Formeln und Konstanten für die Berechnung der Schweizerischen schiefachsigen Zylinderprojektion und der Transformation zwischen Koordinatensystemen

September 2001

1 Grundlagen

1.1 Zusammenfassung der in der Schweiz verwendeten Bezugssysteme und Bezugsrahmen

System	Rahmen	Ellipsoid	Kartenprojektion
ETRS89	ETRF93	GRS80	(UTM)
CHTRS95	CHTRF95, CHTRF98	GRS80	(UTM, Zone 32)
CH1903	LV03	Bessel 1841	schiefachsige konforme Zylinderprojektion
CH1903+	LV95	Bessel 1841	schiefachsige konforme Zylinderprojektion

Das 3D-Bezugssystem **CHTRS95** (Swiss Terrestrial Reference System 1995) ist eng an das europäische Bezugssystem **ETRS89** angelehnt und mit diesem zum Zeitpunkt 1993.0 identisch. Da bisher keine Gründe vorliegen, daran etwas zu ändern, werden die beiden Systeme auch bis auf Weiteres identisch bleiben. Die bisher realisierten Referenzrahmen CHTRF95 und CHTRF98 basieren auf den geozentrischen Koordinaten der Fundamentalstation Zimmerwald in ETRF93 zur Epoche 1993.0.
Das lokale Bezugssystem **CH1903+** mit dem Referenzrahmen **LV95** (Landesvermessung 1995) ist von CHTRS95 abgeleitet. Dabei wurde darauf geachtet, dass CH1903+ möglichst gut mit dem bisherigen Referenzsystem CH1903 übereinstimmt. Die Parameter, welche das System definieren, wurden allerdings vom heute nicht mehr verwendbaren Fundamentalpunkt (alte Sternwarte Bern) auf den neuen Fundamentalpunkt in Zimmerwald transferiert.
Die Referenzrahmen LV03 und LV95 unterscheiden sich wegen der in LV03 vorhandenen Verzerrungen um bis zu 1.6 Meter. Diese lokalen Verzerrungen werden durch lokale affine Transformationen modelliert (Programm FINELTRA).

1.2 In der Schweiz verwendete Höhensysteme

Das bis jetzt offizielle Höhensystem **LN02** wurde im Jahre 1902 durch die Festlegung der Meereshöhe des Repère Pierre du Niton H(RPN)=373.6 m in Genf definiert, welche aus einer Anschlussmessung an den Pegel von Marseille stammt. Die Höhen der einzelnen Nivellementspunkte wurden durch reine Nivellementsmessungen ohne Berücksichtigung des Schwerefeldes und durch Einzwängung in die Knotenwerte des Nivellement de Précision (1864 - 1891) bestimmt.
Das neue Höhensystem **LHN95** (Landeshöhennetz 1995) basiert ebenfalls auf der Höhe des RPN. Jedoch wurde das daraus abgeleitete Potential des Fundamentalpunktes in Zimmerwald als definierende Grösse festgelegt. Die Höhen der Punkte des LHN95 werden aus einer kinematischen Netzausgleichung des Landesnivellements unter Berücksichtigung von Schweremessungen bestimmt. An den Benutzer werden aus den Potentialwerten berechnete orthometrische Höhen abgegeben.
Für den Datenaustausch mit den Nachbarländern wurde zusätzlich noch das Höhensystem **CHVN95** definiert. Dieses ist zurzeit mit dem europäischen Höhensystem EVRS2000 identisch. Es stützt sich auf die Höhendefinition des Pegels von Amsterdam (NAP) und auf die Resultate des europäischen Nivellements (UELN). Die Höheninformation wird in diesem System in Form von Potentialen und Normalhöhen ausgetauscht.

Die Beziehung zwischen den physikalischen Höhen von LHN95 und CHVN95 mit den in CH1903+ und CHTRS95 berechneten ellipsoidischen Höhen wird durch das Geoidmodell **CHGEO98** hergestellt.

1.3 In der Schweiz verwendete Bezugs-Ellipsoide

Ellipsoid	gr. Halbachse a [m]	kl. Halbachse b [m]	Abplattung 1/f	1. num. Exzentr. e^2
Bessel 1841	6377397.155	6356078.962822	299.15281285	0.006674372230614
GRS 80	6378137.000	6356752.314140	298.257222101	0.006694380023011
WGS 84	6378137.000	6356752.314245	298.257223563	0.006694379990197

Abplattung: $f = \frac{a - b}{a}$

erste numerische Exzentrizität im Quadrat: $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

1.4 Transformationsparameter CHTRS95/ETRS89 ⇔ CH1903(+)

Bei diesen Parametern handelt es sich um die seit 1997 verwendeten Werte zur Transformation zwischen CHTRS95 und CH1903+. Sie können aber ohne Einschränkung auch für die Systeme ETRS89 und CH1903 verwendet werden. Im Fall von CH1903 ist allerdings zu beachten, dass wegen der lokalen Verzerrungen dieses Netzes die transformierten Koordinaten von den offiziellen Koordinaten um bis zu 1.5 Meter abweichen können.

$$\mathbf{X_{CH1903+} = X_{CHTRS95} - 674.374\ m}$$

$$\mathbf{Y_{CH1903+} = Y_{CHTRS95} - 15.056\ m}$$

$$\mathbf{Z_{CH1903+} = Z_{CHTRS95} - 405.346\ m}$$

1.5 Granit87-Parameter

Diese Parameter wurden zwischen 1987 und 1997 für die Transformation zwischen CH1903 und WGS84 verwendet. Wir empfehlen deren Gebrauch heute nicht mehr.

$dX = 660.077$ m
$dY = 13.551$ m
$dZ = 369.344$ m
$s = 1.00000566$ ($m = 5.66$ ppm)

$\alpha = r_x = 2.484$ cc (Neusekunden)
$\beta = r_y = 1.783$ cc (Neusekunden)
$\gamma = r_z = 2.939$ cc (Neusekunden)

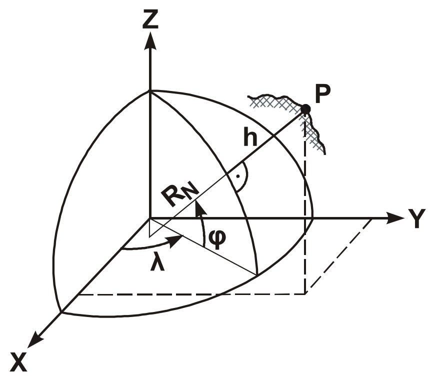
zu den Berechnungsformeln:

$$\begin{pmatrix} X_{WGS84} \\ Y_{WGS84} \\ Z_{WGS84} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} + s \cdot D \cdot \begin{pmatrix} X_{CH1903} \\ Y_{CH1903} \\ Z_{CH1903} \end{pmatrix}$$ mit der Drehmatrix $D = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$ und deren Elementen

