der kugelförmigen Blöcke mit 12, 32 und 92 Feldern

Die zugrundegelegte Anordnung, bei der jeweils drei Felder eine Ecke bilden (siehe Abb. 1), bietet den Vorteil, bei gegebenem Öffnungswinkel den Himmel mit einem Minimum von Feldern zu überdecken. Von diesem Gesichtspunkt aus ist sie wirtschaftlicher als die im allgemeinen verwendete Anordnung in Form eines rechtwinkligen Gitters. In Bezug auf die Genauigkeit sind die beiden Anordnungen als gleichwertig zu erwarten. Feldsterne und Anhaltsterne werden nur in den Ecken der Felder angenommen. Die Anzahl der zugrundegelegten Anhaltsterne ist aus Tabelle 1 ersichtlich. Sie sind annähernd gleichmäßig über die Sphäre verteilt.

Auf andere Überdeckungsarten der einzelnen Felder bzw. Platten und die Verwendung einer größeren Anzahl von Feld- und Anhaltsternen wurde in der vorliegenden Studie verzichtet. Auf diese Fälle kann eventuell in einer nachfolgenden Arbeit eingegangen werden.

Für die Untersuchung der Fehlerfortpflanzung wird die Gewichtskoeffizientenmatrix Q der Unbekannten berechnet, die bekanntlich gleich der Inversen der Normalgleichungsmatrix N ist.

$$Q = N^{-1} \tag{3}$$

Die Hauptdiagonale von Q enthält die quadratischen Gewichtskoeffizienten q^{kk} und q^{pp} der Plattenkonstanten k und der Sternpositionen p der Feldsterne. Die Streuungen der Sternpositionen ergeben sich aus q^{pp} nach

$$\sigma_p = \frac{\sigma_0}{f} \sqrt{q^{pp}} \tag{4}$$

In (4) bedeutet σ_0 den mittleren Gewichtseinheitsfehler im Längenmaß (bezogen auf das Feld) und f die Brennweite. Die Fehlerfortpflanzung wird durch die Zahlenwerte q^{pp} bzw. die auf $\sigma_0 = 1$ und $f = 1$ bezogenen Streuungen σ_p beschrieben.

Die elektronischen Rechnungen wurden an der Telefunken-Anlage TR 4 des Rechenzentrums und an der Univac-Anlage 1107 des Instituts für Statik und Dynamik der Universität Stuttgart durchgeführt. Die Inversion der größten behandelten Normalgleichungsmatrix, die 646 Unbekannte enthielt, erforderte eine Rechenzeit von etwa 22 Minuten auf der Univac 1107.

4. Ergebnisse und Diskussion

Die Untersuchung der vier verschieden großen kugelförmigen Blöcke (siehe Tabelle 1) ermöglicht einen Einblick in die Abhängigkeit der Fehlerfortpflanzung von der Blockgröße. Die entsprechenden Ergebnisse sind in Abbildung 2 dargestellt. Als Maß der Blockgröße wird die Anzahl der Felder gewählt und auf der Abszisse in logarithmischem Maßstab aufgetragen. Für jeden behandelten Block ist auf der Ordinate der quadratische Mittelwert σ_{mittel} und der Maximalwert σ_{max} der auf $\sigma_0 = 1$ und $f = 1$ bezogenen theoretischen Streuungen $\sigma_\alpha \cos \delta$ und σ_δ der Feldsterne dargestellt. Für die Plattenkonstanten wurden die Ansätze 1 und 2 (siehe oben) verwendet.

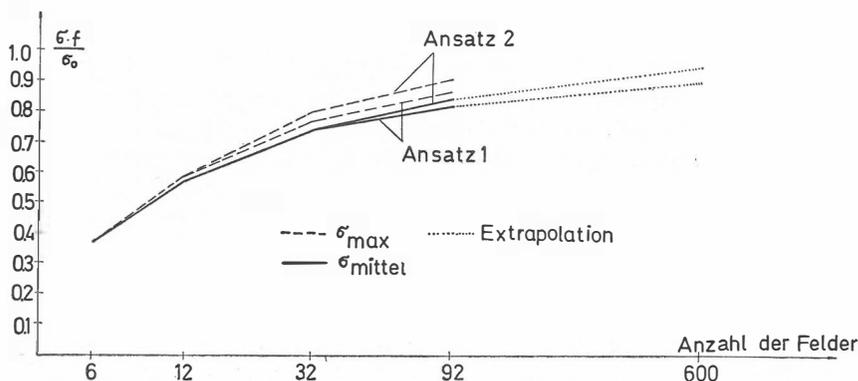


Abb. 2. Die theoretischen Streuungen der Sternpositionen (bezogen auf $\sigma_0 = 1$ und $f = 1$) in Abhängigkeit von der Zahl der Felder

Der größte Block mit 92 Feldern, 10 Anhaltsternen und 170 Feldsternen ergibt für die beiden Ansätze 1 und 2 mittlere Streuungen von $0.82 \sigma_0/f$ und $0.84 \sigma_0/f$. Die entsprechenden maximalen Streuungen betragen $0.87 \sigma_0/f$ und $0.91 \sigma_0/f$. Diese Ergebnisse sind als außerordentlich günstig anzusprechen. Sie dokumentieren eine Winkelgenauigkeit, die höher ist als die innere Genauigkeit σ_0/f , die sich bei Reduktion einer Sternposition aus einem einzelnen Feld ergibt. Die maximale Streuung ist nur um höchstens 8% größer als die mittlere Streuung. Die Genauigkeit ist also auch sehr homogen.