$r_{11} = \cos\beta \cos\gamma$
$r_{21} = -\cos\beta \sin\gamma$
$r_{31} = \sin\beta$
$r_{12} = \cos\alpha \sin\gamma + \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma$
$r_{22} = \cos\alpha \cos\gamma - \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$
$r_{32} = -\sin\alpha \cos\beta$
$r_{13} = \sin\alpha \sin\gamma - \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma$
$r_{23} = \sin\alpha \cos\gamma + \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma$
$r_{33} = \cos\alpha \cos\beta$

2 Umrechnung zwischen ellipsoidischen und geozentrisch-kartesischen Koordinaten

2.1 Ellipsoidische Koordinaten (Länge λ, Breite φ, Höhe h) ⇒ geozentrisch-kartesische Koordinaten X, Y, Z



$$X = (R_N + h) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda$$
$$Y = (R_N + h) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda$$
$$Z = \left(R_N \cdot (1 - e^2) + h\right) \cdot \sin\varphi$$

mit Normalkrümmungsradius: $R_N = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}$

Die Parameter a und e sind abhängig vom verwendeten Referenzellipsoid:

a = grosse Halbachse des Ellipsoids
b = kleine Halbachse des Ellipsoids

e = erste numerische Exzentrizität des Ellipsoids = $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

2.2 Geozentrisch-kartesische Koordinaten X, Y, Z ⇒ ellipsoidische Koordinaten (Länge λ, Breite φ, Höhe h)

$$\lambda = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{\dfrac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}}{1 - \dfrac{R_N \cdot e^2}{R_N + h}}\right) \qquad h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos\varphi} - R_N$$

mit $R_N = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}$

zu beachten ist: Die Grössen φ, R_N und h sind voneinander abhängig. Deshalb müssen sie durch einen **iterativen Prozess** (ausgehend von einem Näherungswert φ_0) berechnet werden:

Vorschlag für φ_0: $\varphi_0 = \arctan\dfrac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$

3 Schweizer Projektionsformeln

3.1 Bezeichnungen, Konstanten, Hilfsgrössen

Bezeichnungen

φ, λ:	geogr. Breite und Länge im Bezugssystem CH1903/1903+ bezüglich Greenwich
b, l :	Kugelkoordinaten bezüglich Nullpunkt Bern
$\bar{b}, \bar{l}$:	Kugelkoordinaten bezüglich Pseudoäquatorsystem in Bern
Y, X :	Zivilkoordinaten
y, x :	Landeskoordinaten (Militärkoordinaten) in LV03 oder LV95

Wo nichts anderes angegeben ist, wird in den Formeln die Winkeleinheit Radian [rad] und die Längeneinheit Meter [m] vorausgesetzt.

Konstanten

a	=	6377397.155 m	grosse Halbachse des Bessel-Ellipsoids
E^2	=	0.006674372230614	1.numerische Exzentrizität (im Quadrat) des Bessel-Ellipsoids (*)
φ_0	=	46° 57' 08.66"	geogr. Breite des Nullpunkts in Bern (**)
λ_0	=	7° 26' 22.50"	geogr. Länge des Nullpunkts in Bern (**)

(*) Zur Unterscheidung von der Euler'schen Konstante e wurde in den Formeln dieses Anhangs die erste numerische Exzentrizität mit E bezeichnet.

(**) dabei handelt es sich um die so genannten 'alten Werte', welche für alle geodätischen Anwendungen noch heute gültig sind. Die so genannten 'neuen Werte' (aus einer Neubestimmung der astronomischen Koordinaten der alten Sternwarte Bern von 1938: φ_0 = 46° 57' 07.89", λ_0 = 7° 26' 22.335") wurden nur für kartografische Zwecke (Längen- und Breitenangaben auf den Landeskarten) verwendet. Wir empfehlen die Verwendung dieser Werte nicht.

Berechnung von Hilfsgrössen

Radius der Projektionskugel:

$$R = \frac{a \cdot \sqrt{1-E^2}}{1-E^2 \sin^2 \varphi_0} \qquad = 6378815.90365 \text{ m}$$

Verhältnis Kugellänge zu Ellipsoidlänge:

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{E^2}{1-E^2} \cdot \cos^4 \varphi_0} \qquad = 1.00072913843038$$

Breite des Nullpunkts auf der Kugel:

$$b_0 = \arcsin\left(\frac{\sin \varphi_0}{\alpha}\right) \qquad = 46° \, 54' \, 27.83324844''$$

Konstante der Breitenformel:

$$K = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b_0}{2}\right)\right) - \alpha \cdot \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)\right) + \frac{\alpha \cdot E}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+E \cdot \sin \varphi_0}{1-E \cdot \sin \varphi_0}\right) \qquad = 0.0030667323772751$$

3.2 Ellipsoid. Koordinaten (λ, φ) ⇒ Schweiz. Projektionskoordinaten (y, x) (strenge Formeln)

Die Zwischenergebnisse beziehen sich auf das Beispiel Rigi mit folgenden Werten:

φ = 47° 03' 28.95659233" = 0.821317799 rad
λ = 8° 29' 11.11127154" = 0.148115967 rad

a) Ellipsoid (φ, λ) ⇒ Kugel (b, l) (Gauss'sche Projektion)

Hilfsgrösse:

$$S = -\alpha \cdot \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right) - \frac{\alpha \cdot E}{2} \cdot \ln\left(\frac{1 + E \cdot \sin\varphi}{1 - E \cdot \sin\varphi}\right) + K$$

= 0.931969601072417

Kugelbreite:

$$b = 2 \cdot (\arctan\left(e^{S}\right) - \frac{\pi}{4})$$

= 0.820535226 rad
(= 47° 00' 47.539422864")

Kugellänge:

$$l = \alpha \cdot (\lambda - \lambda_0)$$

= 0.0182840649 rad
(= 1° 02' 51.3591108468")

b) Äquatorsystem (b, l) ⇒ Pseudoäquatorsystem ($\bar{b}$, $\bar{l}$) (Rotation)

$$\bar{l} = \arctan\left(\frac{\sin l}{\sin b_0 \cdot \tan b + \cos b_0 \cdot \cos l}\right)$$

= 0.0124662714 rad
(= 0° 42' 51.3530463924")

$$\bar{b} = \arcsin\left(\cos b_0 \cdot \sin b - \sin b_0 \cdot \cos b \cdot \cos l\right)$$

= 0.00192409259 rad
(= 0° 06' 36.8725855284")

c) Kugel ($\bar{b}$, $\bar{l}$) ⇒ Projektionsebene (y, x) (Mercator-Projektion)

$$Y = R \cdot \bar{l}$$

= 79520.05
y_{LV03} = Y + 600000 = 679520.05
y_{LV95} = Y + 2600000 = 2679520.05

$$X = \frac{R}{2} \cdot \ln\left(\frac{1 + \sin\bar{b}}{1 - \sin\bar{b}}\right)$$

= 12273.44
x_{LV03} = X + 200000 = 212273.44
x_{LV95} = X + 1200000 = 1212273.44

3.3 Schweizer Projektionskoordinaten (y, x) ⇒ ellipsoid. Koordinaten (λ, φ) (strenge Formeln)

Als Beispiel wurde der Punkt Rigi verwendet: y = 679520.05
x = 212273.44

a) Projektionsebene (y, x) ⇒ Kugel ($\bar{b}$, $\bar{l}$)

$Y = y_{LV03} - 600'000$	$Y = y_{LV95} - 2'600'000$	= 79520.05
$X = x_{LV03} - 200'000$	$X = x_{LV95} - 1'200'000$	= 12273.44

$$\bar{l} = \frac{Y}{R} \qquad 0.01246627136 \text{ rad}$$

$$\bar{b} = 2 \cdot \left[\arctan\left(e^{\frac{X}{R}} \right) - \frac{\pi}{4} \right] \qquad 0.00192409259 \text{ rad}$$

b) Pseudoäquatorsystem ($\bar{b}$, $\bar{l}$) ⇒ Äquatorsystem (b, l)

$$b = \arcsin\left(\cos b_0 \cdot \sin \bar{b} + \sin b_0 \cdot \cos \bar{b} \cdot \cos \bar{l}\right) \qquad = 0.820535226 \text{ rad}$$

$$l = \arctan\left(\frac{\sin \bar{l}}{\cos b_0 \cdot \cos \bar{l} - \sin b_0 \cdot \tan \bar{b}} \right) \qquad = 0.0182840649 \text{ rad}$$

c) Kugel (b, l) ⇒ Ellipsoid (φ, λ)

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{l}{\alpha} \qquad = 0.148115967 \text{ rad}$$

= 8° 29' 11.111272"

$$S = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1}{\alpha} \left[\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2} \right) - K \right] + E \cdot \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\arcsin(E \cdot \sin\varphi)}{2} \right)$$

$$\varphi = 2 \arctan\left(e^{S}\right) - \frac{\pi}{2}$$

Die Gleichungen für φ und auch S müssen **iterativ** gelöst werden. Als Startwert ist φ = b zu empfehlen.

Die einzelnen Iterationsschritte ergeben folgende Ergebnisse:

0. Schritt:	S = 0	φ = 0.820535226
1. Schritt	S = 0.933114264192610	φ = 0.821315364725524
2. Schritt	S = 0.933117825679560	φ = 0.821317791017021
3. Schritt	S = 0.933117836751434	φ = 0.821317798559814
4. Schritt	S = 0.933117836785854	φ = 0.821317798583263
5. Schritt	S = 0.933117836785961	φ = 0.821317798583336
6. Schritt	S = 0.933117836785961	φ = 0.821317798583336
		φ = 47° 03' 28.956592"

3.4 Schweiz. Projektionskoordinaten (y, x) ⇒ ellipsoid. Koordinaten (φ, λ) (Näherungsformeln)

vereinfacht aus: [Bolliger 1967]

Bezeichnungen und Masseinheiten

φ, λ = geogr. Breite und Länge bezüglich Greenwich **in [10000 "]**
Y, X = Zivilkoordinaten im Schweiz. Projektionssystem **in [1000 km]**
y, x = Landeskoordinaten, bzw. Militärkoordinaten LV03, bzw. LV95 **in [1000 km]**

Berechnung

$Y = y_{LV03} - 0.6$ $X = x_{LV03} - 0.2$ bzw.
$Y = y_{LV95} - 2.6$ $X = x_{LV95} - 1.2$

$\lambda = 2.67825 + a1*Y + a3*Y^3 + a5*Y^5$ mit

a1 =	+ 4.729 730 56	a3 = - 0.044 270	a5 = + 0.000 96
	+ 0.792 571 4 $* X$	- 0.025 50 $* X$	
	+ 0.132 812 $* X^2$	- 0.009 6 $* X^2$	
	+ 0.025 50 $* X^3$		
	+ 0.004 8 $* X^4$		

$\varphi = 16.902866 + p0 + p2*Y^2 + p4*Y^4$ mit

p0 =	0	p2 = - 0.271 353 79	p4 = + 0.002 442
	+ 3.238 648 77 $* X$	- 0.045 044 2 $* X$	+ 0.001 32 $* X$
	- 0.002 548 6 $* X^2$	- 0.007 553 $* X^2$	
	- 0.013 245 $* X^3$	- 0.001 46 $* X^3$	
	+ 0.000 048 $* X^4$		

Näherungsfehler (für lYl < 0.2 und lXl < 0.1):

bei Näherung bis 3. Potenz:	Δλ < 0.16"	und	Δφ < 0.04"	
bei Näherung bis 5. Potenz:	Δλ < 0.00014"	und	Δφ < 0.00004"	

Zur Rechenkontrolle kann das vorangehende Zahlenbeispiel (Punkt Rigi) verwendet werden. Weitere Näherungsformeln und Rechenbeispiele finden sich in [Bolliger 1967].

3.5 ellipsoid. Koordinaten (λ, φ) ⇒ Schweiz. Projektionskoordinaten (y, x) (Näherungsformeln)

vereinfacht aus: [Bolliger 1967]

Bezeichnungen

φ, λ = geogr. Breite und Länge bezüglich Greenwich **in [10'000 "]**
Y, X = Zivilkoordinaten im Schweiz. Projektionssystem **in [1000 km]**
y, x = Landeskoordinaten, bzw. Militärkoordinaten LV03, bzw. LV95 in [1000 km]

Hilfsgrössen:

Φ = φ – 16.902866"

Λ = λ – 2.67825"