Der stetige Verlauf der Kurven in Abbildung 2 läßt offensichtlich eine Extrapolation für größere Blöcke zu. Bei 600 Platten ergeben sich für die Ansätze 1 und 2 mittlere Streuungen von $0.90 \sigma_0/f$ und $0.95 \sigma_0/f$. Es ist zu erwarten, daß auch für Blöcke, die über diese Größe noch hinausgehen, die mittlere Streuung den Betrag $1.0 \sigma_0/f$ kaum überschreitet.

Daß die günstige Fehlerfortpflanzung der untersuchten Blöcke hauptsächlich durch ihre Kugelform und weniger durch die Anhaltsterne erreicht wird, haben einige Varianten gezeigt, bei denen auf Anhaltsterne vollkommen verzichtet wurde. Um diese Blöcke auf der Himmelskugel geometrisch zu fixieren, wurden drei geeignete Summenbedingungen zwischen den Unbekannten eingeführt. Die Ergebnisse unterscheiden sich nur sehr geringfügig von den entsprechenden Werten, die mit Anhaltsternen erreicht wurden. Abbildung 2 zeigt weiterhin, daß sich die mit den Ansätzen 1 und 2 erzielten Ergebnisse nur geringfügig unterscheiden. Eine Untersuchung weiterer Ansätze mit 6 und 8 Plattenkonstanten hat demgegenüber eine erheblich ungünstigere Fehlerfortpflanzung ergeben.

Beim Block mit 92 Feldern erreichen die auf $\sigma_0 = 1$ und $f = 1$ bezogenen Streuungen zum Teil doppelt so große Beträge wie bei Verwendung des Ansatzes 1 (näheres siehe EBNER [2]). Eine einigermaßen sichere Extrapolation der Ergebnisse für größere Blöcke ist in diesem Falle nicht möglich.

Kompliziertere Ansätze lassen zwar grundsätzlich kleinere mittlere Gewichtseinheitsfehler erwarten als einfache Ansätze, da sie eine weitergehende Kompensation systematischer Fehler der Meßkoordinaten ermöglichen. Für große Blöcke mit nur wenigen Anhaltsternen ist aber zu erwarten, daß durch Verwendung von mehr als 4 Plattenkonstanten die Fehlerfortpflanzung in höherem Maße ungünstiger wird als der mittlere Gewichtseinheitsfehler zurückgeht. Daraus folgt, daß in diesem Falle der einfachere Ansatz eine höhere Positionsgenauigkeit verspricht als ein Ansatz mit 6 oder mehr Konstanten.

Im Falle einer praktischen Anwendung wäre eine Verfeinerung des mathematischen Modells mit 4 Plattenkonstanten in der Form möglich, daß zusätzliche Parameter, wie zum Beispiel geeignet angesetzte Affinkorrekturen, in Form von stochastischen Größen mit dem Erwartungswert Null und bestimmter Streuung eingeführt werden. Auf diese Weise könnte eine Kompensation systematischer Fehler der Meßkoordinaten ohne wesentliche Verschlechterung der oben erhaltenen Fehlerfortpflanzung erreicht werden.

Da mit der vorliegenden Arbeit fehlertheoretisch nachgewiesen werden soll, daß es möglich erscheint, mit einem Minimum von Anhaltsternen ein dichtes und homogenes System sehr genauer Sternpositionen zu erhalten, wird auf die Möglichkeit, die ungünstige Fehlerfortpflanzung komplizierter Ansätze für die Plattenkonstanten durch eine wesentliche Vermehrung der Anhaltsterne zu kompensieren, nicht näher eingegangen.

5. Abschätzungen zu einer praktischen Anwendung

Die Untersuchung der Fehlerfortpflanzung hat für die Ansätze 1 und 2 ergeben, daß die auf $\sigma_0 = 1$ und $f = 1$ bezogenen Streuungen der Sternpositionen praktisch unabhängig von der Blockgröße sind. Für die mittlere Streuung gilt in erster Näherung

$$\sigma_{\text{mittel}} = 1.0 \cdot \sigma_0/f. \quad (5)$$

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler σ_0 als Genauigkeit der ebenen Koordinaten im einzelnen Feld kann für die infragekommenden schmalwinkligen Aufnahmen näherungsweise als brennweiten-unabhängig angenommen werden. Damit ergibt sich aus der Beziehung (5), daß die erreichbare mittlere Positionsgenauigkeit durch Vergrößerung der Brennweite in gewünschtem Maße gesteigert werden kann. Bei gleichem Bildformat steigt dabei die erforderliche Zahl der Felder für die Überdeckung der vollen Sphäre mit dem Quadrat der Brennweite.