Berechnung

$Y = y1*\Lambda + y3*\Lambda^3 + y5*\Lambda^5$ mit

y1 = + 0.211 428 533 9
- 0.010 939 608 * Φ
- 0.000 002 658 * Φ^2
- 0.000 008 53 * Φ^3

y3 = - 0.000 044 232 7
+ 0.000 004 291 * Φ
- 0.000 000 309 * Φ^2

y5 = + 0.000 000 019 7

$X = x0 + x2*\Lambda^2 + x4*\Lambda^4$ mit

x0 = 0
+ 0.308 770 746 3 * Φ
+ 0.000 075 028 * Φ^2
+ 0.000 120 435 * Φ^3
+ 0 * Φ^4
+ 0.000 000 07 * Φ^5

x2 = + 0.003 745 408 9
- 0.000 193 792 7 * Φ
+ 0.000 004 340 * Φ^2
- 0.000 000 376 * Φ^3

x4 = - 0.000 000 734 6
+ 0.000 000 144 4 * Φ

$y_{LV03} = Y + 0.6$ $x_{LV03} = X + 0.2$ bzw.
$y_{LV95} = Y + 2.6$ $x_{LV95} = X + 1.2$

Näherungsfehler (für IΛI < 1.0 und IΦI < 0.316):

bei Näherung bis 3. Potenz:	ΔY < 1.2 m und	ΔX < 0.75 m
bei Näherung bis 5. Potenz:	ΔY < 0.001 m und	ΔX < 0.0007 m

Zur Rechenkontrolle kann das vorangehende Zahlenbeispiel (Punkt Rigi) verwendet werden. Weitere Näherungsformeln und Rechenbeispiele finden sich in [Bolliger 1967].

3.6 Formeln für die Meridiankonvergenz und die Längenverzerrung

Die Verzerrungen, welche durch die Projektion entstehen, können durch die **Meridiankonvergenz μ** (Winkel zwischen der ellipsoidischen Nordrichtung und der Nordrichtung der Projektion) und der **Längenverzerrung m** (Verhältnis einer infinitesimal kleinen Strecke in der Projektion und auf dem Ellipsoid) vollständig beschrieben werden:

Meridiankonvergenz:

$$\mu = \arctan \frac{\sin b_0 \cdot \sin l}{\cos b_0 \cdot \cos b + \sin b_0 \cdot \sin b \cdot \cos l}$$

Näherungsformel:

$$\mu = 10.668 \cdot 10^{-6} \cdot Y + 1.788 \cdot 10^{-12} \cdot Y \cdot X - 0.14 \cdot 10^{-18} \cdot Y^3$$

Dabei bezeichnen Y und X die Projektionskoordinaten im zivilen System in [m]. Die Meridiankonvergenz μ wird in Neugrad (Gon) erhalten.

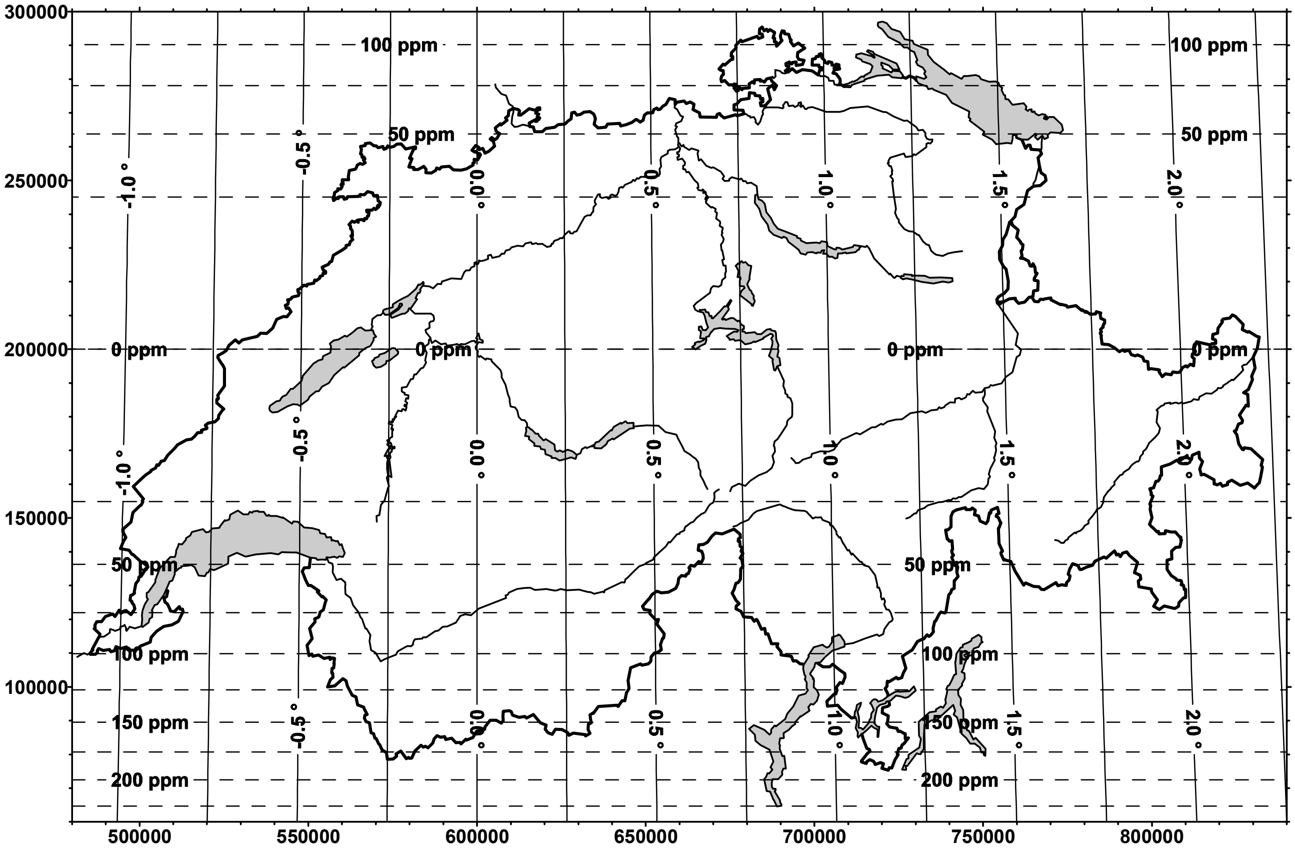
Längenverzerrung (Hauptglied):

$$m = \frac{s_{proj}}{s_{ell}} = \alpha \cdot \frac{R}{R_N} \cdot \frac{\cos b}{\cos \varphi \cdot \cos \bar{b}}$$

Näherungsformel:

$$m = 1 + \frac{X^2}{2R^2}$$

Beispiel: Punkt Rigi (y = 679520.05, x = 212273.44)
Aus geogr. Koordinaten: μ = 0.8499955 gon, m = 1.000001852
Aus Näherungsformeln: μ = 0.8499946 gon, m = 1.000001851



Darstellung der Meridiankonvergenz (in Altgrad) und der Längenverzerrung (gestrichelt, in ppm)

4 Näherungslösungen CH1903 ⇔ WGS84

4.1 Näherungsformeln für die direkte Umrechnung von: ellipsoidischen WGS84-Koordinaten (λ, φ, h) ⇒ Schweizer Projektionskoordinaten (y, x, h')

(Genauigkeit im 1-Meter-Bereich)

nach: [H. Dupraz, Transformation approchée de coordonnées WGS84 en coordonnées nationales suisses, IGEO-TOPO, EPFL, 1992]

Die Parameter wurden von U. Marti (Mai 1999) neu berechnet. Zudem wurden die Einheiten so angepasst, dass sie mit den Formeln aus [Bolliger 1967] vergleichbar werden.

1. Breite φ und Länge λ sind in Sexagesimalsekunden ["] umzuwandeln

2. Hilfsgrössen (Breiten- und Längendifferenz gegenüber Bern in der Einheit [10000"]) berechnen:

$$\varphi' = (\varphi - 169028.66\ ")/10000$$
$$\lambda' = (\lambda - 26782.5\ ")/10000$$

3.
$$
\begin{array}{llrll}
y\ [m] = & & 600072.37 & & \\
 & + & 211455.93 & * \lambda' & \\
 & - & 10938.51 & * \lambda' & * \varphi' \\
 & - & 0.36 & * \lambda' & * \varphi'^2 \\
 & - & 44.54 & * \lambda'^3 & \\
 & & & & \\
x\ [m] = & & 200147.07 & & \\
 & + & 308807.95 & & * \varphi' \\
 & + & 3745.25 & * \lambda'^2 & \\
 & + & 76.63 & & * \varphi'^2 \\
 & - & 194.56 & * \lambda'^2 & * \varphi' \\
 & + & 119.79 & & * \varphi'^3 \\
 & & & & \\
h'\ [m] = & h - & 49.55 & & \\
 & + & 2.73 & * \lambda' & \\
 & + & 6.94 & & * \varphi'
\end{array}
$$

4. Zahlenbeispiel

gegeben:	φ = 46° 2' 38.87"	λ = 8° 43' 49.79"	h = 650.60 m
⇒	φ' = -0.326979	λ' = 0.464729	
⇒	y = 699 999.76 m	x = 99 999.97 m	h' = 600.05 m
aus NAVREF:	y = 700 000.0 m	x = 100 000.0 m	h' = 600 m

Diese Näherungen sind für die ganze Schweiz besser als 1 Meter in der Lage und 0.5 Meter in der Höhe.

Bemerkung zu den Höhen: In diesen Formeln wird davon ausgegangen, dass mit ellipsoidischen Höhen gearbeitet wird, wie sie z.B. mit GPS-Messungen erhalten werden. Wird mit 'Höhen über Meer' gearbeitet, so sind die Höhen im Meterbereich in beiden Systemen gleich. Sie müssen also in diesem Fall nicht umgerechnet werden.

4.2 Näherungsformeln für die direkte Umrechnung von: Schweizer Projektionskoordinaten (y, x, h') ⇒ ellipsoidische WGS84-Koordinaten (λ, φ, h)

(Genauigkeit im 0.1"-Bereich)

Es handelt sich dabei um eine Herleitung von U. Marti vom Mai 1999, basierend auf den Formeln aus [Bolliger, 1967]

1. Die Projektionskoordinaten y (Rechtswert) und x (Hochwert) sind ins zivile System (Bern = 0 / 0) und in die Einheit [1000 km] umzuwandeln:

$$y' = (y - 600000\ \text{m})/1000000$$
$$x' = (x - 200000\ \text{m})/1000000$$

2. Länge und Breite in der Einheit [10000"] berechnen:

$$\begin{aligned} \lambda' = \ & 2.6779094 \\ & + 4.728982 \ * y' \\ & + 0.791484 \ * y' \ * x' \\ & + 0.1306 \ * y' \ * x'^2 \\ & - 0.0436 \ * y'^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi' = \ & 16.9023892 \\ & + 3.238272 \ * x' \\ & - 0.270978 \ * y'^2 \\ & - 0.002528 \ * x'^2 \\ & - 0.0447 \ * y'^2 \ * x' \\ & - 0.0140 \ * x'^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h\ [\text{m}] = \ & h' + 49.55 \\ & - 12.60 \ * y' \\ & - 22.64 \ * x' \end{aligned}$$