Es soll nun abgeschätzt werden, wieviele Felder notwendig sind und welcher numerische Aufwand bei der Ausgleichung des Kugelblocks zu erwarten ist, wenn die folgenden Sternpositionsgenauigkeiten gefordert werden:

$$\sigma_{\text{mittel}} = 0''.2$$

$$\sigma_{\text{mittel}} = 0''.1$$

$$\sigma_{\text{mittel}} = 0''.05$$

Der Abschätzung werden Platten des Formats $24 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$ und eine mindestens 20%-ige Überdeckung benachbarter Felder zugrundegelegt. Für die Streuung einer einzelnen Meßordinate wird ein Betrag von $2 \mu\text{m}$ angenommen. Das ergibt im Feld einen mittleren Gewichtseinheitsfehler von $\sigma_0 = 1 \mu\text{m}$.

In Tabelle 2 sind die Daten der Blöcke zusammengestellt, die sich zu den oben ausgewiesenen Positionsgenauigkeiten ergeben.

Tabelle 2 zeigt, daß zur Erreichung einer mittleren Positionsgenauigkeit von zum Beispiel $0''.1$ ein kugelförmiger Block mit etwa 2500 Feldern erforderlich ist. Die praktische Durchführung eines solchen

Tabelle 2. Abschätzung der erforderlichen Blockdaten

σ_{mittel}	Brennweite	Zahl der Felder	Anzahl der Platten	Anzahl der Meßkoordinaten	Anzahl aller Unbekannten	unbek. Sternposition	unbek. Plattenkonstanten
0"2	1 m	625	2500	30000	10000	2500	7500
0"1	2 m	2500	10000	120000	40000	10000	30000
0"05	4 m	10000	40000	480000	160000	40000	120000

Projekts ist naturgemäß aufwendig. Wenn die entsprechende Organisation zur Verfügung steht, so dürfte es aber möglich sein, innerhalb einiger Jahre die erforderlichen Platten aufzunehmen und zu messen.

Aus Tabelle 2 ist weiterhin ersichtlich, daß ein Block mit zum Beispiel 2500 Feldern etwa 120000 Beobachtungsgleichungen und 40000 Unbekannte ergibt. Die Normalgleichungen können aber stets auf das System der unbekannt Sternpositionen reduziert werden. Im vorliegenden Fall bedeutet dies, daß letztlich ein Gleichungssystem mit 10000 Unbekannten zu lösen ist, was heute bei Verwendung von Großrechenanlagen wie zum Beispiel der CDC 6600 oder einer großen Type der Reihe IBM 360 durchaus möglich ist. Natürlich darf dabei aber auch die Erstellung des Rechenprogramms nicht unterschätzt werden.

Die Blockausgleichung ist ein nichtlinearer Prozeß und muß daher im Prinzip iteriert werden, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Wenn aber für die gesuchten Sternpositionen gute Näherungswerte aus vorhandenen Katalogen zur Verfügung stehen, wird schon eine einmalige Ausgleichung die endgültige Lösung ergeben.

Selbstverständlich reicht die vorliegende Studie allein als Grundlage zu einer praktischen Anwendung nicht aus. Eine Reihe weiterer Untersuchungen wäre dazu erforderlich. Insbesondere müßten auch andere Arten der Überlappung der einzelnen Felder bzw. Platten geprüft werden. Die erhaltenen Ergebnisse lassen jedoch schon jetzt erwarten, daß durch Anwendung eines geschlossenen Blocks von Feldern, der simultan ausgeglichen wird, ein homogenes und dichtes System von Sternpositionen mit einer Genauigkeit von 0"1 oder darunter geschaffen werden kann. Da die außerordentlich günstige Fehlerfortpflanzung des Blocks in der Hauptsache durch die geschlossene Kugelform erreicht wird, dürfte eine Beschränkung auf 100 oder weniger Anhaltsterne möglich sein. Wenn die Positionen der Anhaltsterne neu bestimmt werden, so kann mit dieser Methode eine unabhängige Überprüfung bzw. eine Verbesserung vorhandener Kataloge erfolgen.

Literatur

- [1] H. EICHORN, Über die Reduktion von photographischen Sternpositionen und Eigenbewegungen. *Astron. Nachr.* 285.233 (1960).
- [2] H. EBNER, Genauigkeitsuntersuchung zur photogrammetrischen Sternkoordinatenbestimmung durch geschlossene Blockausgleichung. *Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C: Dissertationen Heft Nr. 141* (1969).