3. Umrechnen der Länge und Breite in die Einheit [°]

$$\lambda = \lambda' * 100 / 36$$
$$\varphi = \varphi' * 100 / 36$$

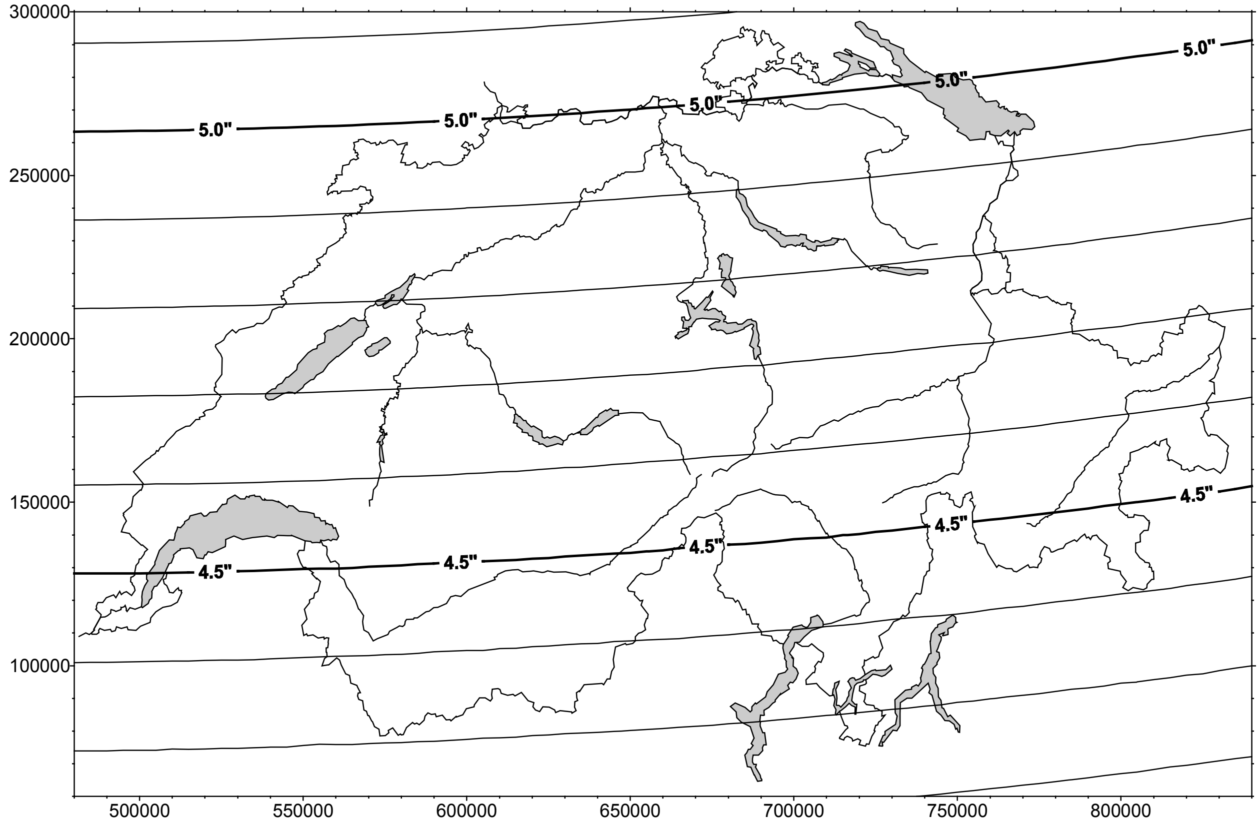
4. Zahlenbeispiel

gegeben:	y = 700 000 m	x = 100 000 m	h' = 600 m
⇒	y' = 0.1	x' = -0.1	
⇒	λ' = 3.14297976	φ' = 16.57588564	h = 650.55 m
⇒	λ = 8° 43' 49.80"	φ = 46° 02' 38.86"	
aus NAVREF:	λ = 8° 43' 49.79"	φ = 46° 02' 38.87"	h = 650.60 m

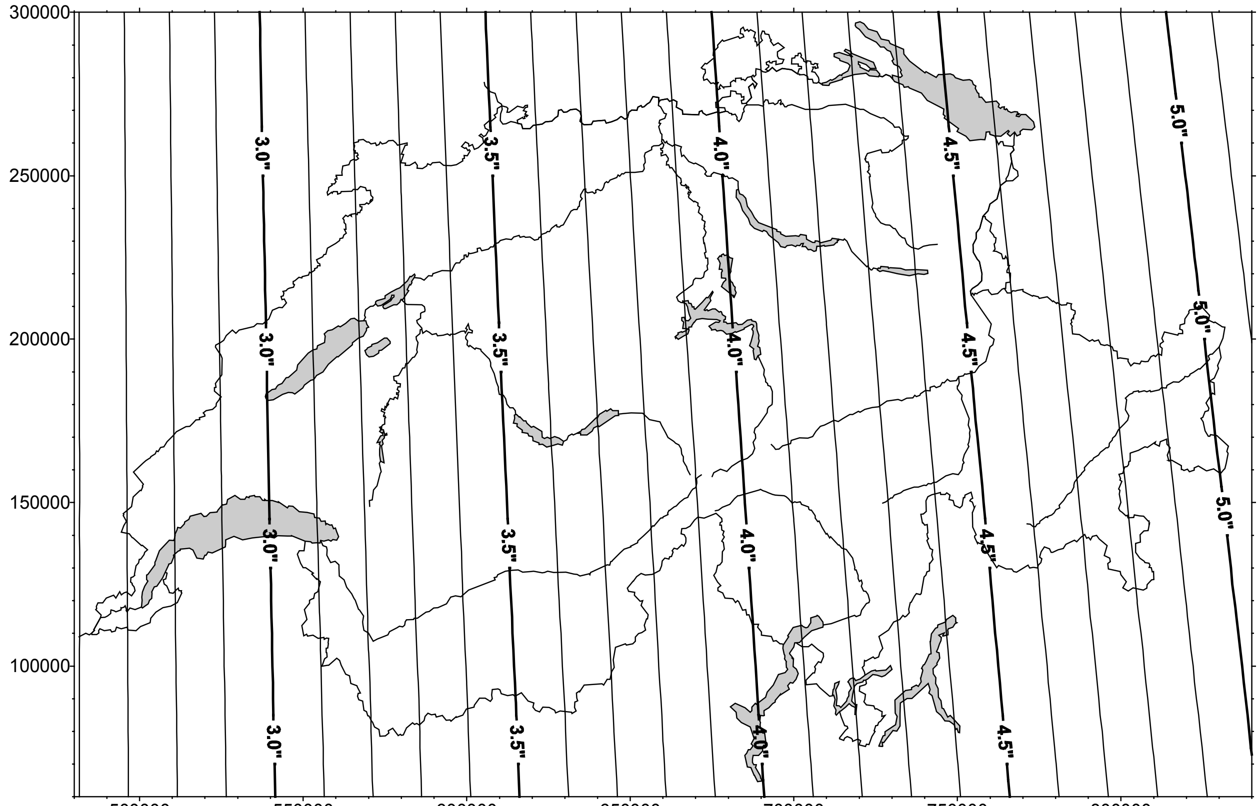
Diese Näherungen sind für die ganze Schweiz besser als 0.12" in der Länge, 0.08" in der Breite und 0.5 Meter in der Höhe.

Bemerkung zu den Höhen: In diesen Formeln wird davon ausgegangen, dass mit ellipsoidischen Höhen gearbeitet wird, wie sie z.B. mit GPS-Messungen erhalten werden. Wird mit 'Höhen über Meer' gearbeitet, so sind die Höhen im Meterbereich in beiden Systemen gleich. Sie müssen also in diesem Fall nicht umgerechnet werden.

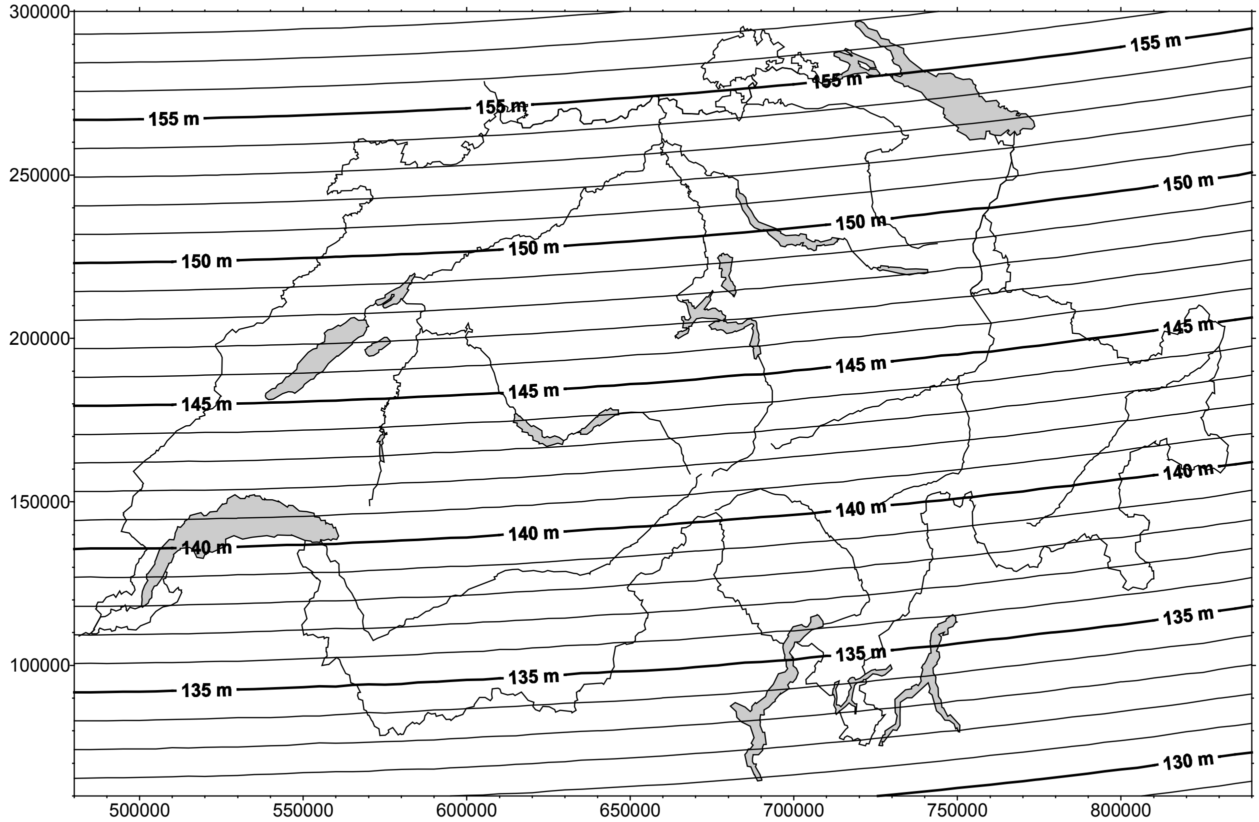
5 Grafische Darstellung der Differenzen zwischen CH1903 und WGS84



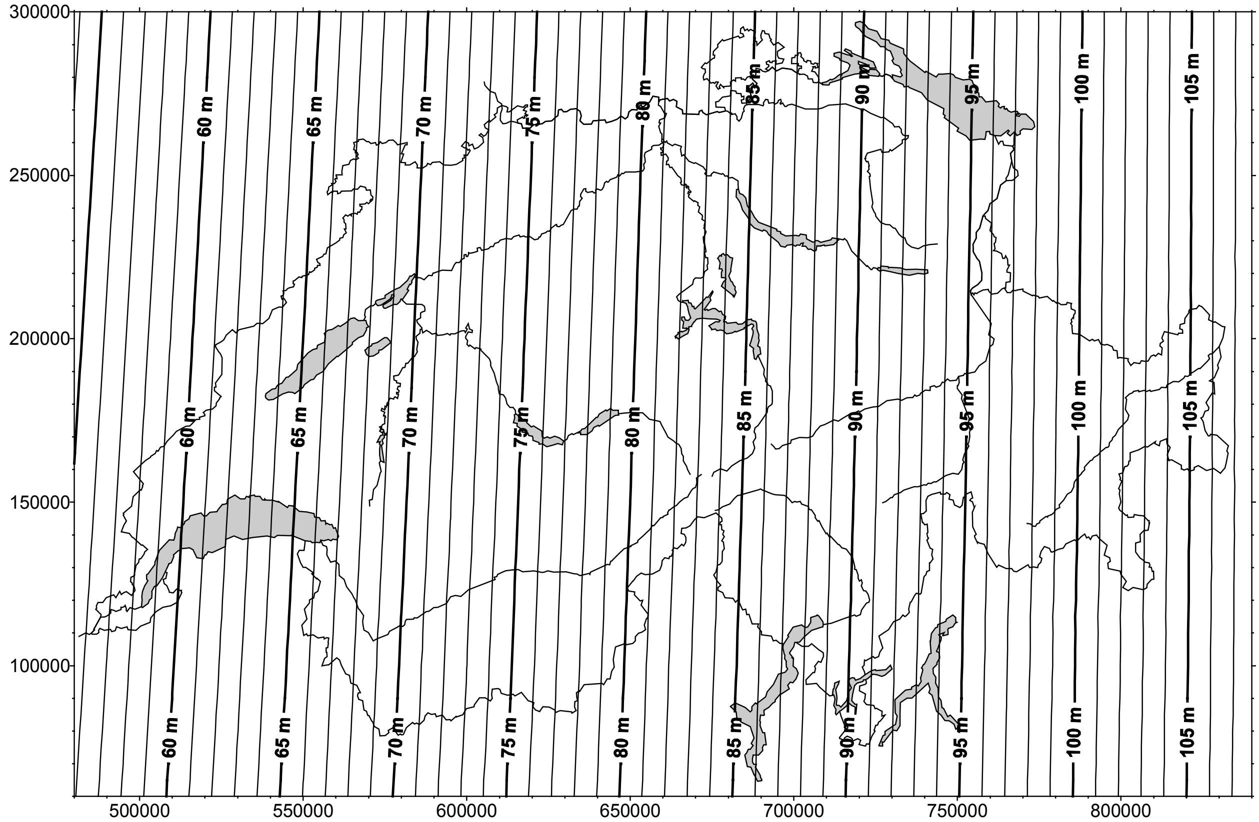
Breitenunterschiede CH1903 minus WGS84 (in Bogensekunden)



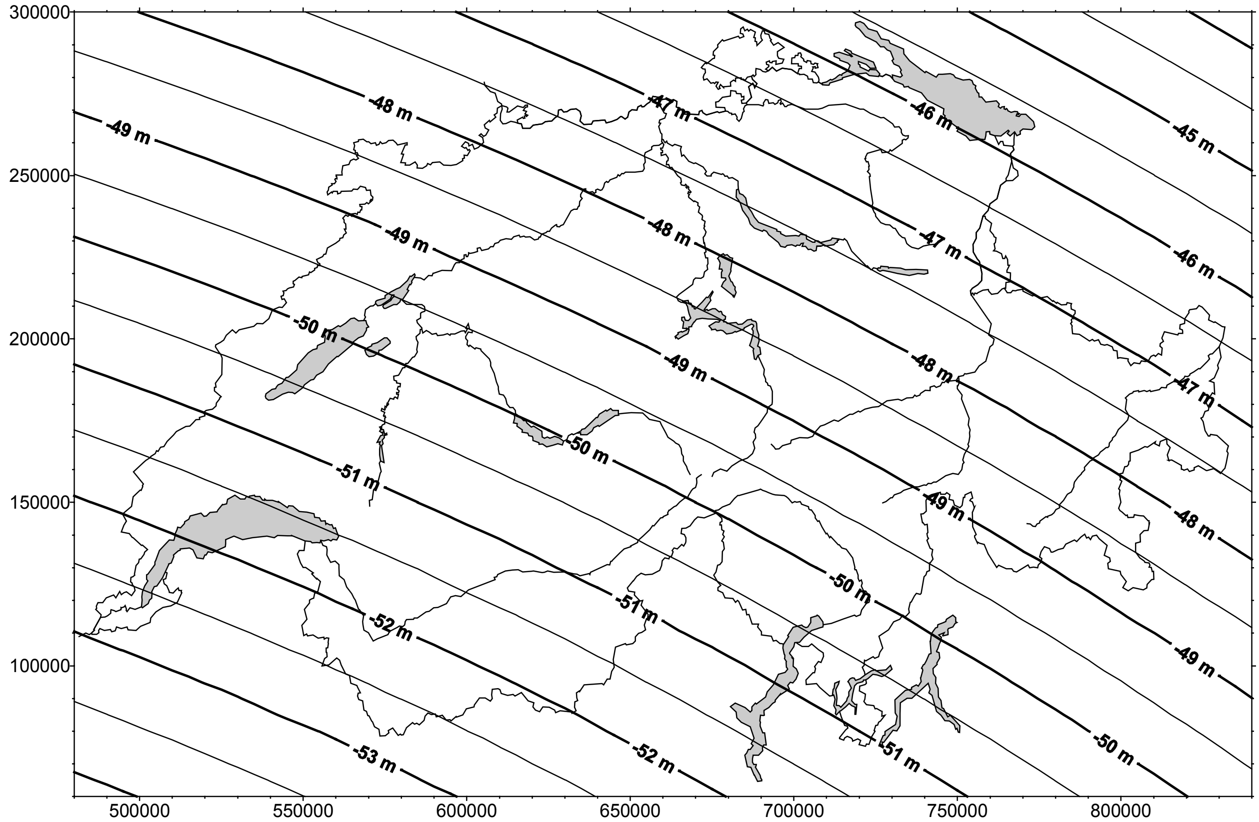
Längenunterschiede CH1903 minus WGS84 (in Bogensekunden)



Breitenunterschiede CH1903 minus WGS84 (in Meter umgerechnet)



Längenunterschiede CH1903 minus WGS84 (in Meter umgerechnet)



(Ellipsoidische) Höhenunterschiede CH1903 minus WGS84

6 Zahlenbeispiele

Koordinatentransformation LV95 ⇒ ETRF93 (~WGS84)

Schweizer Projektionskoordinaten LV95 mit orthometrischen Höhen

```
$$PK LV95.pk                                                30.03.1999 14:02
Zimmerwald (Kappenbolzen)        2602030.77..1191775.06..      897.9063
Chrischona                       2617306.92..1268507.87..      455.9016
Pfaender                         2776668.59..1265372.25..     1042.5898
La Givrine                       2497312.65..1145626.14..     1207.4658
Monte Generoso                   2722649.39..1087786.37..     1692.9974
```

⇒ Berechnung und Addition der Geoidundulationen (Programm CHGEO98R) ⇒

Schweizer Projektionskoordinaten LV95 mit ellipsoidischen Höhen

```
$$PE used Geoid Model: CHGEO98R (Marti 1998) LV95           07.04.1999 10:38
Zimmerwald (Kappenbolzen)        2602030.77  1191775.06        897.3627        -.5436 98 CH
Chrischona                       2617306.92  1268507.87        457.1300        1.2284 98 CH
Pfaender                         2776668.59  1265372.25       1043.6200        1.0302 98 CH
La Givrine                       2497312.65  1145626.14       1206.3400       -1.1258 98 CH
Monte Generoso                   2722649.39  1087786.37       1690.6600       -2.3374 98 CH
```

⇒ Umrechnung in

Ellipsoidische Koordinaten und Höhen bezüglich CH1903+

```
$$EL ellipsoidische Koordinaten im CH1903+                  07.04.1999 10:44
Zimmerwald (Kappenbolzen)            7 27 58.417745   46 52 42.270255      897.3627
Chrischona                           7 40 10.574820   47 34  6.404965      457.1300
Pfaender                             9 47  8.465984   47 31   .092648     1043.6200
La Givrine                           6  6  9.983811   46 27 19.272743     1206.3400
Monte Generoso                       9  1 15.646553   45 55 54.253090     1690.6600
```

⇒ Umrechnung in

Geozentrisch-kartesische Koordinaten bezüglich CH1903+

```
$$3D geozentrisch-kartesische Koordinaten im CH1903+        07.04.1999 10:45
Zimmerwald (Kappenbolzen)          4330616.71244   567539.79285  4632721.68605
Chrischona                         4272473.55710   575353.23757  4684498.28763
Pfaender                           4252889.17730   733507.30318  4681046.76046
La Givrine                         4377121.12355   467993.58998  4600671.91414
Monte Generoso                     4389438.95988   696869.11597  4560727.60896
```

⇒ Addition der drei Translationsparameter: dX = + 674.374 m, dY = + 15.056 m, dZ = + 405.346 m ⇒

Geozentrisch-kartesische Koordinaten bezüglich ETRF93 / CHTRF95

```
$$3D geozentrisch-kartesische Koordinaten im ETRF93         07.04.1999 10:42
Zimmerwald (Kappenbolzen)          4331291.08644   567554.84885  4633127.03205
Chrischona                         4273147.93110   575368.29357  4684903.63363
Pfaender                           4253563.55130   733522.35918  4681452.10646
La Givrine                         4377795.49755   468008.64598  4601077.26014
Monte Generoso                     4390113.33388   696884.17197  4561132.95496
```

⇒ eventuell Umrechnung in

Ellipsoidische Koordinaten und Höhen bezüglich ETRF93

```
$$EL ellipsoidische Koordinaten im ETRF93                   07.04.1999 15:59
Zimmerwald (Kappenbolzen)            7 27 54.984923   46 52 37.541533      947.1511
Chrischona                           7 40  6.983077   47 34  1.385301      504.9275
Pfaender                             9 47  3.697719   47 30 55.172799     1089.3764
La Givrine                           6  6  7.326361   46 27 14.690021     1258.2466
Monte Generoso                       9  1 11.429926   45 55 49.983503     1741.2136
```